

Ossi Malaska

Kytettyjen teholähdejärjestelmien dynaamiset mallit

Sähkötekniikan korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi
diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 29.7.2014.

Työn valvoja ja ohjaaja:

Dos. Kai Zenger

Tekijä: Ossi Malaska

Työn nimi: Kytettyjen teholähdejärjestelmien dynaamiset mallit

Päivämäärä: 29.7.2014

Kieli: Suomi

Sivumäärä: 7+61

Sähkötekniikan ja automaation laitos

Professori: Systemiteknikka

Koodi: AS-74

Valvoja: Dos. Kai Zenger

Ohjaaja: Dos. Kai Zenger

Teholähdejärjestelmien mallintaminen nykyisillä menetelmillä käy koko ajan vaikeammaksi järjestelmien rakenteiden monimutkaistumisen ja suorituskykyvaatimusten kasvamisen myötä. Systemaattiset menetelmät kytkettyjen järjestelmien mallintamista varten analysoinnin ja säädön kannalta ovat vielä toistaiseksi puutteellisia, ja järjestelmissä on ollut tapana ohjata vain yhtä sen laitteista. Niinpä nykyiset mallintamismenetelmät ja mallintamissäännöt ovat kaukana optimaalisista, ja systemaattisten tapojen kehittämisestä olisi hyötyä. On syytä muistaa, että tällaisten uusien kehitettävien menetelmien kohdalla on yhä stabiilisuus- ja suorituskykyehtojen täytyttävä.

Tässä diplomityössä kerrotaan aluksi yleisesti sähköverkkojen toiminnasta, ja kuinka sähköä käytännössä välitetään kuluttajille. Lisäksi kerrotaan sähköverkkojen tulevaisuuden näkymistä esittelemällä hajautetun energiantuotannon konsepti, jota kutsutaan myös älykkääksi sähköverkoksi. Tämän jälkeen tutustutaan tasavirtaväyliin, joilla saattaa olla merkittävä rooli hajautetussa energiantuotannossa. Tasavirtaväylillä voidaan välittää tasavirtaa samanaikaisesti useille rinnakkain kytketyille laitteille. Seuraavaksi esitellään erilaisia kompleksitason kiellettyihin alueisiin pohjautuvia impedanssipohjaisia stabiilisuusanalyysimenetelmiä, joille R. D. Middlebrook loi 1970-luvun puolivälissä perustan.

Näiden vaiheiden jälkeen työssä laajennetaan erästä olemassa olevaa dynaamisten teholähdejärjestelmien mallintamismenetelmää koskemaan tasavirtaväyliä muodostamalla tasavirtaväylän tulovirran ja lähtöjännitteen yhtälöt eri tilanteissa. Liikkeelle lähdetään yksinkertaisesta tapauksesta, jossa tasavirtaväylässä on vain yksi haara eli väylässä on tällöin vain yksi komponentti. Tämän jälkeen tarkastellaan miten rinnan- ja sarjakytkentöjen lisääminen vaikuttaa väylän yhtälöihin. Työn viimeisessä osiossa tarkastellaan järjestelmän stabiilisuutta ja käydään läpi järjestelmäesimerkki.

Avainsanat: teholähde, dynaaminen malli, tasavirtaväylä, älykäs sähköverkko

Author: Ossi Malaska

Title: Dynamic models of connected power systems

Date: 29.7.2014

Language: Finnish

Number of pages: 7+61

Department of Electrical Engineering and Automation

Professorship: Control Engineering

Code: AS-74

Supervisor: Docent Kai Zenger

Instructor: Docent Kai Zenger

The modeling of connected power systems is constantly becoming more and more difficult due to the overall systems getting more complex, and the higher demands on the system performance. The systematic methods regarding system analysis and control of the connected power systems are still inadequate, and currently used methods have traditionally based on knowledge how to control just one single device of the complete system. Needless to say, such design methods and design rules are far from optimal, and huge benefits could be obtained by developing systematic methods. When developing these kinds of systematic methods we still have to be sure that the developed methods guarantee the stability and the performance specifications of the system.

This master's thesis will first discuss about the power grids in general, and explain how the electricity is transmitted to the consumers. Then the thesis will discuss about the future of the power grids by explaining the concept of the distributed generation, also known as smart grids. After these phases the work will cover multiport dc busses, which could have a significant role in the distributed generation in the future. These mentioned dc busses can transmit direct current simultaneously to multiple devices which are connected in parallel connection to each other. Next the thesis will describe impedance-based stability assessment methods based on different kinds of forbidden regions in the complex plane. The idea to these methods has been laid down in the mid-1970s by R. D. Middlebrook.

After these phases the thesis will expand one proposed modeling method of the connected power systems to apply with the dc bus networks by creating the equations in different situations for the dc bus input current and output voltage. The thesis will start with the simple case, when just one component is connected to the dc bus. After that the thesis will cover how adding parallel and series connections to the system will affect its equations. The final part of the thesis will focus to system stability and will cover one system example.

Keywords: power system, dynamic model, dc bus, smart grid

Alkusanat

Tämä diplomityö on tehty Aalto-yliopiston sähkötekniikan korkeakoulussa systeemitekniikan tutkimusryhmässä. Työn valvojana ja ohjaajana toimi dosentti Kai Zenger, jota haluan kiittää asiantuntevasta ohjauksesta, hyödyllisistä korjausehdotuksista ja tieteellistä kirjoittamista koskevista neuvoista. Lisäksi haluan kiittää kaikkia niitä Aalto-yliopiston henkilökuntaan kuuluvia henkilöitä saamastani opista, joiden luennoimille kursseille olen opintojeni aikana osallistunut. Opetus on ollut asiantuntevaa ja tasokasta. Haluan kiittää myös ystäviäni ja sukulaisiani saamastani tuesta ja kannustuksesta opintojeni ja erityisesti tämän työn aikana.

Otaniemi, 4.8.2014

Ossi Malaska

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	ii
Tiivistelmä (englanniksi)	iii
Alkusanat	iv
Sisällysluettelo	v
Symbolit ja lyhenteet	vi
1 Johdanto	1
2 Sähkön siirtomenetelmät	2
2.1 Sähköverkot ja niiden tulevaisuuden näkymiä	2
2.2 Tasavirtaväylät ja järjestelmien stabiilisuuden tarkastelu	7
3 Kytketyt teholähdejärjestelmät ja niiden komponentit	12
3.1 Tasavirtaväylän yksinkertainen malli ja sen yhtälöt	12
3.2 Tasavirtaväylän malli ja yhtälöt rinnankytkennässä	15
3.3 Tasavirtaväylän malli ja yhtälöt sarjakytkennässä	21
3.4 Rinnan- ja sarjakytkentöjen teorioiden yhdistäminen	27
4 Järjestelmän stabiilisuus ja suorituskyky	32
4.1 Sarjakytkennän stabiilisuus	32
4.2 Esimerkkijärjestelmä	35
4.3 PI-säädetyt esimerkkijärjestelmän analyysi	42
5 Yhteenveto	51
Viitteet	53
Liite A: Matlab-koodi	57
Liite B: Esimerkkijärjestelmän yhtälöt	60

Symbolit ja lyhenteet

Latinalaiset aakkoset

$C_1 \dots C_n$	Kondensaattorin kapasitanssi (F)
$\hat{i}_1 \dots \hat{i}_n$	Järjestelmän sisäisiä osavirtoja (A)
\hat{i}_{in}	Järjestelmän sisääntulovirta (A)
\hat{i}_o	Järjestelmän ulostulovirta (A)
j	Imaginääriyksikkö
$L_2 \dots L_n$	Kelan induktanssi (H)
M_S	Herkkyysfunktion itseisarvon maksimi
$R_2 \dots R_n$	Resistanssi (ohm)
s	Laplace-muuttuja
\hat{u}_{in}	Järjestelmän sisääntulojännite (V)
\hat{u}_o	Järjestelmän ulostulojännite (V)
$Y_1 \dots Y_n$	Kuormia ja lähteitä kuvaavia admittansseja

Siirtofunktiot

$p_{11} \dots p_{nn}$	Koko järjestelmän siirtofunktiot
$k_{11} \dots k_{22}$	Sarjaan kytkettävän piirin siirtofunktiot
$m_{11} \dots m_{22}$	Sarjakytkennän siirtofunktiot
$r_{11} \dots r_{11}$	Osajärjestelmän siirtofunktiot

Lyhenteet

AC	Alternating current (vaihtovirta)
BIBO	Bounded Input Bounded Output
DC	Direct current (tasavirta)
ESAC	Energy systems analysis consortium (energiajärjestelmien analysoinnin konsortio)
EU	Euroopan unioni
GM	Gain margin (vahvistusvara)

GMPM	Gain margin, phase margin (vahvistus- ja vaihevara)
LC	induktanssi-kapasitanssi
LHP	Left half plane (vasen puolitaso)
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MPC	Maximum Peak Criteria (maksimiampitudin kriteeri)
OA	Opposing argument
SISO	Single Input Single Output
$\frac{Z_o}{Z_i}$	Impedanssisuhde (minor loop gain)

1 Johdanto

Tämän diplomityön aiheena ovat kytkettyjen teholähdejärjestelmien dynaamiset mallit. Työn aihe syntyi alun perin kahden erillisen konferenssiartikkelin pohjalta, jotka käsittelevät yhteen kytkettyjen teholähdejärjestelmien dynaamisia ominaisuuksia ja moniporttisten tasavirtaväylien mallintamista.[1–2] Työn tavoitteena on laajentaa konferenssiartikkelissa [1] esitettyä teoriaa ja selvittää miten se toimii tasavirtaväylien ja muiden piirien kanssa.

Teholähdejärjestelmien mallintaminen nyky menetelmin käy koko ajan vaikeammaksi järjestelmien rakenteiden monimutkaistumisen ja suorituskäyttövaatimusten kasvamisen myötä. Systemaattiset menetelmät kytkettyjen järjestelmien mallintamiseen analyysin ja säädön kannalta ovat vielä toistaiseksi puutteellisia ja järjestelmissä on ollut tapana ohjata vain yhtä sen laitteista. Niinpä nykyiset mallintamismenetelmät ja mallintamissäännöt ovat kaukana optimaalisista, joten systemaattisten tapojen kehittämisestä olisi hyötyä. Lisäksi stabiilisuus- ja suorituskäyttöehtojen täytyminen on oleellisen tärkeää, jotta tällaisia uusia kehitettäviä menetelmiä voidaan soveltaa.

Toinen tämän diplomityön aiheeseen vaikuttanut konferenssiartikkeli [2] käsitteli moniporttisia tasavirtaväyliä, joilla voidaan samanaikaisesti jakaa tasavirtaa usealle laitteelle. Tasavirtaväylien käyttö on viime vuosina lisääntynyt, ja niille keksitään jatkuvasti uusia käyttökohteita niin teollisuuden, toimistojen kuin kotitalouksienkin piirissä [3–6]. Tällaiset tasavirtalähteen, LC-suotimen ja säädettävän kuorman sisältävät systeemit voivat muiden järjestelmien tavoin olla epästabiileja, joten tasavirtaväylien stabiilisuuden varmistaminen on tärkeää, sekä tasavirtakuormien [7–10] että vaihtovirtakuormien [11–17] tapauksessa. Lisäksi tällaisten järjestelmien mallit ovat yleensä epälineaarisia, joten käytäntönä on ollut ensin keskiarvoistaa ne kytkentäjakson yli ja sen jälkeen linearisoida piensignaalianalyysiä varten.

Useampia sisään- ja ulostuloja (Multiple Input, Multiple Output) sisältävien tasavirtaväylien mallintamista varten ei ole vielä kehitetty systemaattisia menetelmiä. Tämä on ongelmallista, sillä uusien porttien lisääminen väylään tekee järjestelmän tilayhtälöistä ja siirtofunktioista työläämpiä laskea. Lisäksi porttien lisääminen synnyttää väylään ei toivottuja resonanssiajankäyntejä.

Tämän diplomityön luvussa 2 kerrotaan sähköverkoista ja niiden tulevaisuuden näkymistä yleisesti. Lisäksi esitellään tasavirtaväylän perusidea ja erilaisia kompleksitasavirtaväylien mallintamiseksi perustuvia stabiilisuuden arviointimenetelmiä. Luvussa 3 käsitellään kytkettyjä teholähdejärjestelmiä ja niiden mallintamista. Aluksi tarkastellaan yksinkertaista tapaus, jolloin

tasavirtaväylä sisältää vain yhden haaran eli toisin sanoen siinä on kiinni vain yksi komponentti. Tämän jälkeen tarkastellaan, miten rinnan- ja sarjakytkentöjen lisääminen vaikuttaa väylän yhtälöihin. Lisäksi osoitetaan, että rinnan- ja sarjakytkentöjen teorit voidaan yhdistää. Luvussa 4 johdetaan aluksi sarjakytkennän stabiilisuusehto, jonka jälkeen käydään läpi esimerkkijärjestelmä, jota säädetään PI-säätimellä. Luvussa 5 on vielä työn yhteenveto.

2 Sähkön siirtomenetelmät

Tässä luvussa tarkastellaan aluksi yleisesti sähköverkkoja ja sähköjakelumenetelmiä. Sen jälkeen luodaan katsaus sähköverkkojen tulevaisuuteen esittelemällä käsite älykäs sähköverkko. Lopuksi kerrotaan vielä tasavirtaväylistä ja stabiilisuuden arviointimenetelmistä.

2.1 Sähköjakelu nyt ja sen tulevaisuuden näkymiä

Sähkö on kaikille suomalaisille toimitettava peruspalvelu. Erityyppisissä sähköntuotantolaitoksissa tuotettua sähköenergiaa toimitetaan sähköverkkoja pitkin asiakkaille. Sähköä siirretään aluksi sähkölaitoksista 10–400 kilovoltin jännitteellä, ja lähempänä kuluttajaa se muunnetaan 230 voltin verkkojännitteeksi. Sähköverkot voidaan jakaa niiden nimellisjännitteen perusteella suurjännite-, keskijännite- ja pienjänniteverkkoihin.[18]

Suurjänniteverkko on sähkönsiirron runkoverkko, jota pitkin sähköä siirretään korkealla jännitteellä pitkiä etäisyyksiä. Tällaisen verkon teho voi olla jopa tuhat megawattia, ja sähköä kuljetetaan yleensä sähköasemille tai raskaan teollisuuden laitoksiin. Suurjänniteverkkoja pienempiä sähköverkkoja ovat muutamien megawattien kokoluokkaa olevat keskijänniteverkot, joita pitkin sähköä siirretään mm. suurjänniteverkosta pienjänniteverkkoon johtaville jakelumuuntajille. Lisäksi yleensä pienet ja keskikokoiset voimalaitokset sekä suuret julkiset ja liikerakennukset liittyvät suoraan keskijänniteverkkoon. Keskijänniteverkkoja pienempiä verkkorakenteita ovat pienjänniteverkot, joilla sähköä toimitetaan pienkuluttajille. Kaupunkialueilla pienjänniteverkkojen jakelumuuntajat sijoitetaan yleensä vain satojen metrien päähän kuluttajista, mutta maaseudulla niiden etäisyydet voivat olla jopa muutamia kilometrejä.[18]

Käytännössä sähköenergian siirto toteutetaan ilmajohtoja ja maakaapeleita pitkin. Kummallakin siirtotavalla on omat hyvät ja huonot puolensa. Ilmajohtojen edut maajohtoihin verrattuna ovat niiden pienemmät asennuskustannukset, kaapeleiden helpompi sijoitettavuus, nopeammat korjausajat ja halvemmat korjauskustannukset. Ilmassa kulkevat kaapelit voivat kuitenkin aiheuttaa vaaran ihmisille ja koneille, ja ne ovat myös alttiimpia ympäristön aiheuttamille häiriöille. Näitä häiriöitä voidaan vähentää asentamalla kaapelit maan alle. Tällöin kaapeleiden korjaaminen on kuitenkin hankalampaa, ja niinpä niiden korjausajat ja korjauskustannukset ovat tavallisesti ilmajohtoja suuremmat.[19] Erityisesti kuitenkin ne verkon osuudet, jotka ovat alttiita normaalista poikkeaville sääolosuhteille, kuten myrskyille, on järkevää toteuttaa maakaapeleilla.

Euroopan sähköverkosto on melko vanhentunutta, ja suuria osia siitä täytyy uusia lähitulevaisuudessa. Teknologian kehittymisen, sähkömarkkinoiden vapautumisen ja asetettujen ilmastotavoitteiden myötä on ryhdytty etsimään nykyistä varmempia ja edullisempia sähköjakelumuotoja. Yksi Euroopan unionin energiastategisista prioriteettialueista onkin uudenlaisten integroitujen sähköverkkojen suunnittelu ja kehittäminen. Sähköverkon uusimista suunniteltaessa on syytä muistaa, että asennetut sähköverkot ovat tavallisesti käytössä useita kymmeniä vuosia, joten niihin valitut ratkaisut vaikuttavat pitkälle tulevaisuuteen. Siksi nykyisten sähköverkkojen suunnittelun päätavoitteena onkin kehittää aiempaa tehokkaampi, varmempi, joustavampi ja luotettavampi sähköverkkojärjestelmä, jolla on samalla mahdollisimman vähäiset ympäristövaikutukset ja joka yhdistää sähkövoimateknologiat älykkäiden laitteiden ja automaatio-, tieto- ja viestintäteknologioiden kanssa.[20–21] Tällaista sähköverkkoa kutsutaan nimillä älykäs sähköverkko ja hajautettu energiantuotanto. On syytä myös pitää mielessä, että älykkäiden sähköverkkojen käsite todennäköisesti vielä muuttuu teknologioiden ja markkinoiden kehittyessä.[22]

Älykkäällä sähköverkolla voidaan tehostaa energian käyttöä ohjaamalla ja tasaamalla sähkön kulutusta. Älykkäässä sähkönsiirtojärjestelmässä myös sähköverkon siirtokapasiteetti pyritään hyödyntämään entistä tarkemmin. Yhtenä tulevaisuuden päätavoitteena voidaan on, että verkkoon tuotetaan energiaa hajautetusti ja perinteisten voimalaitosten ohella myös pienkuluttajat ja liike-elämän ja teollisuuden laitokset voivat siirtää energiaa verkkoon päin. Tällaisella verkolla olisi täten mahdollista kuljettaa sähköä ja tietoa molempiin suuntiin ja siten linkittää sähkön kuluttajat ja tuottajat tiiviimmin yhteen. Molemmat osapuolet voisivat osallistua myös aktiivisesti sähkömarkkinoille.[22–24] Päätavoitteena on vahvasti keskitetty verkko, jossa hajautetun sähköntuotannon ja uusiutuvien energialähteiden tuotantoa pyritään lisäämään [25]. Kuvassa 1 on esitetty eräs haja-asutusalueen sähköverkkojärjestelmän tulevaisuuden visio.

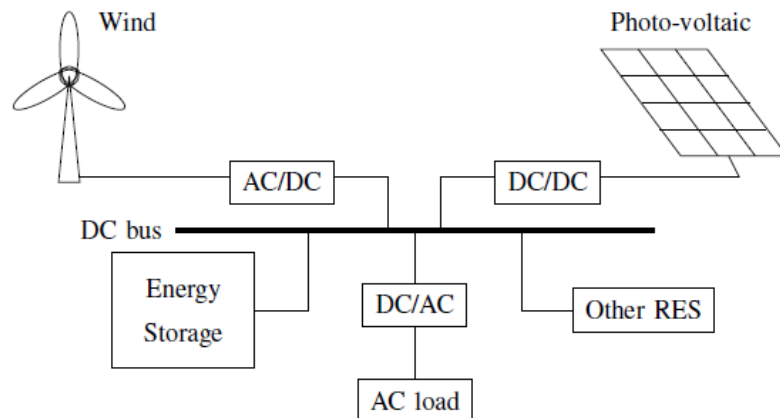
Taulukko 1. Tulevaisuuden älykkäiden sähköverkkojen tärkeimmät osa-alueet.[25]

JOUSTAVUUS			
Tekniikka	Rajapinta	Avoin ympäristö	Älykkyys
Verkkorakenne	Tehoelektroniikka	Harmonisointi	Informaatiojärjestelmät
Vianhallinta		Standardointi	Tietojärjestelmät
Sähkön jakelun laatu		Lainsäädäntö	Telekommunikaatiojärjestelmät
Hajautettu tuotanto			Suojausjärjestelmät
Energian varastointi			

Kuten luvun alussa mainittiin, lähes kaikki sähköenergia tuotetaan keskitetysti suurissa voimalaitoksissa, kuten hiili- ja kaasuvoimalaitoksissa, ydinvoimalaitoksissa, ja vesivoimalaitoksissa. Teknologian kehitys, halu energian hyötysuhteen parantamiseksi ja ilmastonmuutoksen torjumiseksi ovat saaneet etsimään vaihtoehtoisia ja aiempaa tehokkaampia menetelmiä.[26] Yksi tulevaisuuden menetelmä on hajautettu energiantuotanto, jossa sähköä voidaan tuoda verkkoon lukuisista pienistä energialähteistä. Verkkoon voidaan tuottaa energiaa muun muassa energian yhteistuotannolla, aurinkopaneeleilla, tuuliturbiineilla tai jätekäsittelyllä.

Energian yhteistuotannossa energiaa tuotetaan tyypillisesti höyryturbiinien, polttokennojen, mikroturbiinien ja mäntämoottorien avulla [27]. Esimerkiksi kaukolämpö sekä biopolttoaineiden, yhdyskuntajätteiden, jätevesien, biojätteiden, ja lannan hajoamisessa syntyvän metaanikaasun kerääminen ja hyödyntäminen polttoaineena kaasuturbiineissa, ja sitä kautta energian tuottaminen kuuluu energian yhteistuotannon piiriin [28]. Muita hajautetun energiantuotannon menetelmiä ovat sähköenergian tuottaminen aurinkopaneelien tai tuuliturbiinien avulla. Aurinkopaneelien suurin ongelma on niiden käyttöaikojen katkonaisuus vuorokauden ajoista ja sääolosuhteista riippuen. Aurinkopaneelit pyritään sijoittamaan avoimille paikoille tai rakennusten katoille, jossa ne prosessoivat välivaiheiden kautta joko auringon lämpöenergiasta tai fotoneista sähköenergiaa. Myös tuuliturbiinien käyttöajat ovat aurinkopaneelien tavoin katkonaisia. Tuuliturbiinit sijoitetaan tavallisesti avoimelle ja tuuliselle paikalle, kuten vuorten rinteille tai merelle. Tuuliturbiinien etuja ovat niiden edulliset

ylläpitokustannukset ja ympäristön vähäinen saastuminen. Huono puoli on niiden äänekkyyks. Kuvassa 2 on esimerkki hajautetusta energiantuotannosta, jossa eri kokonaisuuksia on kytketty samaan verkkoon. Verkko on toteutettu tasavirtaväylällä, jota käsitellään myöhemmin enemmän.



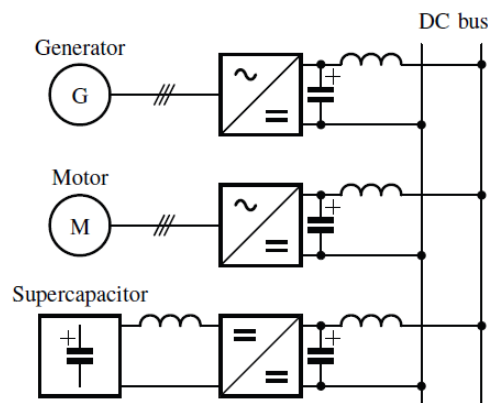
Kuva 2. Esimerkki hajautetusta energiantuotannosta.[29]

Hajautetun energiantuotannon menetelmillä tuotetun sähkön liittäminen sähkön kantaverkkoon ei ole aivan yksinkertainen prosessi, sillä verkkoon yhdistämisessä esiintyy erilaisia teknisiä ja taloudellisia kysymyksiä. Teknisiä kysymyksiä syntyy varsinkin sähkön laadun, jännitteen stabiilisuuden, harmonisten yliaaltojen, luotettavuuden, suojauksen ja ohjattavuuden osa-alueilla.[30] Lisäksi hajautetun energiantuotannon käyttö saattaa vaikuttaa koko verkon toimintoihin, kuten verkon taajuuteen tai sähkön jakautumiseen verkossa.[31–32]

Tässä työssä esitetään uudenlainen systemaattinen menetelmä yhteenkytkettyjen sähköpiirien mallintamista varten, josta mahdollisesti voi olla hyötyä tulevaisuuden sähköverkkojen ja sähköjärjestelmien mallintamisessa. Menetelmän lähtökohtana on esittää sähköpiiri aluksi kanonisena piensignaalmallina, josta voidaan muodostaa piiriä kuvaavat yhtälöt ja esittää se lopulta matriisi- ja lohkomuodossa. Luvussa 3 osoitetaan, että tällaisia lohkoja voidaan kytkeä keskenään sarjaan ja rinnakkain ja analysoida järjestelmän sisäistä ja tulo-lähtökäyttäytymistä riittävällä tarkkuudella tavallisten säätöteorian ja systeemianalyysin menetelmien avulla.

2.2 Tasavirtaväylät ja järjestelmien stabiilisuuden tarkastelu

Tasavirtaväylillä voidaan samanaikaisesti välittää tasavirtaa useille rinnakkain kytketyille laitteille, ja niiden käyttö on jatkuvasti lisääntynyt tasavirralla toteutetuissa virransiirtojärjestelmissä. Tasavirtaväylillä saattaa olla merkittävä rooli tulevaisuuden hajautetussa energiantuotannossa, sillä myös pienjänniteverkko on mahdollista kytkeä tasavirtaväylään. Tulevaisuuden hajautettu energiantuotanto tulee muuttamaan huomattavasti nykyistä sähköverkon toimintatarkoitusta, sillä nykyään sähköverkkoa pidetään pääasiallisesti vain suurten voimalaitosten jakeluverkkona. Hajautetun energiantuotannon myötä sähköverkkojen luonne muuttuu, sillä sähköverkosta voidaan silloin sekä ottaa sähköä että syöttää siihen omaa sähkötuotantoa.

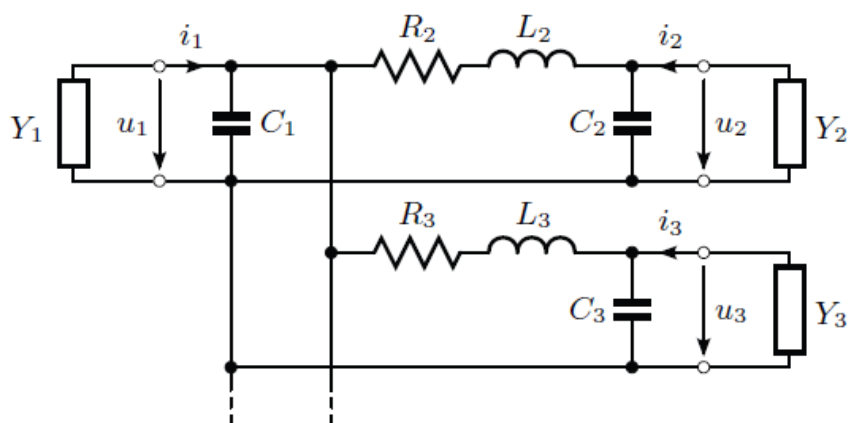


Kuva 3. Tasavirtaväylää kuvaava esimerkkijärjestelmä, johon myös parasiittiset induktanssit on mallinnettu. Tällainen tasavirtaväylä voisi esimerkiksi olla käytössä tulevaisuudessa rakennusten sisäisessä sähköjakelussa. Järjestelmä voi luonnollisesti sisältää kuvan esimerkkitapausta enemmän lähteitä, kuormia ja energiavaroja.[2]

Nykyisin tasavirtaväylille löytyy jo sovelluskohteita muun muassa teollisuudessa, toimistoissa ja kotitalouksissa.[3–6] Kuvassa 3 on tasavirtaväylää kuvaava esimerkkijärjestelmä. Pienjänniteverkon voi kuvitella olevan generaattorin G kaltainen komponentti.

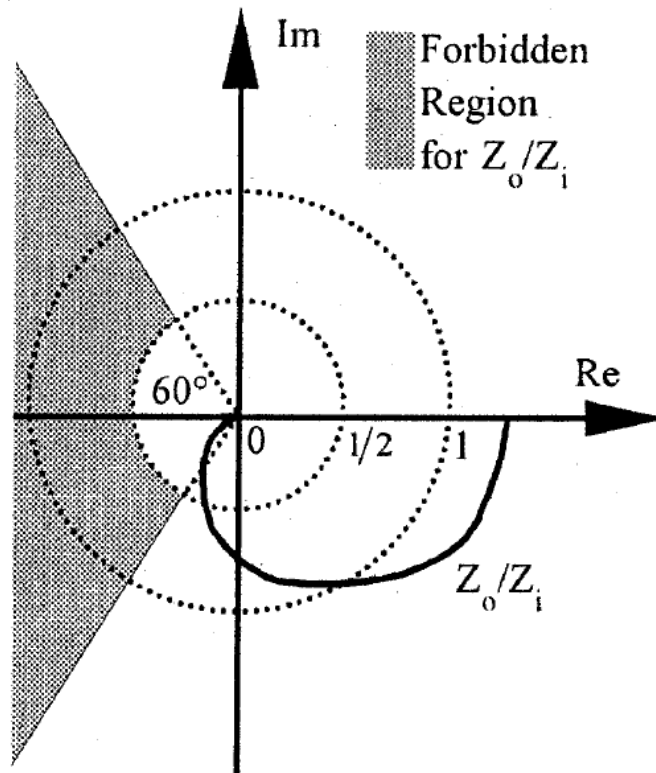
Tasavirtalähteitä, LC-suotimia ja säädettäviä kuormia sisältävät systeemit voivat olla muiden järjestelmien lailla epästabiileja, ja niiden stabiilisuuden varmistaminen on tärkeää sekä tasavirtakuormien [7–10] että vaihtovirtakuormien [11–17] tapauksessa. Lisäksi tällaisten järjestelmien mallit ovat tavallisesti epälineaarisia ja käytäntönä on ollut ensin keskiarvoistaa ne kytkentäjaksen yli ja linearisoida ne sen jälkeen piensignaalianalyysiä varten. Linearisoidut mallit on tavallisesti esitetty tilaesitysten tai siirtofunktioiden avulla, ja niistä on tutkittu piensignaali-stabiilisuutta tuloadmittanssin ja lähtöimpedanssin välisen tulon (minor loop gain) ja Nyquistin stabiilisuuskriteerin avulla.[7, 9] Järjestelmien paikallista stabiilisuutta on vuorostaan analysoitu linearisoitujen järjestelmien ominaisarvoja tarkastelemalla.[4]

Moniporttinen tasavirtaväylä, sekä siihen kytkeytyvät lähteet ja kuormat, voidaan esittää kuvan 4 piirinä, jossa admittanssit $Y_1 \dots Y_n$ kuvaavat tasavirtaväylään kytkettyjä kuormia ja lähteitä.[2]



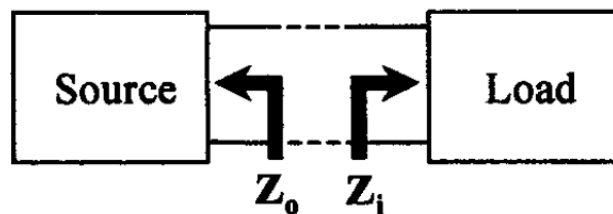
Kuva 4. Tasavirtaväylän malli. Admittanssit $Y_1 \dots Y_n$ kuvaavat kuormia ja lähteitä.[2]

R. D. Middlebrook loi 1970-luvun puolivälissä perustan impedanssipohjaisille stabiilisuusanalyysille julkaistessaan säädettävän konverterin sisääntulo-suodattimen suunnittelun peruseräatteen.[8, 33] Tällaiset impedanssipohjaiset stabiilisuuden arviointimenetelmät ovat sittemmin osoittautuneet erittäin tehokkaiksi ja niiden käyttö eri sovellusten kohdalla on yleistynyt. Stabiilisuuden arviointimenetelmissä määritetään tavallisesti tietty kielletty alue kompleksitasossa, josta impedanssisuhteen (minor loop gain) on pysyttävä poissa robustin stabiilisuuden takaamiseksi. Tämän kompleksitason kielletyn alueen määrittämiseksi on olemassa useita eri menetelmiä. Kuvassa 5 on esitetty tummennettuna vahvistus- ja vaihevaraan (GMPM) perustuva kielletty alue, jolta minor loop gainin Z_o/Z_i -käyrän on siis pysyttävä poissa robustin stabiilisuuden takaamiseksi.[34]



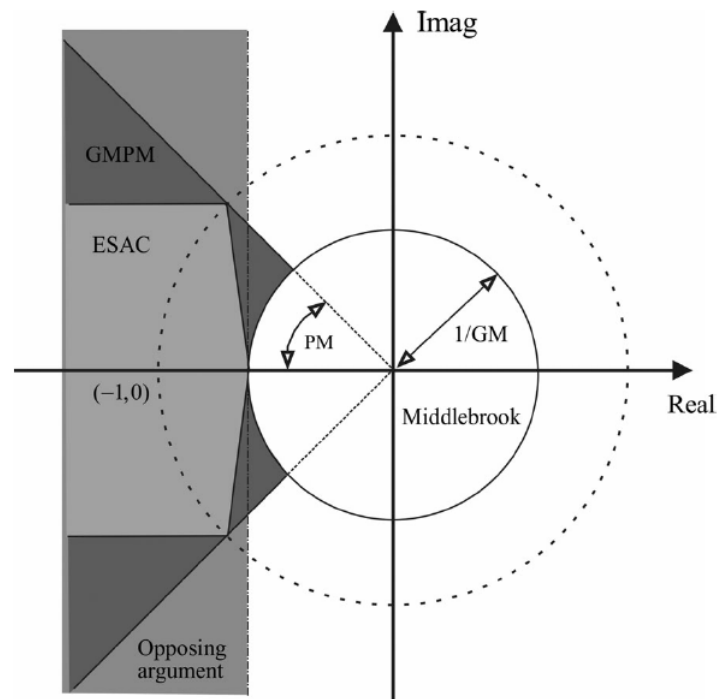
Kuva 5. Tummennettuna vahvistus- ja vaihevara (GMPM) perustuva kielletty alue, jolta Z_o/Z_i -käyrän (minor loop gain) on pysyttävä poissa robustin stabiilisuuden takaamiseksi.[34]

Virta- ja jännitesyötettyjen sovellusten impedanssisuhteiden selvittämiseksi on tehty runsaasti tutkimusta, jotta niiden stabiilisuutta arvioitaisiin varmasti oikein.[36–41] Kuvassa 6 havainnollistetaan yksityiskohtaisemmin, mitä impedanssisuhteen Z_o/Z_i termeillä käytännössä tarkoitetaan. Impedanssisuhteen termi Z_o tarkoittaa lähdejärjestelmän lähtöimpedanssia, ja termi Z_i kuormajärjestelmän tuloimpedanssia.



Kuva 6. Impedanssit stabiilisuuden tutkimista varten.[35]

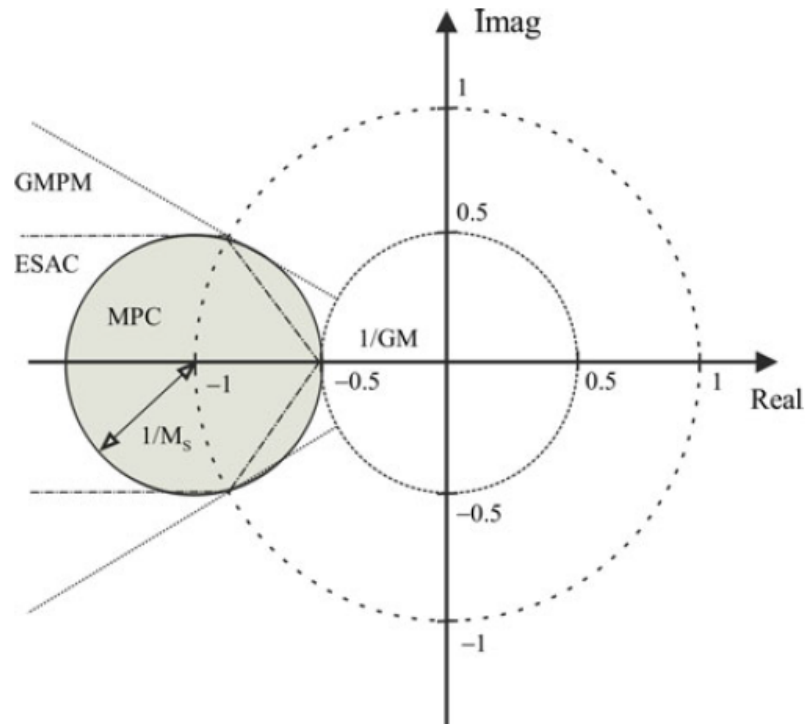
Tämän impedanssisuhteen Z_o/Z_i täytyy siis pysyä poissa ns. kielletyiltä alueelta, jonka määrittämiseksi on olemassa useita eri menetelmiä. Eri menetelmin saatuja tyypillisimpiä kiellettyjä alueita on esitetty kuvassa 7. Middlebrookin määrittelemien sisääntulosuodattimen sääntöjen mukaan kielletty alue sijaitsee origokeskisen ja vahvistusvaran (GM) käänteisluvun säteisen ympyrän ulkopuolella.[8, 33] Tätä kielletyn alueen määritelmää pidetään nykyään kuitenkin vanhentuneena ja tehottomana vaihtoehtona.[7] Niinpä on kehitetty vaihtoehtoisia kriteerejä kielletyn alueen määrittämiseksi, joista yleisimpiä ovat ESAC (energy source analysis consortium) [7], vahvistus- ja vaihevara (GMPM) perustuva [42], ja OA (opposing argument) [9] -kriteeri. Kuvasta 7 nähdään, että ESAC-kriteerin määrittelemä kielletty alue on kaikkein pienin, joten se on menetelmistä kaikkein vähiten rajoittava.



Kuva 7. Koostokuva eri menetelmien kielletyistä alueista.[38]

Näiden äsken mainittujen menetelmien lisäksi ympyränmuotoinen MPC-kriteeri (Maximum Peak Criteria) on osoittautunut mielenkiintoiseksi vaihtoehdoksi sen vähäisen rajoittavuuden johdosta. Suurimpana etuna tällä MPC-kriteerillä on aiemmin mainittuja kriteerejä huomattavasti pienempi kielletty alue. Lisäksi sen robustisuuden on havaittu olevan yhä muiden menetelmien kanssa samaa luokkaa tai jopa niitä parempi. Kuvassa 8 on esitetty tämän MPC-kriteerin määrittelemä kielletty alue ESAC- ja GMPM-kriteereihin verrattuna.[38] Tätä MPC-kriteeriä on

hyödynnetty myös käytännössä muun muassa erään hajautetun sähköverkon stabiilisuuden arvioinnissa.[29]



Kuva 8. Maksimiampitudin kriteerin rajoittama alue harmaalla verrattuna ESAC- ja GMPM-kriteereihin.[38]

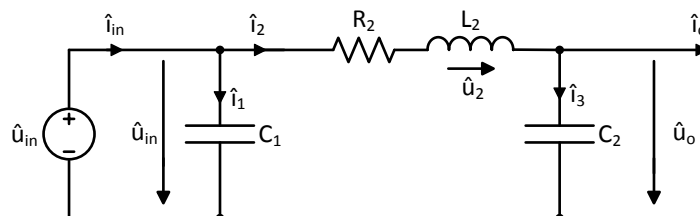
Määritettäessä kiellettyä aluetta MPC-kriteerin avulla, alueen säde määräytyy herkkyysfunktion itseisarvon maksimin M_s perusteella. Kielletyn alueen origo sijaitsee aina kompleksitason pisteessä $(-1, 0)$, ja sen säde on herkkyysfunktion itseisarvon maksimin M_s käänteisluku.

3 Kytkeytyt tehölähdejärjestelmät ja niiden komponentit

Tässä luvussa tarkastellaan tasavirtaväylää ja sen ominaisuuksia esittämällä erilaisia väylän sähköisiä piirikaavioita ja muodostamalla kussakin tilanteessa tulovirran ja lähtöjännitteen yhtälöt. Aluksi lähdetään liikkeelle yksinkertaisesta tapauksesta, jossa tasavirtaväylässä on vain yksi haara, eli siinä on tällöin kiinni vain yksi komponentti. Tämän jälkeen tarkastellaan rinnan- ja sarjakytkentöjen lisäämisen vaikutuksia väylän yhtälöihin. Lisäksi osoitetaan, että rinnan- ja sarjakytkentöjen teoriat voidaan yhdistää.

3.1 Tasavirtaväylän yksinkertainen malli ja sen yhtälöt

Tässä työssä tasavirtaväylän mallina käytetään lähes identtistä rakennetta moniporttisten tasavirtaväylien mallintamista käsitelleen konferenssiartikkelin [2], kanssa. Erona artikkelin esitykseen on, että tässä työssä kuormat ja lähteet kuvataan tulo- ja lähtöjännitteiden ja -virtojen, eikä admittanssien, avulla. Tasavirtaväylän yksinkertainen malli on esitetty kuvassa 9.



Kuva 9. Tasavirtaväylän yksinkertainen piirikaavio

Koska kapasitanssi voidaan määrittää kondensaattorin virran suhteenä jännitteen muutosnopeuteen, ja induktanssi voidaan määrittää käämin jännitteen suhteenä virran muutosnopeuteen, virroiksi $\hat{i}_1(t)$ ja $\hat{i}_3(t)$ ja jännitteeksi $\hat{u}_2(t)$ saadaan

$$\hat{i}_1(t) = C_1 \frac{d\hat{u}_{in}(t)}{dt} \quad (1)$$

$$\hat{i}_3(t) = C_2 \frac{d\hat{u}_o(t)}{dt} \quad (2)$$

$$\hat{u}_2(t) = L_2 \frac{d\hat{i}_2(t)}{dt} \quad (3)$$

Kirchhoffin virtalain mukaan sähkövirtaa tulee tiettyyn pisteeseen saman verran kuin sieltä poistuu, joten

$$\hat{i}_{in}(t) = \hat{i}_1(t) + \hat{i}_2(t) \quad (4)$$

$$\hat{i}_2(t) = \hat{i}_3(t) + \hat{i}_o(t) \quad (5)$$

Toisaalta Kirchhoffin jännitelain mukaan suljetun silmukan jännitteiden summa on nolla, josta saadaan

$$R_2\hat{i}_2(t) + \hat{u}_2(t) + \hat{u}_o(t) - \hat{u}_{in}(t) = 0 \quad (6)$$

Lisäksi yhtälöiden alkuarvot oletetaan nolliksi, joten yhtälöiden (1-6) Laplace-muunnoksiksi saadaan

$$\hat{i}_1(s) = sC_1\hat{u}_{in}(s) \quad (7)$$

$$\hat{i}_3(s) = sC_2\hat{u}_o(s) \quad (8)$$

$$\hat{u}_2(s) = sL_2\hat{i}_2(s) \quad (9)$$

$$\hat{i}_{in}(s) = \hat{i}_1(s) + \hat{i}_2(s) \quad (10)$$

$$\hat{i}_2(s) = \hat{i}_3(s) + \hat{i}_o(s) \quad (11)$$

$$R_2\hat{i}_2(s) + \hat{u}_2(s) + \hat{u}_o(s) - \hat{u}_{in}(s) = 0 \quad (12)$$

Sijoitetaan yhtälöön (12) aluksi yhtälö (9), ja sitten yhtälö (11), ja saadaan

$$\hat{u}_o(s) = \hat{u}_{in}(s) - R_2\hat{i}_3(s) - R_2\hat{i}_o(s) - sL_2\hat{i}_3(s) - sL_2\hat{i}_o(s) \quad (13)$$

Sijoitetaan seuraavaksi saatuun yhtälöön (13) yhtälö (8), ja saadaan

$$(L_2C_2s^2 + R_2C_2s + 1)\hat{u}_o(s) = \hat{u}_{in}(s) - (L_2s + R_2)\hat{i}_o(s) \quad (14)$$

Tämä saatu yhtälö (14) voidaan vielä muokata muotoon

$$\hat{u}_o(s) = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \hat{u}_{in}(s) - \frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \hat{i}_o(s) \quad (15)$$

Seuraavaksi myös virta \hat{i}_{in} pyritään esittämään \hat{u}_o kanssa samojen sisääntulojen $\hat{u}_{in}(s)$ ja $\hat{i}_o(s)$ avulla. Sijoitetaan yhtälöön (10) aluksi yhtälö (11), jonka myötä yhtälö saadaan muotoon

$$\hat{i}_{in}(s) = \hat{i}_1(s) + \hat{i}_3(s) + \hat{i}_o(s) \quad (16)$$

Sijoittamalla yhtälöön (16) seuraavaksi yhtälöt (7) ja (8) tulokseksi saadaan

$$\hat{i}_{in}(s) = sC_1 \hat{u}_{in}(s) + sC_2 \hat{u}_o(s) + \hat{i}_o(s) \quad (17)$$

Nyt sijoitetaan yhtälöön (17) vielä aiemmin saatu yhtälö (15), jonka myötä lopulliseksi virran \hat{i}_{in} lausekkeeksi tulee

$$\hat{i}_{in}(s) = \left(C_1 s + \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \right) \hat{u}_{in}(s) + \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \hat{i}_o(s) \quad (18)$$

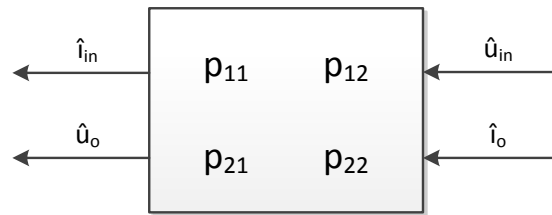
Saadut yhtälöt (15) ja (18) voidaan koota matriisiin

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in}(s) \\ \hat{u}_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_o(s) \end{bmatrix} \quad (19)$$

missä

$$\begin{cases} p_{11} = C_1 s + \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ p_{12} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ p_{21} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ p_{22} = -\frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \end{cases}$$

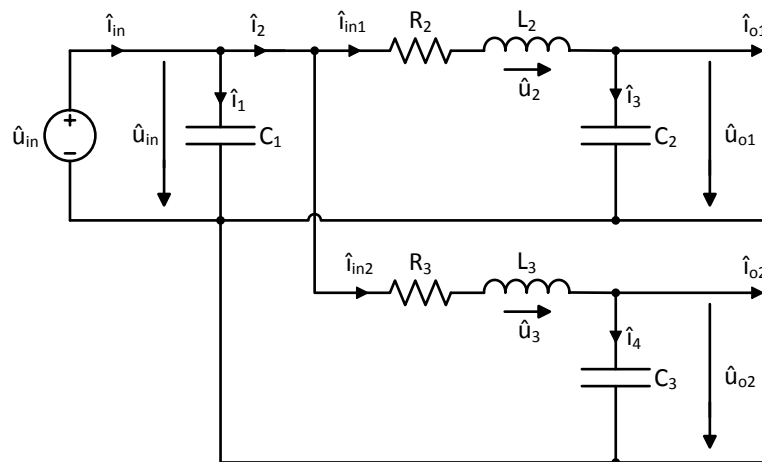
Saadut tulokset voidaan esittää myös kuvan 10 tulo-lähtö -lohkomallina.



Kuva 10. Järjestelmän tulo-lähtö -lohkomalli

3.2 Tasavirtaväylän malli ja yhtälöt rinnankytkennässä

Tässä aluvussa havainnollistetaan, miten rinnankytkennän lisääminen vaikuttaa edellisessä kohdassa johdettuihin tasavirtaväylän yhtälöihin (19). Lisäksi pyritään esittämään rinnankytkennän seurauksena muuttuva tasavirtaväylän rakenne yhä lopulta kuvan 10 kaltaisena tulo-lähtö -lohkomallina. Kuvassa 11 on esitetty kaksi rinnakkain kytkettyä komponenttia sisältävä piiri.



Kuva 11. Kaksi rinnakkain kytkettyä komponenttia sisältävä piiri

Kapasitanssi voidaan jälleen määrittää kondensaattorin virran suhteena jännitteen muutosnopeuteen. Samoin induktanssi voidaan määrittellä käämin jännitteen suhteena virran muutosnopeuteen. Täten virroiksi $\hat{i}_1(t)$, $\hat{i}_3(t)$ ja $\hat{i}_4(t)$ ja jännitteiksi $\hat{u}_2(t)$ ja $\hat{u}_3(t)$ saadaan

$$\hat{i}_1(t) = C_1 \frac{d\hat{u}_{in}(t)}{dt} \quad (20)$$

$$\hat{i}_3(t) = C_2 \frac{d\hat{u}_{o1}(t)}{dt} \quad (21)$$

$$\hat{i}_4(t) = C_3 \frac{d\hat{u}_{o2}(t)}{dt} \quad (22)$$

$$\hat{u}_2(t) = L_2 \frac{d\hat{i}_{in1}(t)}{dt} \quad (23)$$

$$\hat{u}_3(t) = L_3 \frac{d\hat{i}_{in2}(t)}{dt} \quad (24)$$

Kirchhoffin virtalain mukaan sähkövirtaa tulee tiettyyn pisteeseen saman verran kuin sieltä poistuu, joten

$$\hat{i}_{in}(t) = \hat{i}_1(t) + \hat{i}_2(t) \quad (25)$$

$$\hat{i}_2(t) = \hat{i}_{in1}(t) + \hat{i}_{in2}(t) \quad (26)$$

$$\hat{i}_{in1}(t) = \hat{i}_3(t) + \hat{i}_{o1}(t) \quad (27)$$

$$\hat{i}_{in2}(t) = \hat{i}_4(t) + \hat{i}_{o2}(t) \quad (28)$$

Kirchhoffin jännitelain mukaan suljetun silmukan jännitteiden summa on nolla, joten

$$R_2 \hat{i}_{in1}(t) + \hat{u}_2(t) + \hat{u}_{o1}(t) - \hat{u}_{in}(t) = 0 \quad (29)$$

$$R_3 \hat{i}_{in2}(t) + \hat{u}_3(t) + \hat{u}_{o2}(t) - \hat{u}_{in}(t) = 0 \quad (30)$$

Yhtälöiden alkuarvot oletetaan jälleen nolliksi, joten yhtälöiden (20-30) Laplace-muunnoksiksi saadaan

$$\hat{i}_1(s) = sC_1 \hat{u}_{in}(s) \quad (31)$$

$$\hat{i}_3(s) = sC_2 \hat{u}_{o1}(s) \quad (32)$$

$$\hat{i}_4(s) = sC_3 \hat{u}_{o2}(s) \quad (33)$$

$$\hat{u}_2(s) = sL_2 \hat{i}_{in1}(s) \quad (34)$$

$$\hat{u}_3(s) = sL_3 \hat{i}_{in2}(s) \quad (35)$$

$$\hat{i}_{in}(s) = \hat{i}_1(s) + \hat{i}_2(s) \quad (36)$$

$$\hat{i}_2(s) = \hat{i}_{in1}(s) + \hat{i}_{in2}(s) \quad (37)$$

$$\hat{i}_{in1}(s) = \hat{i}_3(s) + \hat{i}_{o1}(s) \quad (38)$$

$$\hat{i}_{in2}(s) = \hat{i}_4(s) + \hat{i}_{o2}(s) \quad (39)$$

$$R_2 \hat{i}_{in1}(s) + \hat{u}_2(s) + \hat{u}_{o1}(s) - \hat{u}_{in}(s) = 0 \quad (40)$$

$$R_3 \hat{i}_{in2}(s) + \hat{u}_3(s) + \hat{u}_{o2}(s) - \hat{u}_{in}(s) = 0 \quad (41)$$

Nyt sijoittamalla Laplace-muunnettuihin Kirchhoffin jänniteyhtälöihin (40) ja (41) edellisen alaluvun tavoin muut yhtälöt (31)-(39), ne saadaan helposti muotoon

$$\hat{u}_{o1}(s) = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \hat{u}_{in}(s) - \frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \hat{i}_{o1}(s) \quad (42)$$

$$\hat{u}_{o2}(s) = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \hat{u}_{in}(s) - \frac{L_3 s + R_3}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \hat{i}_{o2}(s) \quad (43)$$

Myös virta \hat{i}_{in} halutaan taas esittää jännitteiden \hat{u}_{o1} ja \hat{u}_{o2} kanssa samojen sisääntulojen $\hat{u}_{in}(s)$, $\hat{i}_{o1}(s)$ ja $\hat{i}_{o2}(s)$ avulla. Sijoitetaan yhtälöön (36) aluksi yhtälö (37), jolloin se tulee muotoon

$$\hat{i}_{in}(s) = \hat{i}_1(s) + \hat{i}_{in1}(s) + \hat{i}_{in2}(s) \quad (44)$$

Tähän saatuun yhtälöön sijoitetaan seuraavaksi yhtälöt (31), (38), ja (39). Sijoitusten jälkeen yhtälö on muodossa

$$\hat{i}_{in}(s) = sC_1 \hat{u}_{in}(s) + \hat{i}_3(s) + \hat{i}_{o1}(s) + \hat{i}_4(s) + \hat{i}_{o2}(s) \quad (45)$$

Nyt saatuun yhtälöön sijoitetaan yhtälöt (32) ja (33), jonka seurauksena yhtälö saadaan muotoon

$$\hat{i}_{in}(s) = sC_1 \hat{u}_{in}(s) + \hat{i}_{o1}(s) + \hat{i}_{o2}(s) + sC_2 \hat{u}_{o1}(s) + sC_3 \hat{u}_{o2}(s) \quad (46)$$

Tämän jälkeen yhtälöön (46) sijoitetaan vielä aiemmin selvitettyt lähtöjännitteiden yhtälöt (42) ja (43), jonka myötä tulovirran yhtälö saadaan lopulliseen muotoonsa

$$\begin{aligned} \hat{i}_{in}(s) = & \left(C_1 s + \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} + \frac{C_3 s}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \right) \hat{u}_{in}(s) \\ & + \left(\frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \right) \hat{i}_{o1}(s) + \left(\frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \right) \hat{i}_{o2}(s) \end{aligned}$$

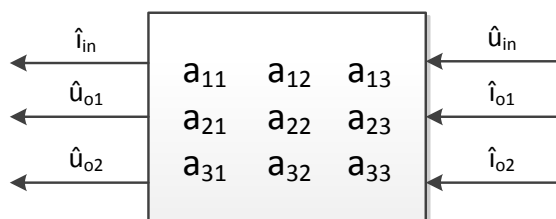
Kootaan jälleen saadut tulokset matriisiin

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in}(s) \\ \hat{u}_{o1}(s) \\ \hat{u}_{o2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1}(s) \\ \hat{i}_{o2}(s) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

missä

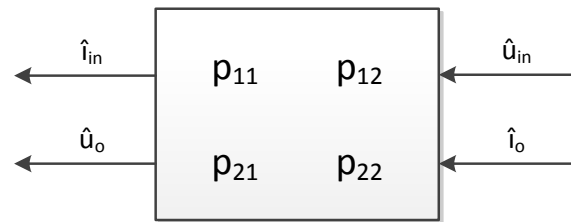
$$\begin{cases} a_{11} = C_1 s + \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} + \frac{C_3 s}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ a_{12} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ a_{13} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ a_{21} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ a_{22} = -\frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ a_{23} = 0 \\ a_{31} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ a_{32} = 0 \\ a_{33} = -\frac{L_3 s + R_3}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \end{cases}$$

Saadut tulokset voidaan esittää myös kuvan 12 tulo-lähtö -lohkomallin avulla.



Kuva 12. Järjestelmän tulo-lähtö -lohkomalli

Kuvan 12 tulo-lähtö -lohkomalli on kuitenkin vielä mahdollista sieventää edellisestä alaluvusta tuttuun, ja kuvassa 13 esitettyyn, muotoon:



Kuva 13. Järjestelmän sievennetty tulo-lähtö -lohkomalli

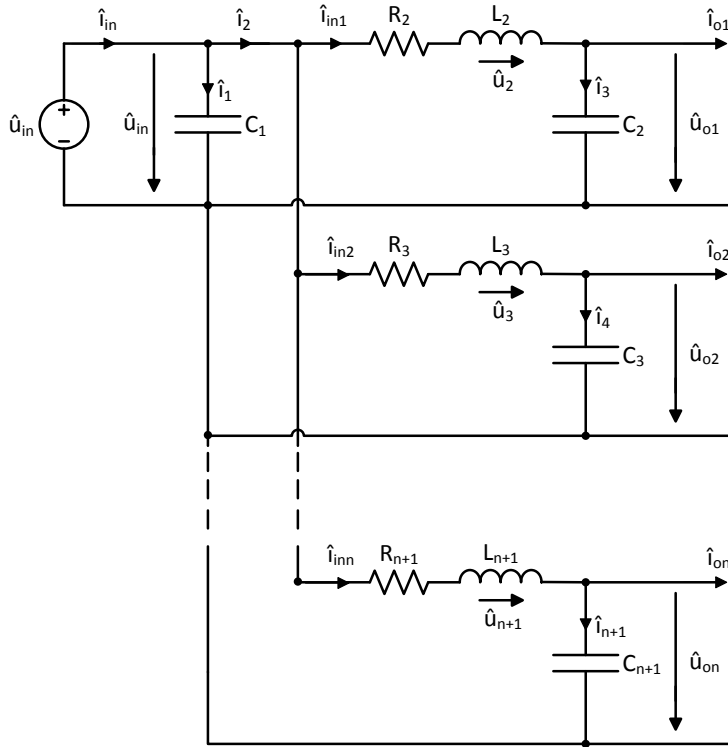
missä

$$\begin{cases} p_{11} = a_{11} \\ p_{12} = [a_{12} & a_{13}] \\ p_{21} = [a_{21} \\ a_{31}] \\ p_{22} = [a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}] \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} \hat{u}_o(s) = \begin{bmatrix} \hat{u}_{o1}(s) \\ \hat{u}_{o2}(s) \end{bmatrix} \\ \hat{i}_o(s) = \begin{bmatrix} \hat{i}_{o1}(s) \\ \hat{i}_{o2}(s) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Tulosten tarkempi tarkastelu osoittaa, että tilanteesta voidaan helposti muodostaa myös yleinen malli koskemaan aina n kappaletta rinnankytkentöjä. Tilannetta on havainnollistettu kuvassa 14.



Kuva 14. Kuva tilanteesta, jossa on n rinnankytkentää

Myös yleinen malli voidaan lopulta saattaa matriisimuotoon

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in}(s) \\ \hat{u}_o(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_o(s) \end{bmatrix} \quad (48)$$

missä

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{11} = C_1 s + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{C_i s}{L_i C_i s^2 + R_i C_i s + 1} \\ p_{12} = \left[\frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \quad \cdots \quad \frac{1}{L_{n+1} C_{n+1} s^2 + R_{n+1} C_{n+1} s + 1} \right] \\ p_{21} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right] \\ p_{22} = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{L_{n+1} s + R_{n+1}}{L_{n+1} C_{n+1} s^2 + R_{n+1} C_{n+1} s + 1} \end{array} \right] \end{array} \right.$$

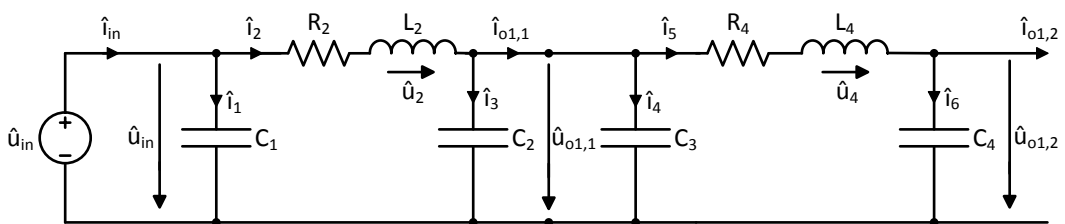
ja

$$\begin{cases} \hat{u}_o(s) = \begin{bmatrix} \hat{u}_{o1}(s) \\ \vdots \\ \hat{u}_{on}(s) \end{bmatrix} \\ \hat{i}_o(s) = \begin{bmatrix} \hat{i}_{o1}(s) \\ \vdots \\ \hat{i}_{on}(s) \end{bmatrix} \end{cases}$$

3.3 Tasavirtaväylän malli ja yhtälöt sarjakytkennässä

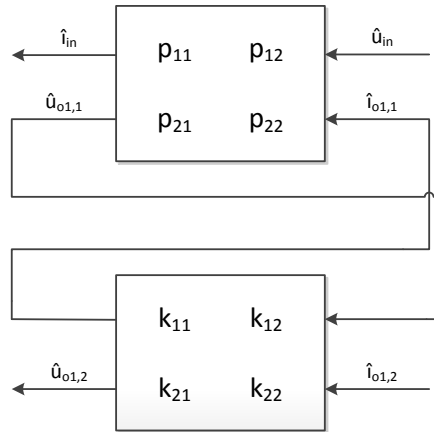
Tässä kohdassa havainnollistetaan, miten kuvan 15 tapainen sarjakytkennän lisääminen vaikuttaa tasavirtaväylän yhtälöihin. Lisäksi tilanteesta muodostetaan Zengerin ja Suntion esityksen mukainen, sarjakytkentää kuvaava, lohkokaaviomalli [1]. Lopuksi sarjakytkennän seurauksena muuttunut tasavirtaväylän rakenne pyritään jälleen esittämään samanlaisena tulo-lähtö -lohkomallin avulla kuin aiemmissa tämän luvun kohdissa laskemalla ensin sarjakytkennän väliyhtälöt ja edelleen niiden avulla tulo-lähtö -yhtälöt.

Kuvassa 15 on esitetty piirikaavio, jossa kaksi piiriä, eli komponenttia, on kytketty yhteen niin sanottuun sarjakytkentään. On syytä mainita, että komponenttien lähtövirtojen \hat{i}_o ja lähtöjännitteiden \hat{u}_o alaindeksien ensimmäinen numero ilmoittaa tästä eteenpäin rinnankytkennän numeron ja jälkimmäinen sarjakytkennän numeron.



Kuva 15. Kaksi komponenttia kytketty sarjaan

Kuvan 15 sarjakytkentää kuvaava lohkokaaviomalli on esitetty kuvassa 16, jossa ylempi lohko esittää alkuperäistä piiriä (kuvassa 15 vasemmalla), ja alempi lohko alkuperäisen piirin kanssa sarjaan kytkettävää piiriä (kuvassa 15 oikealla).



Kuva 16. Kaksi piiriä kytketty sarjaan

Kuvan 16 ylemmälle lohkolle pätee edelleen kohdassa 3.1 johdetut yhtälöt, jotka tässä tapauksessa ovat

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1,1}(s) \end{bmatrix} \quad (49)$$

missä

$$\begin{cases} p_{11} = C_1 s + \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ p_{12} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ p_{21} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ p_{22} = -\frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \end{cases}$$

Seuraavaksi selvitetään alkuperäisen piirin kanssa sarjaan tulevan lohkon yhtälöt. Alkuun pääsee jälleen piirin peruslakien avulla, jolloin virroiksi $\hat{i}_4(t)$ ja $\hat{i}_6(t)$, ja jännitteeksi $\hat{u}_4(t)$ saadaan

$$\hat{i}_4(t) = C_3 \frac{d\hat{u}_{o1,1}(t)}{dt} \quad (50)$$

$$\hat{i}_6(t) = C_4 \frac{d\hat{u}_{o1,2}(t)}{dt} \quad (51)$$

$$\hat{u}_4(t) = L_4 \frac{d\hat{i}_5(t)}{dt} \quad (52)$$

Myös yhtälöt $\hat{i}_{01,1}(t)$ ja $\hat{i}_5(t)$ saadaan määritettyä samoin menetelmin kuin aiemmin, ja tässä tapauksessa ne ovat

$$\hat{i}_{01,1}(t) = \hat{i}_4(t) + \hat{i}_5(t) \quad (53)$$

$$\hat{i}_5(t) = \hat{i}_6(t) + \hat{i}_{01,2}(t) \quad (54)$$

Kirchhoffin jännitelain perusteella saadaan yhtälö

$$R_4 \hat{i}_5(t) + \hat{u}_4(t) + \hat{u}_{01,2}(t) - \hat{u}_{01,1}(t) = 0 \quad (55)$$

Yhtälöiden (50–55) alkuarvot oletetaan jälleen nolliksi, joten niiden Laplace-muunnoksiksi saadaan

$$\hat{i}_4(s) = sC_3 \hat{u}_{01,1}(s) \quad (56)$$

$$\hat{i}_6(s) = sC_4 \hat{u}_{01,2}(s) \quad (57)$$

$$\hat{u}_4(s) = sL_4 \hat{i}_5(s) \quad (58)$$

$$\hat{i}_{01,1}(s) = \hat{i}_4(s) + \hat{i}_5(s) \quad (59)$$

$$\hat{i}_5(s) = \hat{i}_6(s) + \hat{i}_{01,2}(s) \quad (60)$$

$$R_4 \hat{i}_5(s) + \hat{u}_4(s) + \hat{u}_{01,2}(s) - \hat{u}_{01,1}(s) = 0 \quad (61)$$

Sijoitetaan yhtälöön (61) yhtälöt (58) ja (60). Tällöin yhtälö tulee muotoon

$$\hat{u}_{01,2}(s) = \hat{u}_{01,1}(s) - R_4 \hat{i}_6(s) - R_4 \hat{i}_{01,2}(s) - sL_4 \hat{i}_6(s) - sL_4 \hat{i}_{01,2}(s) \quad (62)$$

Seuraavaksi sijoitetaan yhtälöön (62) yhtälö (57), jolloin saadaan

$$(L_4 C_4 s^2 + R_4 C_4 s + 1) \hat{u}_{01,2}(s) = \hat{u}_{01,1}(s) - (L_4 s + R_4) \hat{i}_{01,2}(s) \quad (63)$$

Saatu yhtälö (63) voidaan vielä saattaa helposti muotoon

$$\hat{u}_{01,2}(s) = \frac{1}{L_4 C_4 s^2 + R_4 C_4 s + 1} \hat{u}_{01,1}(s) - \frac{L_4 s + R_4}{L_4 C_4 s^2 + R_4 C_4 s + 1} \hat{i}_{01,2}(s) \quad (64)$$

Selvitetään seuraavaksi sarjaan kytkettävän piirin tulovirran $\hat{i}_{o1,1}$ yhtälö samojen $\hat{u}_{o1,1}(s)$ ja $\hat{i}_{o1,2}(s)$ suhteen kuin $\hat{u}_{o1,2}(s)$ kohdalla. Lähdetään liikkeelle sijoittamalla yhtälöön (59) yhtälö (60). Sijoituksen jälkeen yhtälö on muodossa

$$\hat{i}_{o1,1}(s) = \hat{i}_4(s) + \hat{i}_6(s) + \hat{i}_{o1,2}(s) \quad (65)$$

Tämän jälkeen yhtälöön (65) sijoitetaan vielä yhtälöt (56) ja (57), jolloin saadaan

$$\hat{i}_{o1,1}(s) = sC_3\hat{u}_{o1,1}(s) + sC_4\hat{u}_{o1,2}(s) + \hat{i}_{o1,2}(s) \quad (66)$$

Saatuun yhtälöön sijoitetaan vielä yhtälö (64), jonka myötä virran $\hat{i}_{o1,1}$ lauseke tulee lopulta muotoon

$$\hat{i}_{o1,1}(s) = \left(C_3s + \frac{C_4s}{L_4C_4s^2 + R_4C_4s + 1} \right) \hat{u}_{o1,1}(s) + \frac{1}{L_4C_4s^2 + R_4C_4s + 1} \hat{i}_{o1,2}(s) \quad (67)$$

Kootaan tulokset vielä matriisiin

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{o1,1}(s) \\ \hat{u}_{o1,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{o1,1}(s) \\ \hat{i}_{o1,2}(s) \end{bmatrix} \quad (68)$$

missä

$$\begin{cases} k_{11} = C_3s + \frac{C_4s}{L_4C_4s^2 + R_4C_4s + 1} \\ k_{12} = \frac{1}{L_4C_4s^2 + R_4C_4s + 1} \\ k_{21} = \frac{1}{L_4C_4s^2 + R_4C_4s + 1} \\ k_{22} = -\frac{L_4s + R_4}{L_4C_4s^2 + R_4C_4s + 1} \end{cases}$$

Nyt sarjakytkenän väliyhtälöt voidaan selvittää ratkaistujen lohkojen yhtälöiden (49) ja (68) avulla. Kootaan aluksi lohkojen yhtälöt yhteen.

$$\hat{i}_{in}(s) = p_{11}\hat{u}_{in}(s) + p_{12}\hat{i}_{o1,1}(s) \quad (69)$$

$$\hat{u}_{o1,1}(s) = p_{21}\hat{u}_{in}(s) + p_{22}\hat{i}_{o1,1}(s) \quad (70)$$

$$\hat{i}_{o1,1}(s) = k_{11}\hat{u}_{o1,1}(s) + k_{12}\hat{i}_{o1,2}(s) \quad (71)$$

$$\hat{u}_{o1,2}(s) = k_{21}\hat{u}_{o1,1}(s) + k_{22}\hat{i}_{o1,2}(s) \quad (72)$$

Sijoitetaan yhtälöön (70) ensin yhtälö (71), jolloin saadaan

$$\hat{u}_{o1,1}(s) = p_{21}\hat{u}_{in}(s) + p_{22}k_{11}\hat{u}_{o1,1}(s) + p_{22}k_{12}\hat{i}_{o1,2}(s) \quad (73)$$

Tämä saatu yhtälö voidaan edelleen muokata muotoon

$$\hat{u}_{o1,1}(s) = (I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21}\hat{u}_{in}(s) + p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12}\hat{i}_{o1,2}(s) \quad (74)$$

Samoin yhtälö (70) voidaan sijoittaa yhtälöön (71), jolloin saadaan

$$\hat{i}_{o1,1}(s) = k_{11}p_{21}\hat{u}_{in}(s) + k_{11}p_{22}\hat{i}_{o1,1}(s) + k_{12}\hat{i}_{o1,2}(s) \quad (75)$$

Tämä saatu yhtälö voidaan edelleen muokata muotoon

$$\hat{i}_{o1,1}(s) = k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21}\hat{u}_{in}(s) + (I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12}\hat{i}_{o1,2}(s) \quad (76)$$

Kootaan saadut väliyhtälöt (74) ja (76) vielä matriisiin:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{o1,1}(s) \\ \hat{i}_{o1,1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} & p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \\ k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} & (I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1,2}(s) \end{bmatrix}$$

Selvitetään seuraavaksi sarjakytkennän tulo-lähtö -yhtälöt. Selvitetään ensin tulovirran $\hat{i}_{in}(s)$ yhtälö sijoittamalla yhtälöön (69) yhtälö (76), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \hat{i}_{in}(s) &= p_{11}\hat{u}_{in}(s) + p_{12}k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21}\hat{u}_{in}(s) \\ &\quad + p_{12}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12}\hat{i}_{o1,2}(s) \end{aligned} \quad (77)$$

Sarjakytkennän lähtöjännitteen $\hat{u}_{o1,2}(s)$ yhtälö saadaan vuorostaan sijoittamalla yhtälö (74) yhtälöön (72), jolloin

$$\begin{aligned} \hat{u}_{o1,2}(s) &= k_{21}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21}\hat{u}_{in}(s) \\ &\quad + k_{21}p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12}\hat{i}_{o1,2}(s) + k_{22}\hat{i}_{o1,2}(s) \end{aligned} \quad (78)$$

Kootaan sarjakytkennän tulo-lähtö -yhtälöt (77) ja (78) matriisiin, jolloin saadaan

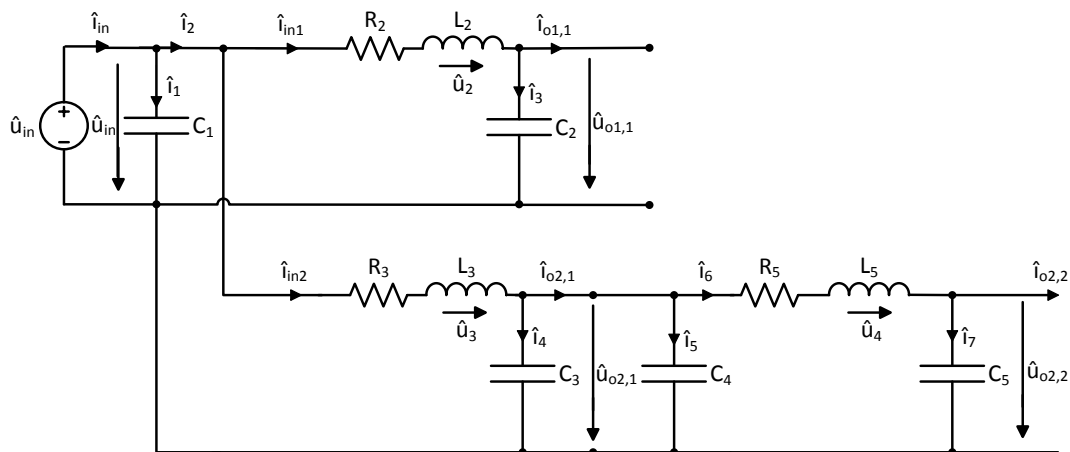
$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in}(s) \\ \hat{u}_{o1,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1,2}(s) \end{bmatrix} \quad (79)$$

missä

$$\begin{cases} p_{11} = p_{11} + p_{12}k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} \\ p_{12} = p_{12}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \\ p_{21} = k_{21}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} \\ p_{22} = k_{21}p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} + k_{22} \end{cases}$$

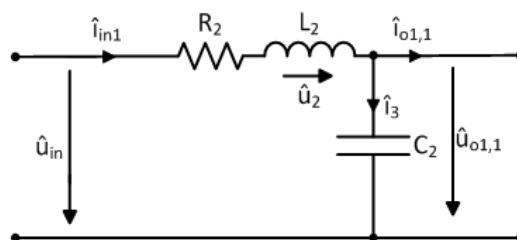
3.4 Rinnan- ja sarjakytkentöjen teorioiden yhdistäminen

Tässä aluvussa havainnollistetaan, että rinnankytkentöjä sisältävään tasavirtaväylään on mahdollista lisätä haluttuihin haaroihin myös komponentteja sarjaan. Luvussa havainnollistetaan tilanne yksinkertaisen esimerkin avulla. Kuvan 17 tapauksessa tasavirtaväylässä on rinnakkain kaksi komponenttia ja sen lisäksi kolmas komponentti sarjassa alemman rinnankytkentäkomponentin kanssa.



Kuva 17. Tilanne, jossa alemmassa rinnankytkennässä on komponentti sarjassa

Tarkastellaan aluksi kuvan 17 järjestelmän ylempää haaraa, joka on esitetty myös kuvassa 18.



Kuva 18. Järjestelmän ylempi haara

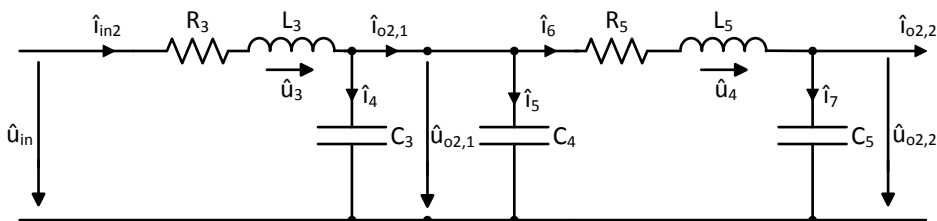
Kohdan 3.1 mukaisesti ylemmän haaran yhtälöt ovat

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in1}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1,1}(s) \end{bmatrix} \quad (80)$$

missä

$$\begin{cases} r_{11} = \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{12} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{21} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{22} = -\frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \end{cases}$$

Tarkastellaan seuraavaksi järjestelmän alemmaa haaraa, joka on esitetty kuvassa 19.



Kuva 19. Järjestelmän alempi haara

Kohdan 3.3 mukaisesti alemman haaran voidaan kuvitella koostuvan kahdesta komponentista, jotka ovat sarjakytkennässä. Merkitään vasemman puolen siirtofunktioita p -termeillä ja oikean puolen siirtofunktioita k -termeillä. Tällöin kohdan 3.3 mukaisesti vasemman puolen yhtälöt ovat

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in2}(s) \\ \hat{u}_{o2,1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o2,1}(s) \end{bmatrix} \quad (81)$$

missä

$$\begin{cases} p_{11} = \frac{C_3 s}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ p_{12} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ p_{21} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ p_{22} = -\frac{L_3 s + R_3}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \end{cases}$$

ja oikean puolen yhtälöt vuorostaan

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{o2,1}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{o2,1}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} \quad (82)$$

missä

$$\begin{cases} k_{11} = C_4 s + \frac{C_5 s}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \\ k_{12} = \frac{1}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \\ k_{21} = \frac{1}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \\ k_{22} = -\frac{L_5 s + R_5}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \end{cases}$$

Nyt sarjakytkennän väliyhtälöt voidaan selvittää kohdan 3.3 tavoin yhtälöiden (81) ja (82) avulla. Sarjakytkennän väliyhtälöiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{o2,1}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} & p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \\ k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} & (I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix}$$

Sarjakytkenän tulo-lähtö -yhtälöt voidaan vuorostaan selvittää väliyhtälöiden avulla. Tulo-lähtö -yhtälöiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in2}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} \quad (83)$$

missä

$$\begin{cases} m_{11} = p_{11} + p_{12}k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} \\ m_{12} = p_{12}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \\ m_{21} = k_{21}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} \\ m_{22} = k_{21}p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} + k_{22} \end{cases}$$

Selvitetään seuraavaksi koko järjestelmän tulovirta $\hat{i}_{in}(s)$. Virran yhtälö on kuvan 17 ja Kirchhoffin virtalain perusteella

$$\hat{i}_{in}(s) = \hat{i}_1(s) + \hat{i}_2(s) \quad (84)$$

Tiedetään myös, että $\hat{i}_2(s) = \hat{i}_{in1}(s) + \hat{i}_{in2}(s)$, joten yhtälö saadaan muotoon

$$\hat{i}_{in}(s) = \hat{i}_1(s) + \hat{i}_{in1}(s) + \hat{i}_{in2}(s) \quad (85)$$

Koska $\hat{i}_{in1}(s)$ ja $\hat{i}_{in2}(s)$ selvitettiin aiemmin ja $\hat{i}_1 = C_1 s \hat{u}_{in}(s)$, yhtälö voidaan muokata vielä muotoon

$$\hat{i}_{in}(s) = C_1 s \hat{u}_{in}(s) + r_{11} \hat{u}_{in}(s) + r_{12} \hat{i}_{o1,1}(s) + m_{11} \hat{u}_{in}(s) + m_{12} \hat{i}_{o2,2}(s)$$

Niinpä koko järjestelmän tulovirran $\hat{i}_{in}(s)$ yhtälöksi lopulta saadaan

$$\hat{i}_{in}(s) = (C_1 s + r_{11} + m_{11}) \hat{u}_{in}(s) + r_{12} \hat{i}_{o1,1}(s) + m_{12} \hat{i}_{o2,2}(s) \quad (86)$$

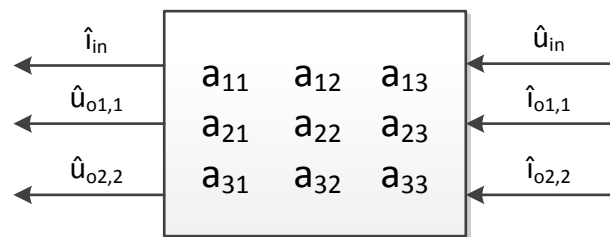
Kootaan vielä saadut tulovirran (86) ja lähtöjännitteiden yhtälöt matriisiin

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1,1}(s) \\ \hat{i}_{o2,2}(s) \end{bmatrix}, \quad (87)$$

missä

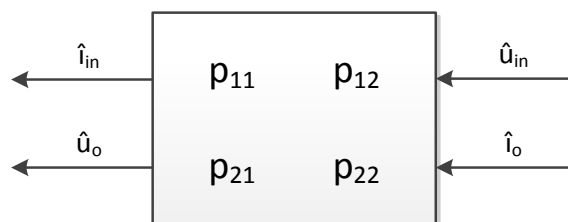
$$\begin{cases} a_{11} = C_1 s + r_{11} + m_{11} = C_1 s + r_{11} + p_{11} + p_{12} k_{11} (I - p_{22} k_{11})^{-1} p_{21} \\ a_{12} = r_{12} \\ a_{13} = m_{12} = p_{12} (I - k_{11} p_{22})^{-1} k_{12} \\ a_{21} = r_{21} \\ a_{22} = r_{22} \\ a_{23} = 0 \\ a_{31} = m_{21} = k_{21} (I - p_{22} k_{11})^{-1} p_{21} \\ a_{32} = 0 \\ a_{33} = m_{22} = k_{21} p_{22} (I - k_{11} p_{22})^{-1} k_{12} + k_{22} \end{cases}$$

Saadut tulokset voidaan esittää kohdan 3.2 tavoin kuvan 20 tulo-lähtö – lohkomallina.



Kuva 20. Järjestelmän tulo-lähtö –lohkomalli.

Kuvan 20 tulo-lähtö –lohkomalli voidaan vielä sieventää kuvassa 21 esitettyyn muotoon:



Kuva 21. Järjestelmän sievennetty tulo-lähtö –malli.

missä

$$\begin{cases} p_{11} = a_{11} \\ p_{12} = [a_{12} \quad a_{13}] \\ p_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \\ p_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \end{cases}$$

ja

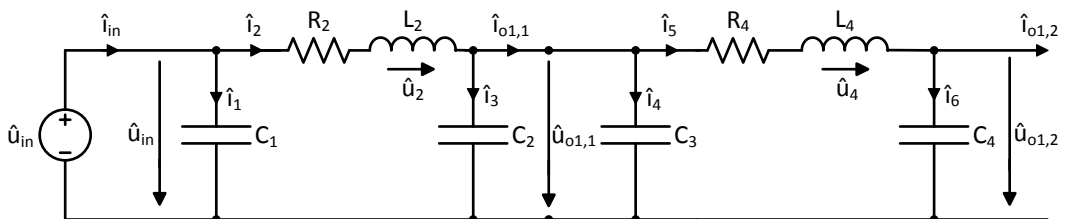
$$\begin{cases} \hat{u}_o(s) = \begin{bmatrix} \hat{u}_{o1,1}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} \\ \hat{i}_o(s) = \begin{bmatrix} \hat{i}_{o1,1}(s) \\ \hat{i}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} \end{cases}$$

4 Järjestelmän stabiilisuus ja suorituskky

Tässä luvussa johdetaan aluksi sarjakytkennän stabiilisuusehto. Sen jälkeen käydään läpi eräs esimerkkijärjestelmä ja tutkitaan sen stabiilisuutta. Lopuksi säädetään vielä esimerkkijärjestelmää PI-säätimellä ja katsotaan millä säätimen parametrien arvoilla järjestelmä on stabiili.

4.1 Sarjakytkennän stabiilisuus

Tässä alaluvussa tarkastellaan sarjakytkennän stabiilisuutta ja johdetaan kohdassa 3.2 läpikäydyllä sarjakytkennälle stabiilisuusehto Zengerin ja Suntion konferenssiartikkelissa [1] esittämien menetelmien pohjalta. Sarjakytkennän piirikaavio on esitetty kuvassa 22.



Kuva 22. Kaksi komponenttia kytketty sarjaan.

Sarjakytkennälle johdettiin aiemmin väliyhtälöt

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{o1,1}(s) \\ \hat{i}_{o1,1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} & p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \\ k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} & (I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1,2}(s) \end{bmatrix}$$

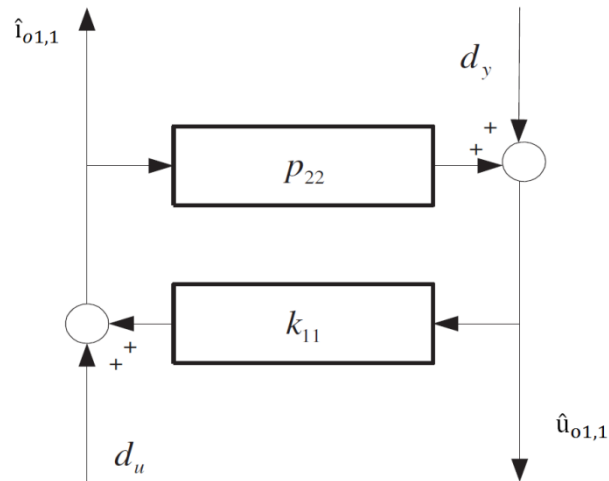
ja tulo-lähtö -yhtälöt

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{in}(s) \\ \hat{u}_{o1,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{in}(s) \\ \hat{i}_{o1,2}(s) \end{bmatrix}$$

missä

$$\begin{cases} p_{11} = p_{11} + p_{12}k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} \\ p_{12} = p_{12}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} \\ p_{21} = k_{21}(I - p_{22}k_{11})^{-1}p_{21} \\ p_{22} = k_{21}p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}k_{12} + k_{22} \end{cases}$$

Sarjakytkennän väliyhtälöiden pohjalta voidaan luoda kuvan 23 malli, jossa $d_y = p_{21}\hat{u}_{in}$ ja $d_u = k_{12}\hat{i}_{o1,2}$. Järjestelmän on oltava sisäisesti stabiili, jotta se toimii oikein. Kuvan 23 topologian, ja sitä kautta väliyhtälöiden avulla voidaan tutkia sarjakytkennän sisäistä stabiilisuutta [43–44]. Järjestelmä on sisäisesti stabiili, jos rajoitetulla syötteellä myös järjestelmän vaste pysyy rajoitettuna. Sisäinen stabiilisuus on tavallista tulo-lähtö -stabiilisuutta (BIBO) tarkempi määrittely, sillä se huomioi myös järjestelmän sisäisten tilojen stabiilisuuden. Sisäinen stabiilisuus on läheistä sukua asymptoottiselle stabiilisuudelle. Erona on, että asymptoottinen stabiilisuus määritetään tilaesityksestä kun taas sisäinen stabiilisuus määritetään siirtofunktioesityksestä.



Kuva 23. Kahden sarjaan kytketyn komponentin sisäinen topologia.

On osoitettu, että tällainen kahden osajärjestelmän sarjakytkentä on sisäisesti stabiili silloin, kun

- Siirtofunktiot p_{21} ja k_{12} ovat stabiileja (ja tällöin signaalit d_y ja d_u ovat myös rajoitettuja)
- Siirtofunktiot

$$\begin{aligned}
 & (I - k_{11}p_{22})^{-1} \\
 & k_{11}(I - p_{22}k_{11})^{-1} \\
 & (I - p_{22}k_{11})^{-1} \\
 & p_{22}(I - k_{11}p_{22})^{-1}
 \end{aligned} \tag{88}$$

ovat stabiileja.

Toisin sanoen järjestelmä on sisäisesti stabiili, jos siirtofunktioissa $k_{11}p_{22}$ ja $p_{22}k_{11}$ ei tapahdu napa-nollasupistuksia ja vähintään yksi yllä esitetystä siirtofunktioista (88) on stabiili. SISO-tapauksessa riittää tarkastella tapahtuuko napa-nollasupistuksia joko siirtofunktioissa $k_{11}p_{22}$ tai siirtofunktioissa $p_{22}k_{11}$, sillä kertolaskun järjestyksellä ei tällöin ole väliä. Kohdassa 2.2 esiteltiin termi impedanssisuhde eli minor loop gain. Sarjaan kytkettyjen komponenttien tapauksessa tämä minor loop gain on juuri yllä mainittu termi $-p_{22}k_{11}$. Jos minor loop gainissa ei tapahdu epästabiileja (oikeassa puolitasossa tapahtuvia) napa-nollasupistuksia, riittää sisäisen stabiilisuuden varmistamiseksi tutkia siis yhtä (88) siirtofunktioista.[1]

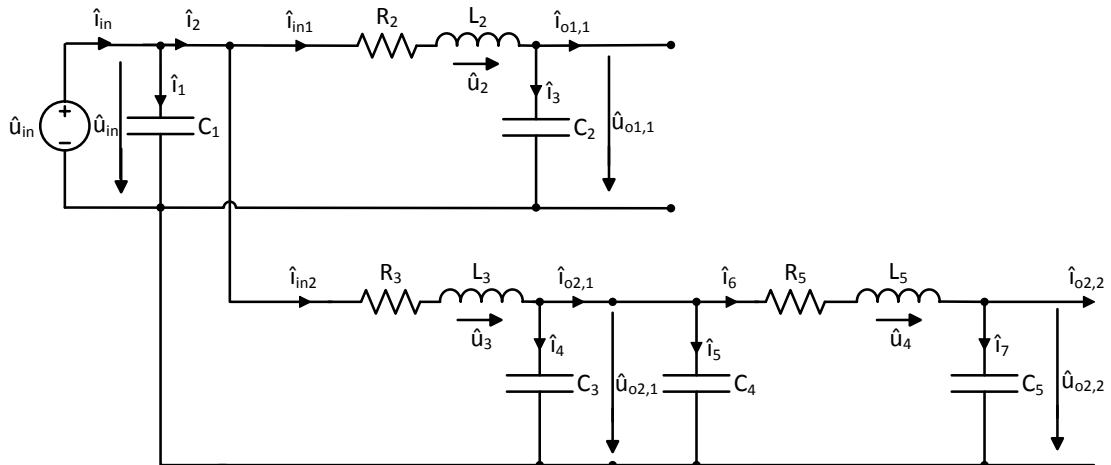
Lisäksi tällainen järjestelmä on BIBO-stabiili, jos se on ensinnäkin sisäisesti stabiili, ja yhtälöiden

$$\begin{cases} \hat{i}_{in}(s) = p_{11}\hat{u}_{in}(s) + p_{12}\hat{i}_{o1,1}(s) \\ \hat{u}_{o1,2}(s) = k_{21}\hat{u}_{o1,1}(s) + k_{22}\hat{i}_{o1,2}(s) \end{cases}$$

siirtofunktiot p_{11} , p_{12} , k_{21} ja k_{22} ovat stabiileja, eli niiden kaikki navat ovat vasemmassa puolitasossa.[1]

4.2 Esimerkkijärjestelmä

Käydään nyt esimerkkijärjestelmän avulla vaiheittain läpi työssä aiemmin esitetyt asiat. Esimerkkinä käytetään jo kohdassa 3.4 esiteltyä tasavirtaväyläjärjestelmää, jossa on kuvan 24 tavoin rinnakkain kaksi komponenttia, ja kolmas komponentti on kytketty sarjaan alemman rinnankytkentäkomponentin kanssa.



Kuva 24. Järjestelmä, jossa alemman rinnankytkentäkomponentin kanssa on kytketty komponentti sarjaan

Järjestelmän komponenttien lukuarvot olkoot

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 360 \mu\text{F}$$

$$L_2 = 3.4 \mu\text{H}$$

$$L_3 = L_5 = 3.7 \mu\text{H}$$

$$R_2 = 3.3 \text{ m}\Omega$$

$$R_3 = R_5 = 3.6 \text{ m}\Omega$$

Kohdan 3.4 mukaan tällaisen esimerkkijärjestelmän tulovirran ja lähtöjännitteiden yhtälöiden matriisi on

$$\begin{bmatrix} \hat{i}_{\text{in}}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{\text{in}}(s) \\ \hat{i}_{o1,1}(s) \\ \hat{i}_{o2,2}(s) \end{bmatrix}, \quad (89)$$

missä

$$\begin{cases} a_{11} = C_1 s + r_{11} + m_{11} = C_1 s + r_{11} + p_{11} + p_{12} k_{11} (I - p_{22} k_{11})^{-1} p_{21} \\ a_{12} = r_{12} \\ a_{13} = m_{12} = p_{12} (I - k_{11} p_{22})^{-1} k_{12} \\ a_{21} = r_{21} \\ a_{22} = r_{22} \\ a_{23} = 0 \\ a_{31} = m_{21} = k_{21} (I - p_{22} k_{11})^{-1} p_{21} \\ a_{32} = 0 \\ a_{33} = m_{22} = k_{21} p_{22} (I - k_{11} p_{22})^{-1} k_{12} + k_{22} \end{cases}$$

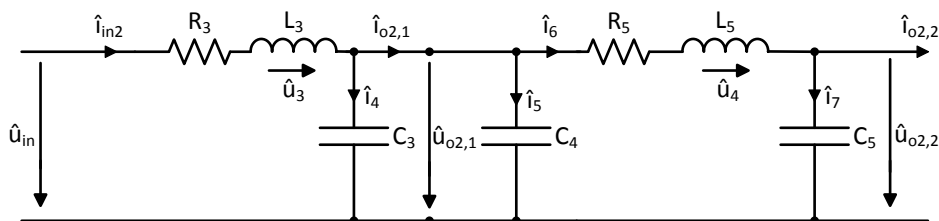
missä

$$\begin{cases} r_{11} = \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{12} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{21} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{22} = -\frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{11} = \frac{C_3 s}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ p_{12} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ p_{21} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \\ p_{22} = -\frac{L_3 s + R_3}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{11} = C_4 s + \frac{C_5 s}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \\ k_{12} = \frac{1}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \\ k_{21} = \frac{1}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \\ k_{22} = -\frac{L_5 s + R_5}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \end{cases}$$

Tehdään esimerkkijärjestelmälle seuraavaksi stabiilisuusanalyysi. Selvitettäessä tällaisen rinnan- ja sarjakytkentöjä sisältävän järjestelmän stabiilisuutta, meidän on varmistettava järjestelmän kunkin haaran stabiilisuus erikseen. Alemman haaran sarjakytkennän kohdalla on tarkastettava sekä sen sisäinen stabiilisuus että BIBO-stabiilisuus. Ylemmän haaran kohdalla tutkitaan pelkästään BIBO-stabiilisuus, sillä haarassa ei ole sarjakytkentöjä. Jos yksikin haara on epästabiili, koko järjestelmä on epästabiili.



Kuva 25. Järjestelmän alempi haara.

Tutkitaan ensin onko kuvassa 25 esitetty järjestelmän alempi haara sisäisesti stabiili kohdassa 4.1 esitettyjen ehtojen mukaisesti. Suoritetaan ensin stabiilisuusanalyysi siirtofunktioille p_{21} ja k_{12} , jotka ovat

$$p_{21} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1}$$

$$k_{12} = \frac{1}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1}$$

Tässä esimerkissä $p_{21} = k_{12}$, sillä $L_3 = L_5$, $C_3 = C_5$, ja $R_3 = R_5$. Komponenttien arvot sijoittamalla selviää, että siirtofunktioilla p_{21} ja k_{12} on kaksi napaa kompleksitason pisteissä

$$\begin{cases} p_1 = -486 + 27396i \\ p_2 = -486 - 27396i \end{cases}$$

Navat sijaitsevat vasemmassa puolitasossa, joten ne ovat tällöin stabiileja. Seuraava vaihe sarjakytkennän sisäisen stabiilisuuden varmistamisessa on analysoida sarjakytkennän impedanssisuhdetta (minor loop gain), joka tässä tapauksessa on

$$-p_{22}k_{11} = \frac{L_3 s + R_3}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1} * \left(C_4 s + \frac{C_5 s}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1} \right)$$

ja voidaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla saattaa edelleen muotoon

$$-p_{22}k_{11} = \frac{s + \frac{R_3}{L_3}}{\left(s + \frac{R_3 C_3 + \sqrt{R_3^2 C_3^2 - 4L_3 C_3}}{2L_3 C_3} \right) \left(s + \frac{R_3 C_3 - \sqrt{R_3^2 C_3^2 - 4L_3 C_3}}{2L_3 C_3} \right)} * \left(s \left(s + \frac{R_5 C_5 C_4 + \sqrt{R_5^2 C_5^2 C_4^2 - 4L_5 C_5 C_4^2 - 4L_5 C_5^2 C_4}}{2L_5 C_5 C_4} \right) \left(s + \frac{R_5 C_5 C_4 - \sqrt{R_5^2 C_5^2 C_4^2 - 4L_5 C_5 C_4^2 - 4L_5 C_5^2 C_4}}{2L_5 C_5 C_4} \right) \right)$$

$$\left(s + \frac{R_5 C_5 + \sqrt{R_5^2 C_5^2 - 4L_5 C_5}}{2L_5 C_5} \right) \left(s + \frac{R_5 C_5 - \sqrt{R_5^2 C_5^2 - 4L_5 C_5}}{2L_5 C_5} \right)$$

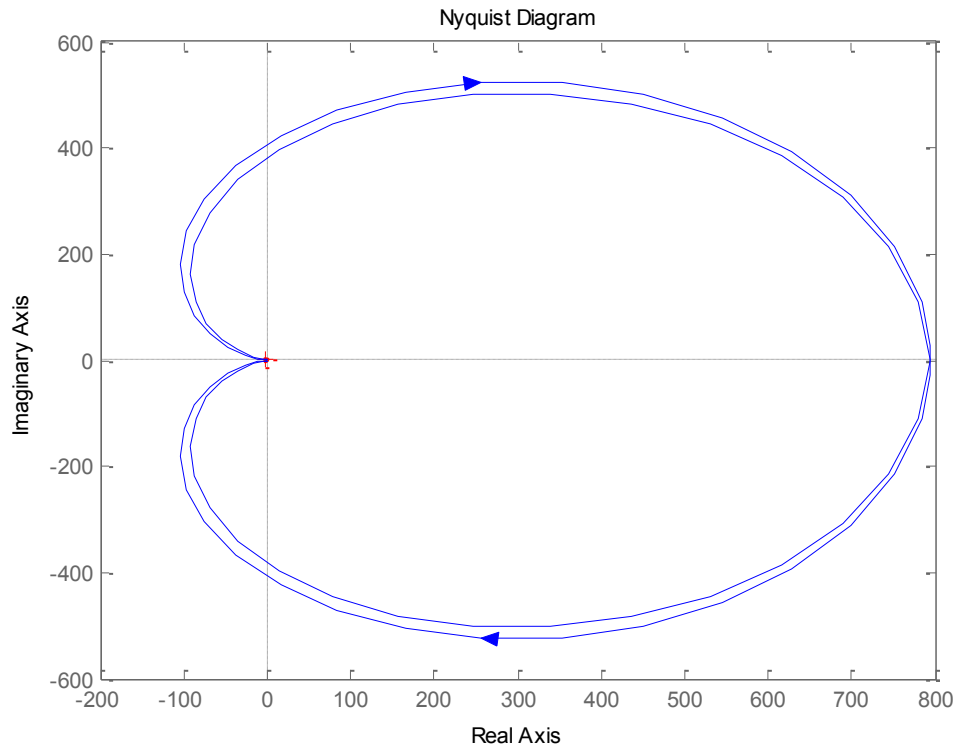
Yhtälöstä nähdään, että minor loop gainilla on neljä napaa ja neljä nollaa. Komponenttien lukuarvot sijoittamalla järjestelmän navoiksi saadaan

$$\begin{cases} p_1 = -486 + 27396i \\ p_2 = -486 - 27396i \\ p_3 = -486 + 27396i \\ p_4 = -486 - 27396i \end{cases}$$

ja nolliksi

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = -486 - 38746i \\ z_3 = -486 + 38746i \\ z_4 = -973 \end{cases}$$

Minor loop gainilla on siis kaksi kaksinkertaista napaa vasemmassa puolitasossa ja täten oikeassa puolitasossa ei tapahdu napa-nollasupistuksia. Minor loop gainin nyquistin diagrammi on esitetty kuvassa 26.



Kuva 26. Minor loop gainin nyquistin diagrammi

Nyquistin diagrammi vielä vahvistaa minor loop gainin stabiilisuuden, sillä nyquistin käyrä ei kierrä kompleksitason pistettä $(-1, 0)$ lainkaan. Koska minor loop gainissa ei tapahtunut napa-nollasupistuksia oikeassa puolitasossa, sisäisen stabiilisuuden varmistamiseksi riittää tällöin tutkia stabiilisuus siirtofunktiosta

$$(I - k_{11}p_{22})^{-1}$$

Komponenttien lukuarvot sijoittamalla siirtofunktion navoiksi saadaan

$$\begin{cases} p_1 = -486 + 35796i \\ p_2 = -486 - 35796i \\ p_3 = -486 + 14821i \\ p_4 = -486 - 14821i \end{cases}$$

ja nolliksi

$$\begin{cases} z_1 = -486 + 27396i \\ z_2 = -486 - 27396i \\ z_3 = -486 + 27396i \\ z_4 = -486 - 27396i \end{cases}$$

Tulosten perusteella voidaan sanoa, että sarjakytkentä on sisäisesti stabiili. Tutkitaan seuraavaksi sarjakytkennän BIBO-stabiilisuutta siirtofunktioiden p_{11} , p_{12} , k_{21} ja k_{22} perusteella. Nämä siirtofunktiot ovat

$$p_{11} = \frac{C_3 s}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1}$$

$$p_{12} = \frac{1}{L_3 C_3 s^2 + R_3 C_3 s + 1}$$

$$k_{21} = \frac{1}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1}$$

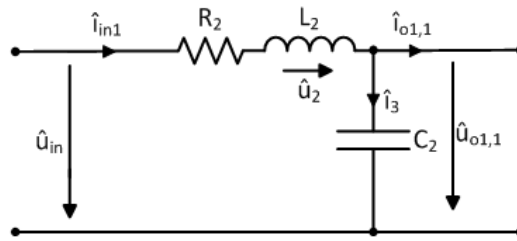
$$k_{22} = -\frac{L_5 s + R_5}{L_5 C_5 s^2 + R_5 C_5 s + 1}$$

Kaikilla siirtofunktiolla on kaksi yhteistä napaa pisteissä

$$\begin{cases} p_1 = -486 + 27396i \\ p_2 = -486 - 27396i \end{cases}$$

Lisäksi siirtofunktiolla p_{11} on yksi nolla pisteessä $(0, 0)$, ja siirtofunktiolla k_{22} on yksi nolla pisteessä $(-973, 0)$. Siirtofunktioissa p_{12} ja k_{21} ei ole nollia. Siirtofunktioiden navat sijaitsevat vasemmassa puolitasossa, joten järjestelmä on tällöin BIBO-stabiili. Alempi haara on siis kokonaisuudessaan stabiili, sillä se on sekä sisäisesti stabiili että BIBO-stabiili.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvassa 27 esitetyn järjestelmän ylemmän haaran BIBO-stabiilisuutta.



Kuva 27. Järjestelmän ylempi haara

Haaran siirtofunktiot ovat

$$\begin{cases} r_{11} = \frac{C_2 s}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{12} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{21} = \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \\ r_{22} = -\frac{L_2 s + R_2}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} \end{cases}$$

Kaikilla neljällä siirtofunktiolla navat ovat pisteissä

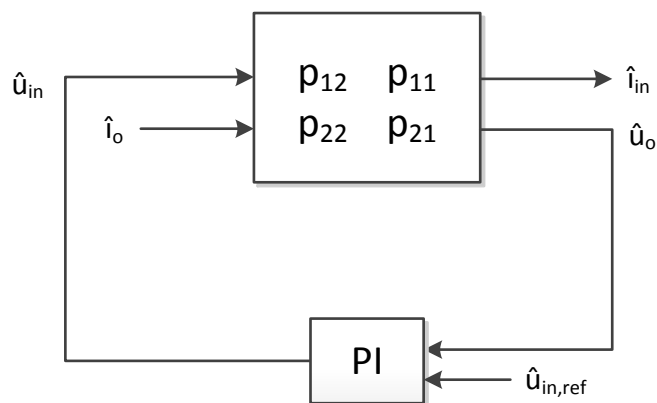
$$\begin{cases} p_1 = -485 + 28579i \\ p_2 = -485 - 28579i \end{cases}$$

Siirtofunktiossa r_{11} on yksi nolla pisteessä $(0, 0)$ ja siirtofunktiossa r_{22} on yksi nolla pisteessä $(-970, 0)$. Siirtofunktioissa r_{12} ja r_{21} ei ole nollia. Siirtofunktioiden navat sijaitsevat vasemmassa puolitasossa, joten ylempi haara on tällöin BIBO-stabiili.

Koska ylempi haara on BIBO-stabiili, ja alempi haara on sekä sisäisesti stabiili että BIBO-stabiili, järjestelmä on stabiili.

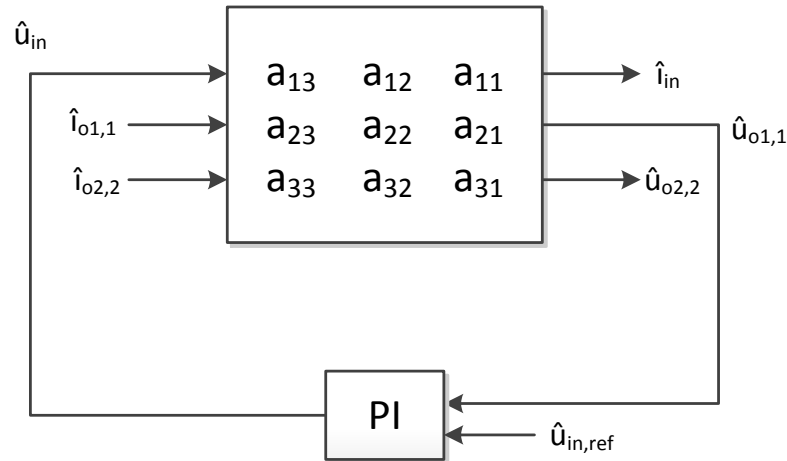
4.3 PI-säädetyin esimerkkijärjestelmän analyysi

Edellisissä kohdissa luotuja järjestelmiä voidaan myös säätää systeemitekniikasta tutuilla säätimillä. Toteutetaan esimerkkinä kohdan 4.2 esimerkkijärjestelmälle jännitemuotoinen ohjaus. Kuvassa 28 on esitetty tällaisen jännitemuotoisen ohjauksen peruseriaate.



Kuva 28. Jännitemuotoisen ohjauksen peruseriaate

Tilanne esimerkkijärjestelmän tapauksessa on esitetty vuorostaan kuvassa 29. PI-säädinlohko ottaa tuloarvoinaan systeemin tulojännitteen ohjearvon $\hat{u}_{in,ref}$ sekä ylemmän rinnankytkentä-komponentin lähtöjännitteen $\hat{u}_{o1,1}$ ja antaa lähtöarvonaan jännitteen \hat{u}_{in} .



Kuva 29. Jännitemuotoinen ohjaus esimerkkijärjestelmän tapauksessa

Kohdassa 4.2 osoitettiin, että esimerkkijärjestelmän yhtälöt ovat

$$\begin{cases} \hat{i}_{in}(s) = a_{11}\hat{u}_{in}(s) + a_{12}\hat{i}_{o1,1}(s) + a_{13}\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) = a_{21}\hat{u}_{in}(s) + a_{22}\hat{i}_{o1,1}(s) + a_{23}\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) = a_{31}\hat{u}_{in}(s) + a_{32}\hat{i}_{o1,1}(s) + a_{33}\hat{i}_{o2,2}(s) \end{cases} \quad (90)$$

Kuvasta 29 nähdään, että takaisinkytkennän yhtälö $\hat{u}_{in}(s)$ on

$$\hat{u}_{in}(s) = PI(\hat{u}_{in,ref}(s), \hat{u}_o(s)) = l_{11}\hat{u}_{in,ref}(s) + l_{12}\hat{u}_{o1,1}(s) \quad (91)$$

missä l_{11} on systeemin tulojännitteen ohjearvoon vaikuttava korjaustermi. Termi l_{12} sisältää vuorostaan PI-säätimen yhtälön, joka on $l_{12} = \frac{k_p s + k_i}{s}$.

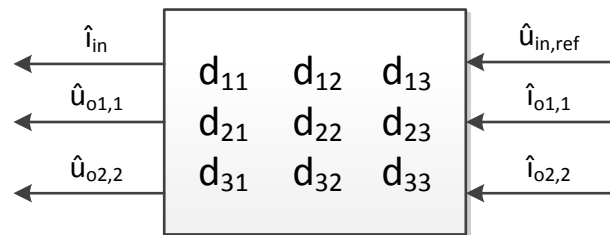
Sijoitetaan seuraavaksi yhtälö (91) kaikkiin esimerkkijärjestelmän yhtälöihin (90). Sijoituksen seurauksena yhtälöt tulevat muotoon

$$\begin{cases} \hat{i}_{in}(s) = a_{11}l_{11}\hat{u}_{in,ref}(s) + a_{11}l_{12}\hat{u}_{o1,1}(s) + a_{12}\hat{i}_{o1,1}(s) + a_{13}\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) = a_{21}l_{11}\hat{u}_{in,ref}(s) + a_{21}l_{12}\hat{u}_{o1,1}(s) + a_{22}\hat{i}_{o1,1}(s) + a_{23}\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) = a_{31}l_{11}\hat{u}_{in,ref}(s) + a_{31}l_{12}\hat{u}_{o1,1}(s) + a_{32}\hat{i}_{o1,1}(s) + a_{33}\hat{i}_{o2,2}(s) \end{cases}$$

Yhtälöitä on helppo muokata vielä lopullisiin muotoihin

$$\begin{cases} \hat{i}_{in}(s) = (a_{11}l_{11} + a_{11}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{21}l_{11})\hat{u}_{in,ref}(s) \\ \quad + (a_{12} + a_{11}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{22})\hat{i}_{o1,1}(s) \\ \quad + (a_{13} + a_{11}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{23})\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) = (I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{21}l_{11}\hat{u}_{in,ref}(s) \\ \quad + (I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{22}\hat{i}_{o1,1}(s) \\ \quad + (I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{23}\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) = (a_{31}l_{11} + a_{31}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{21}l_{11})\hat{u}_{in,ref}(s) \\ \quad + (a_{32} + a_{31}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{22})\hat{i}_{o1,1}(s) \\ \quad + (a_{33} + a_{31}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{23})\hat{i}_{o2,2}(s) \end{cases}$$

Näistä yhtälöistä voidaan jälleen muodostaa kuvassa 30 esitetty tulo-lähtö – lohkomalli.



Kuva 30. PI-säätimellä säädetyn järjestelmän tulo-lähtö –lohkomalli.

Tulo-lähtö –lohkomalli on matriisimuodossa

$$\begin{cases} \hat{i}_{in}(s) = d_{11}\hat{u}_{in,ref}(s) + d_{12}\hat{i}_{o1,1}(s) + d_{13}\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o1,1}(s) = d_{21}\hat{u}_{in,ref}(s) + d_{22}\hat{i}_{o1,1}(s) + d_{23}\hat{i}_{o2,2}(s) \\ \hat{u}_{o2,2}(s) = d_{31}\hat{u}_{in,ref}(s) + d_{32}\hat{i}_{o1,1}(s) + d_{33}\hat{i}_{o2,2}(s) \end{cases} \quad (92)$$

missä

$$\begin{cases} d_{11} = a_{11}(l_{11} + l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{21}l_{11}) \\ d_{12} = a_{12} + a_{11}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{22} \\ d_{13} = a_{13} + a_{11}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{23} \\ d_{21} = (I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{21}l_{11} \\ d_{22} = (I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{22} \\ d_{23} = (I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{23} \\ d_{31} = a_{31}(l_{11} + l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{21}l_{11}) \\ d_{32} = a_{32} + a_{31}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{22} \\ d_{33} = a_{33} + a_{31}l_{12}(I - a_{21}l_{12})^{-1}a_{23} \end{cases}$$

On huomionarvoista, että kussakin PI-säätimen sisältävän järjestelmän yhtälössä (92) esiintyy termi $(I - a_{21}l_{12})^{-1}$, joka muistuttaa hyvin paljon aiemmin sarjakytkennän kohdalla esillä ollutta impedanssisuhdetta (minor loop gain). PI-säätimellä säädetyn järjestelmän stabiilisuuden määrittelyn johtaminen kannattaa aloittaa tästä termistä, joka on

$$(I - a_{21}l_{12})^{-1} = \left(1 - \frac{1}{L_2 C_2 s^2 + R_2 C_2 s + 1} * \left(\frac{k_p s + k_i}{s} \right) \right)^{-1} \quad (93)$$

ja joka voidaan saattaa edelleen helposti muotoon

$$(I - a_{21}l_{12})^{-1} = \frac{L_2 C_2 s^3 + R_2 C_2 s^2 + s}{L_2 C_2 s^3 + R_2 C_2 s^2 + (1 - k_p)s - k_i} \quad (94)$$

Tutkitaan seuraavaksi tarkemmin yhtälön (94) nimittäjää, koska siitä voidaan määrittää stabiilisuusehdot PI-säätimen parametreille k_p ja k_i . Yhtälön nimittäjä on

$$L_2 C_2 s^3 + R_2 C_2 s^2 + (1 - k_p)s - k_i \quad (95)$$

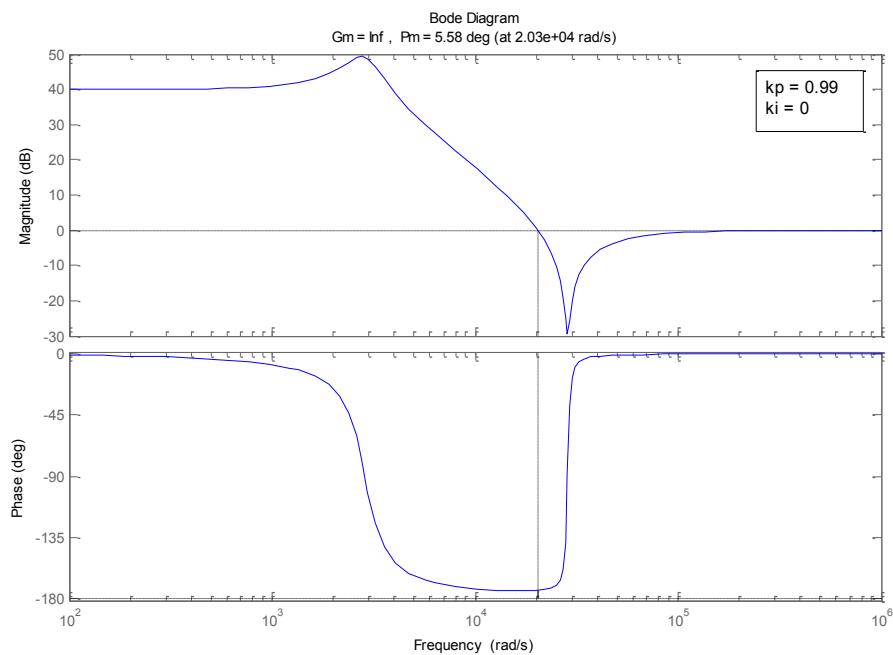
Stabiilisuuden varmistamiseksi yhtälön (94) napojen on sijaittava vasemmassa puolitasossa, eli tällöin yhtälön (95) kaikkien termien on annettava positiivinen lopputulos. Näin tapahtuu silloin, kun

$$\begin{cases} k_p < 1 \\ k_i \leq 0 \end{cases}$$

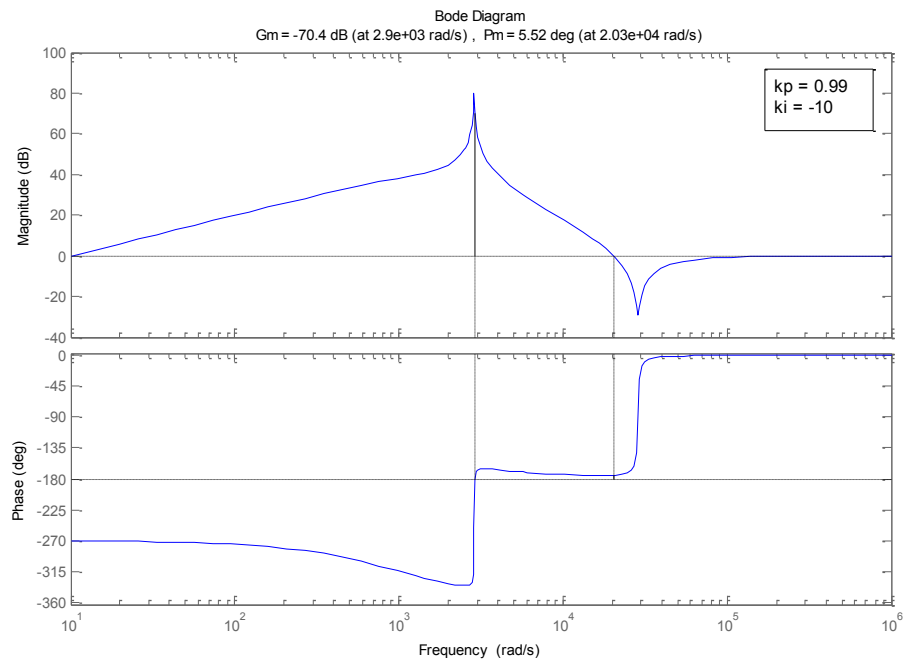
eli termi $(I - a_{21}l_{12})^{-1}$ on kyseisillä parametrien k_p ja k_i arvoilla stabiili.

Simuloimalla järjestelmää erilaisilla stabiilisuusehdot täyttävillä PI-säätimen parametrien k_p ja k_i arvoilla selviää, että stabiilisuuden varmistamiseksi riittää juuri kyseisen termin $(I - a_{21}l_{12})^{-1}$ tarkastelu, sillä myös siirtofunktiot d_{11}, \dots, d_{33} ovat aina stabiileja juuri määritellyillä parametrien k_p ja k_i arvoilla.

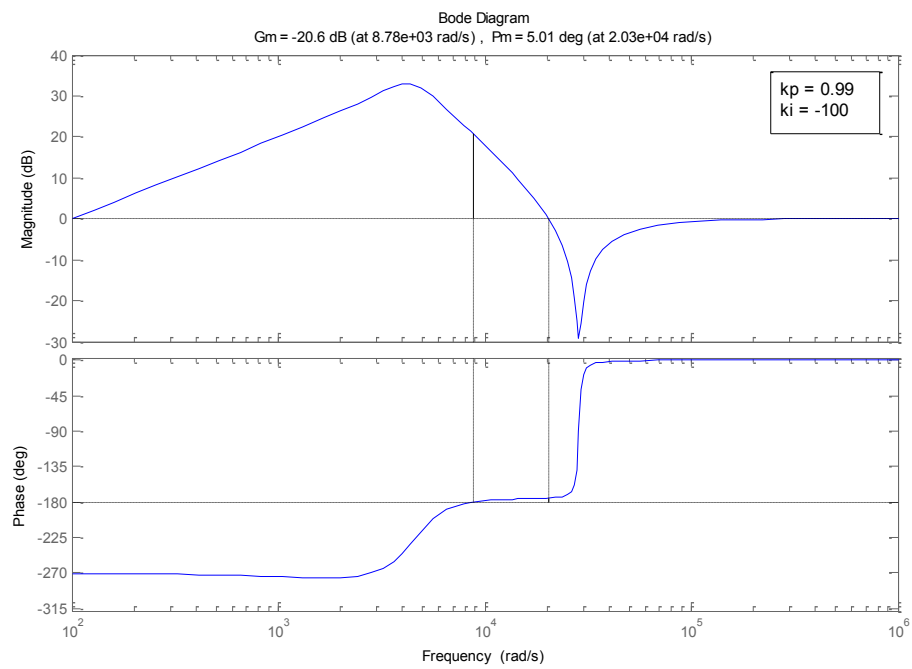
Tarkastellaan lopuksi termin $(I - a_{21}l_{12})^{-1}$ boden diagrammeista vahvistus- ja vaihevaroja muutamilla eri PI-säätimen parametrien k_p ja k_i arvoilla. Saatuja simulointituloksia on esitetty kuvissa 31–36.



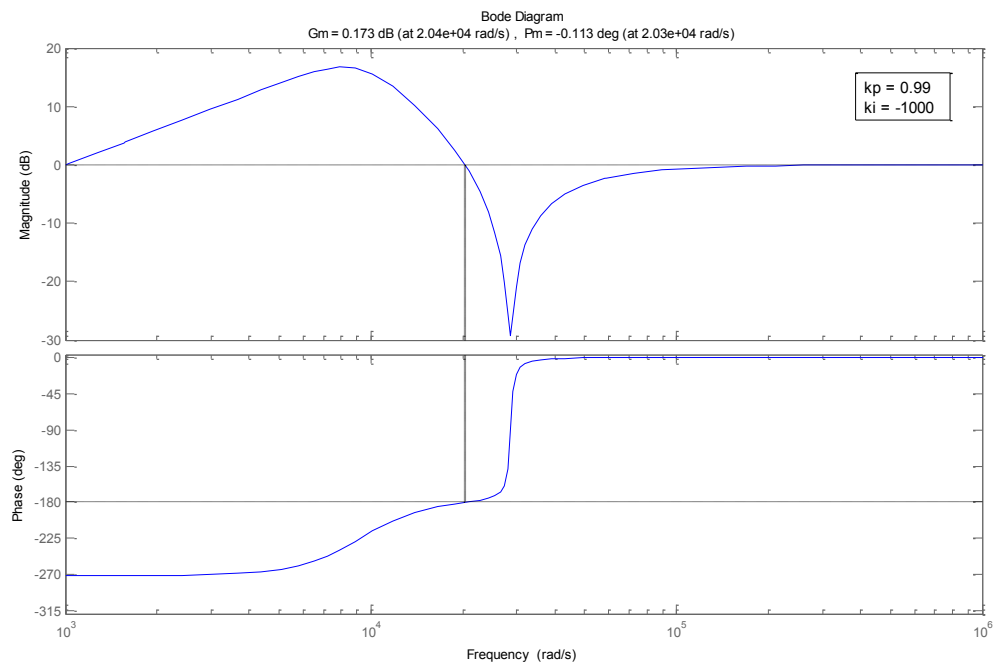
Kuva 31. Boden diagrammi vahvistus- ja vaihevaroilla, kun $k_p = 0.99$ ja $k_i = 0$.



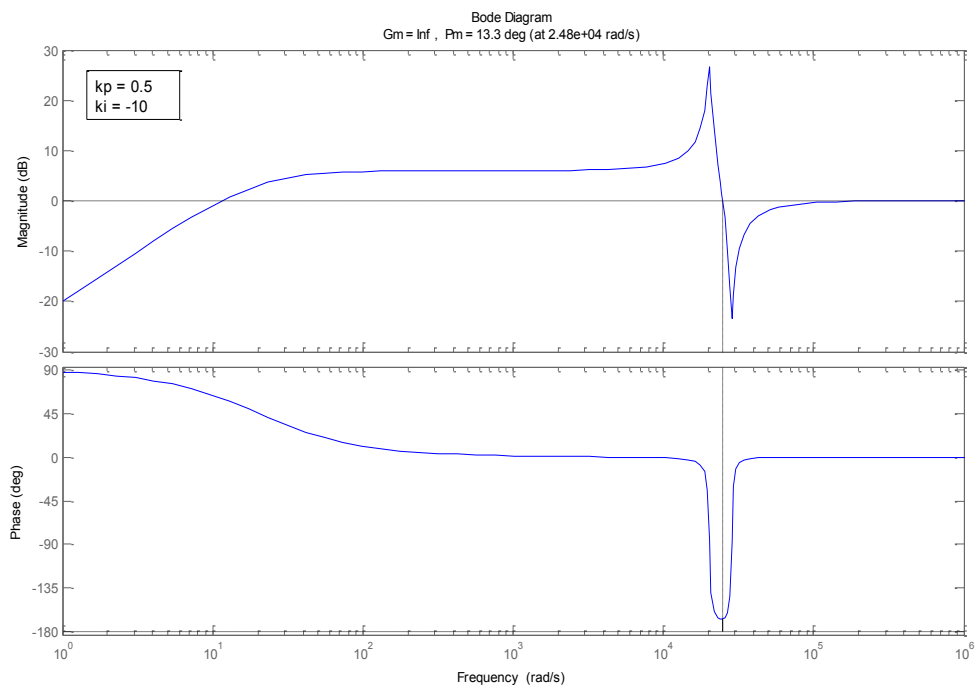
Kuva 32. Boden diagrammi vahvistus- ja vaihevaroilla, kun $k_p = 0.99$ ja $k_i = -10$.



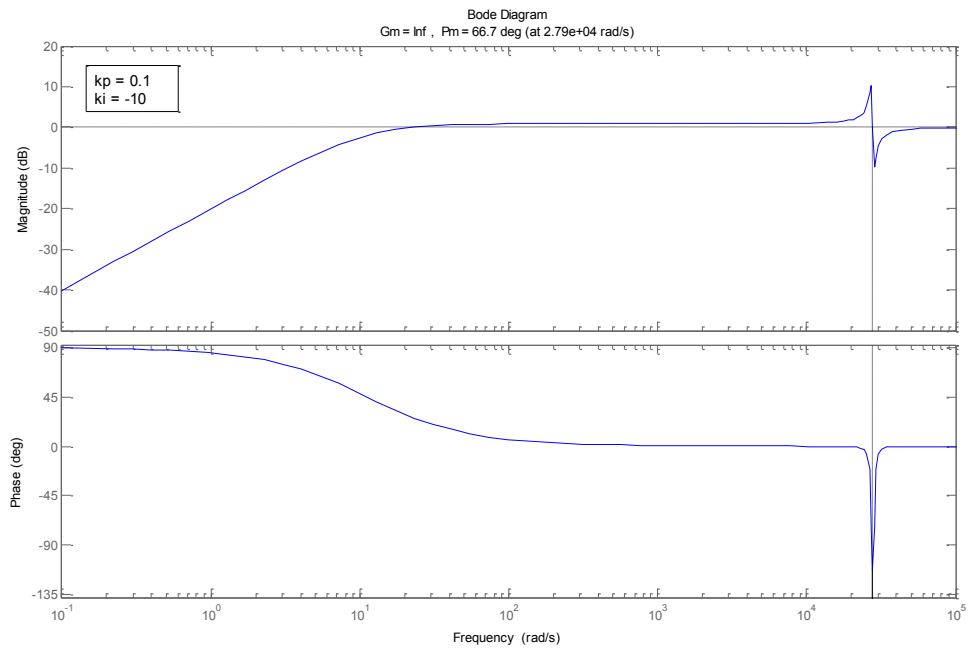
Kuva 33. Boden diagrammi vahvistus- ja vaihevaroilla, kun $k_p = 0.99$ ja $k_i = -100$.



Kuva 34. Boden diagrammi vahvistus- ja vaihevaroilla, kun $k_p = 0.99$ ja $k_i = -1000$.



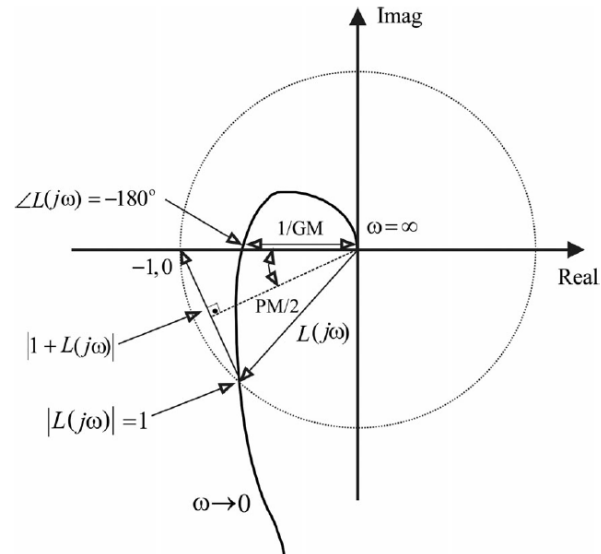
Kuva 35. Boden diagrammi vahvistus- ja vaihevaroilla, kun $k_p = 0.5$ ja $k_i = -10$.



Kuva 36. Boden diagrammi vahvistus- ja vaihevaroilla, kun $k_p = 0.1$ ja $k_i = -10$.

Kuvista 31–36 nähdään, että pienelläkin PI-säätimen k_p ja k_i arvojen muutoksilla on melko suuri vaikutus termin $(I - a_{21}l_{12})^{-1}$ vahvistus- ja vaihevara.

Kuvassa 37 on esitetty graafisesti vahvistus- ja vaihevaran määritelmät. Järjestelmän, joka seuraa huonosti asetustarvoaan kun ohjattavan prosessin parametreissa tapahtuu muutoksia, sanotaan olevan herkkä kyseisen parametrimuutoksille. Järjestelmän herkkyyden arvioimista varten on olemassa herkkyydensfunktio S ja komplementaarinen herkkyydensfunktio T , jotka ovat yhteydessä toisiinsa määritelmän $S(j\omega) + T(j\omega) = I$ kautta.[42]



Kuva 37. Vahvistus- ja vaihevaran määritelmät.[4][37]

Herkkyysfunktio S voidaan ilmaista kaavan $1/(1 + L_{out})$ ja komplementaarinen herkkyysfunktio T kaavan $L_{out}/(1 + L_{out})$ avulla. On huomata, että termillä $(I - a_{21}l_{12})^{-1}$ on hyvin paljon yhteistä herkkyysfunktion S kanssa.

5 Yhteenveto

Tämän diplomityön aiheena olivat kytkettyjen teholähdejärjestelmien dynaamiset mallit. Työn aihe syntyi kahden konferenssiartikkelin pohjalta, jotka käsittelevät yhteen kytkettyjen teholähdejärjestelmien dynaamisia ominaisuuksia ja moniporttisten tasavirtaväylien mallintamista.[1–2] Työn tavoitteena oli laajentaa konferenssiartikkelissa [1] esitettyä teoriaa ja selvittää sen jälkeen miten se toimii tasavirtaväylien ja muiden piirien kanssa.

Luku 1 oli työn johdanto, jossa kerrottiin lyhyesti mitä työ pitää sisällään. Luvussa 2 kerrottiin nykyisin käytettävistä sähköverkoista, sähkönsiirtomenetelmistä ja niiden tulevaisuuden näkymistä. Lisäksi esiteltiin tasavirtaväylän perusidea, ja erilaisia kompleksitason kiellettyihin alueisiin ja Nyquistin stabiilisuuskriteeriin perustuvia stabiilisuuden arviointimenetelmiä.

Luku 3 käsitteli kytkettyjä teholähdejärjestelmiä ja niiden mallintamista. Luvussa lähdettiin liikkeelle yksinkertaisesta tasavirtaväylän tapauksesta, jolloin väylä sisälsi vain yhden haaran eli väylässä oli tällöin vain yksi komponentti. Tämän jälkeen tarkasteltiin miten rinnan- ja sarjakytkentöjen lisääminen vaikutti väylän tulo-lähtö -yhtälöihin. Mielenkiintoista oli havaita, että väylän rakenteen monimutkaistuessa järjestelmän pystyi yhä esittämään yksinkertaisen tulo-lähtö -lohkomallin avulla, jonka sisältämät siirtofunktiot vain tulivat monimutkaisemmiksi piirin monimutkaistumisen myötä. Luvussa muodostettiin myös rinnankytkennän yleinen malli, sekä johdettiin sarjakytkennälle väliyhtälöt. Lisäksi osoitettiin, että rinnan- ja sarjakytkentöjen teoriat on mahdollista yhdistää.

Luvussa 4 johdettiin ensin sarjakytkennälle stabiilisuusehdot, jonka jälkeen käytiin läpi esimerkkijärjestelmä ja tarkasteltiin sen stabiilisuutta. Aivan lopuksi esimerkkijärjestelmää säädettiin vielä PI-säätimellä. Selvisi, että stabiilisuuden määrittämiseksi riittää, kun selvittää millä PI-säätimen parametrien k_p ja k_i arvoilla järjestelmän minor loop gainia muistuttavan osan $(I - a_{21}l_{12})^{-1}$ navat olivat vasemmassa puolitasossa.

Tämän diplomityön alussa ei määritelty tarkkaa työn sisältöä, joten työn tavoitteet päivittyivät työn edetessä täksi kokonaisuudeksi. Koska työn otsikkona olivat kytkettyjen teholähdejärjestelmien dynaamiset mallit, työn painopisteenä ei ollut järjestelmien herkkyysanalyysin tai niiden robustin stabiilisuuden tarkastelu. Työn ydin oli luvussa 3 esitetty uusi teoria, jota täydennettiin luvussa 2 esitetyillä sähkön siirtomenetelmillä ja luvussa 4 esitetyillä sarjakytkennän stabiilisuusehdoilla sekä järjestelmäesimerkillä.

Tässä työssä esitetty aihepiiri on tutkimusalueena melko uusi, ja tieteellistä tutkimusta asian tiimoilta kannattaa tulevaisuudessa ilman muuta jatkaa. Työlle mahdollisia jatkotutkimuskohteita on lukuisia. Erityisesti tarkastelua kaipaa tapaus, jossa tasavirtaväylässä olisi yhden tulovirran ja -jännitteen sijasta useampia tulovirtoja ja -jännitteitä. Lisäksi esitettyjä matriisimuotoja ja tulo-lähtö-lohkomalleja kannattaa soveltaa myös muiden kuin tasavirtaväylien kohdalla. Myös kiellettyihin alueisiin perustuvat impedanssipohjaiset stabiilisuusanalyysit kaipaavat jatkotutkimusta tämän aihepiirin kohdalla.

Viitteet

- [1] K. Zenger, A. Altowati ja T. Suntio, "Dynamic Properties of Interconnected Power Systems – A System Theoretic Approach," *2006 IST IEEE Conference, Industrial Electronics and Applications*, Singapore, 2006.
- [2] M. Liukkonen, M. Hinkkanen, J. Kyyrä, ja S. J. Ovaska, "Modeling of Multiport DC Busses in Power-Electronic Systems," *IEEE International Conference, Industrial Technology (ICIT)*, Cape Town, 2013.
- [3] D. Salomonsson ja A. Sannino, "Low-Voltage DC Distribution System for Commercial Power Systems With Sensitive Electronic Loads," *IEEE Trans. Power Del.* vol. 22, no. 3, pp. 1620-1627, July 2007.
- [4] A. Emadi, A. Khaligh, C. H. Rivetta ja G. A. Williamson, "Constant Power Loads and Negative Impedance Instability in Automotive Systems: Definition, Modeling, Stability and, Control of Power Electronic Converters and Motor Drives," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 55, no. 4, pp. 1112-1125, July 2006.
- [5] M. Liukkonen, A. Lajunen ja J. Suomela, "Comparison of Different Buffering Topologies in FC-hybrid Non-Road Mobile Machineries," *Proc. IEEE VPPC'11*, Chicago, IL, Sept. 2011.
- [6] P. Magne, B. Nahid-Mobarakeh, ja S. Pierfederici, "General Active Global Stabilization of Multiloads DC-power Networks," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 27, no. 4, pp. 1788–1798, Apr. 2012.
- [7] S. D. Sudhoff, S. F. Glover, P. T. Lamm, D. H. Schmucker ja D. E. Delisle, "Admittance space stability analysis of power electronic systems," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 36, pp. 965-973, 2000.
- [8] R. D. Middlebrook, "Input filter considerations in design and applications of switching regulators," *IEEE IAS Proceedings*, pp. 91-107, 1976.
- [9] X. Feng, J. Liu, ja F.C. Lee, "Impedance Specifications for Stable DC Distributed Power Systems," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 17, no. 2, pp. 157-162, Mar. 2002.
- [10] T. Suntio, M. Hankaniemi ja M. Karppanen, "Analysing the Dynamics of Regulated Converters," *IEEE Proc. Electr. Power Appl.*, vol. 153, no. 6, pp. 905-910, Nov. 2006.

- [11] S. D. Sudhoff, K. A. Corzine, S. F. Glover, H. J. Hegner ja H. N. Robey, Jr., "DC link stabilized field oriented control of electric propulsion systems," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 13, no. 1, pp. 27-33. Mar. 1998.
- [12] K. Pietiläinen, L. Harnefors, A. Petersson ja H.-P. Nee, "DC-link Stabilization and Voltage Sag Ride-Through of Inverter Drives," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 53, no. 4, pp. 1261-1268, Aug. 2006.
- [13] M. Hinkkanen, L. Harnefors ja J. Luomi, "Control of Induction Motor Drives Equipped with Small DC-link Capacitance," *Proc. EPE'07*, Aalborg, Denmark, Sept. 2007.
- [14] H. Mosskull, J. Galic ja B. Wahlberg, "Stabilization of Induction Motor Drives with Poorly Damped Input Filters," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 54, no. 5, pp. 2724–2734, Aug. 2007.
- [15] P. Liutanakul, A.-B. Awan, S. Pierfederici, B. Nahid-Mobarakeh ja F. Meibody-Tabar, "Linear Stabilization of a DC bus Supplying a Constant Power Load: a General Design Approach," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 25, no. 2, pp. 475–488, Feb. 2010.
- [16] J. Puukko, T. Messo, L. Nousiainen, J. Huusari ja T. Suntio, "Negative output impedance in three-phase grid-connected renewable energy source inverters based on reduced-order model," *Proc. IET RPG'11*, Edinburgh, UK, Sept. 2011.
- [17] O. Wallmark, S. Lundberg ja M. Bongiorno, "Input Admittance Expressions for Field-Oriented Controlled Salient PMSM Drives," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 27, no. 3, pp. 1514–1520, Mar. 2012.
- [18] Fortum Sähkövahti: Suur-, keski- ja pienjänniteverkko. Saatavissa: <http://www.fortum.com/countries/fi/yksityisasiakkaat/asiakaspalvelu-ja-ohjeet/hairiot-ja-vikailmoitukset/fortum-sahkovahti-palvelu/suur-keski-ja-pienjanniteverkko/pages/default.aspx>
- [19] Tukes Turvatekniikan keskus: Varo ilmajohtaja. Saatavissa: http://www.tukes.fi/Tiedostot/sahko_ja_hissit/esitteet_oppaat/Tukes_Varo_ilmajohtaja.pdf
- [20] A. Sarvaranta, "Älykkäät sähköverkot ja niiden kehitys EU:ssa ja Suomessa," Aalto-yliopisto, Energiatekniikan laitos, Harjoitustyö 2010
- [21] International Electrotechnical Commission: Smart Grid drivers. Saatavissa: <http://www.iec.ch/smartgrid/background/>
- [22] ABB: Energian internet pian todellisuutta. Saatavissa: <http://www.abb.fi/cawp/seitp202/6afcff3a8bdad9f8c12575b0002e65c4.aspx>

- [23] VTT. 2009. Energy visions 2050. WS Bookwell Oy. Porvoo, 2009. ISBN: 978-951-37-5595-9.
- [24] A. Battaglini, J. Lilliestam, A. Haas, ja A. Patt, "Development of SuperSmart Grids for a more efficient utilisation of electricity from renewable sources," *Journal of Cleaner Production*. Vol 17 (2009) 911-918. Doi: 10.1016/j.jclepro.2009.02.006.
- [25] L. Kumpulainen, H. Laaksonen, R. Komulainen, A. Martikainen, M. Lehtonen, P. Heine, A. Silvast, P. Imris, J. Partanen, J. Lassila, T. Kaipia, S. Viljainen, P. Verho, P. Järventausta, K. Kivikko, K. Kauhaniemi, H. Långland, ja H. Saaristo, "VTT:n tiedote: Verkkovisio 2030
- [26] Clarke Energy: District Energy and CHP, December 7, 2012. Saatavissa: <http://www.clarke-energy.com/2012/district-energy-and-chp/>
- [27] Clarke Energy: Cogeneration and CHP. Saatavissa: <http://www.clarke-energy.com/chp-cogeneration/>
- [28] Clarke Energy: GE Jenbacher Gas Engines. Saatavissa: <http://www.clarke-energy.com/gas-engines/>
- [29] S. Sanchez Acevedo, ja M. Molinas, "Power electronics modeling fidelity: Impact on stability estimate of micro-grid systems," *Proc. IEEE Innovative Smart Grid Technol. Asia*, Nov. 2011, pp. 1–8.
- [30] B. Tomoiagă, M. Chindriș, A. Sumper, A. Sudria-Andreu, ja R. Villafafila-Robles, "Pareto Optimal Reconfiguration of Power Distribution Systems Using a Genetic Algorithm Based on NSGA-II," *Energies* 2013, 6, 1439-1455. Saatavissa: <http://www.mdpi.com/1996-1073/6/3/1439/pdf>
- [31] M.H.J. Bollen, Y. Yang, ja F. Hassan, "Integration of Distributed Generation in the Power System – A Power Quality Approach," *Harmonics and Quality of Power, 2008. ICHQP 2008. 13th International Conference*, Wollongong, Uusi Etelä-Wales.
- [32] S. Kim, J. Jeon, C. Cho, J. Ahn ja S. Kwon, "Dynamic Modeling and Control of a Grid-Connected Hybrid Generation System With Versatile Power Transfer," *IEEE Trans. Industrial Electronics*, vol. 55, no. 4, April 2008.
- [33] R. D. Middlebrook, "Design techniques for preventing input-filter oscillations in switched-mode regulators," *Powercon Proceedings*, pp. A3.1-A3.16, 1978.
- [34] J. Liu, X. Feng, F. C. Lee, ja D. Borojevich, "Stability margin monitoring for distributed power systems via perturbation approaches," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 18, no. 6, pp. 1254–1261, Nov. 2003.

- [35] X. Feng, C. Liu, Z. Ye, K. Xing, F.C. Lee ja D. Borojevic, "Monitoring the Stability of DC Distributed Power Systems," *25th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, IECEON '99 Proc.*, San Jose, CA, USA, Nov. 29-Dec. 3, 1999, vol. 1, pp. 367-372.
- [36] J. Leppäaho, J. Huusari, L. Nousiainen, J. Puukko, ja T. Suntio, "Dynamic properties and stability assessment of current-fed converters in photovoltaic applications," *IEEJ Trans. Ind. Appl.*, vol. 131, no. 8, pp. 976–984, Aug. 2011.
- [37] J. Sun, "Impedance-based stability criterion for grid-connected inverters," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 26, no. 11, pp. 3075–3078, Nov. 2011.
- [38] S. Vesti, T. Suntio, J. A. Oliver, R. Prieto, ja J. A. Cobos, "Impedance-Based Stability and Transient-Performance Assessment Applying Maximum Peak Criteria," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 28, no. 5, May 2013.
- [39] X. Feng, Z. Ye, C. Liu, R. Zhang, F.C. Lee ja D. Boroyevich, "Fault Detection in DC Distributed Power Systems Based on Impedance Characteristics of Modules," *IEEE Industry Applications Conference, IAS 2000 Conf. Rec.*, Rome, Italy, Oct. 8-12, 2000, vol. 4, pp. 2455-2462.
- [40] X. Feng, Z. Ye, K. Xing, F. Lee ja D. Borojevic, "Impedance specifications and Impedance Improvement for DC distributed Power system," *Power Electronics Specialists Conference (PESC99)*, vol. 2, pp. 889-894, 1999.
- [41] X. Feng ja F.C. Lee, "On-line Measurement on Stability Margin of DC Distributed Power System," *IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition, APEC 2000 Conf. Rec.*, New Orleans, LA, USA, Feb. 6-10, 2000, vol. 2, pp. 1190-1196.
- [42] C. M. Wildrick, F. C. Lee, B. H. Cho, ja B. Choi, "A method of defining the load impedance specification for a stable distributed power system," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 10, no. 3, pp. 280–285, May 1995.
- [43] S. Skogestad ja I. Postlethwaite, "Multivariable Feedback Control, Analysis and Design," New York: John Wiley & Sons, 1996
- [44] K. Zhou ja J. Doyle, "Essentials of Robust Control," New Jersey: Prentice-Hall, 1998

Liite A: Matlab-koodi

```

%% Alkuperäinen piiri
N = 1;          % Piirissä on aluksi yksi komponentti

% Määritä piirin komponenttien lukuarvot:
C1 = 360e-6;
C2 = 360e-6;
L2 = 3.4e-6;
R2 = 3.3e-3;
%L2 = 3.7e-6;    % L3
%R2 = 3.6e-3;    % R3

% Input-Output -yhtälöt
p11 = tf([C1 0], 1) + tf([C2 0], [L2*C2 R2*C2 1]);
p12 = tf(1, [L2*C2 R2*C2 1]);
p21 = tf(1, [L2*C2 R2*C2 1]);
p22 = tf([-L2 -R2], [L2*C2 R2*C2 1]);

system = [p11 p12; p21 p22];

%% Sarjaankytkennän lisääminen

j = 1;          % Rinnankytkennän numero

% Määritä sarjaan kytkettävän piirin komponenttien lukuarvot:
C4 = 360e-6;
C5 = 360e-6;
L5 = 3.7e-6;
R5 = 3.6e-3;

% Sarjaan tulevan piirin input-output -yhtälöt
k11 = tf([C4 0], 1) + tf([C5 0], [L5*C5 R5*C5 1]);
k12 = tf(1, [L5*C5 R5*C5 1]);
k21 = tf(1, [L5*C5 R5*C5 1]);
k22 = tf([-L5 -R5], [L5*C5 R5*C5 1]);

% Sarjaan kytkettävän piirin Input-Output -yhtälöt
if j <= N % laskut toteutetaan vain jos kyseinen rinnankytkentähaara
on olemassa
    % Uudet Input-Output -yhtälöt

    q11 = p11 + ((p12(1, j)*k11*(eye(1) - (p22(j, j)*k11))^-1) * (p21(j,
1) .'));

    for i = 1:N
        if i < j
            q12(i) = p12(i);
            q21(i) = p21(i, 1);
            q22(i, i) = p22(i, i);
        end
        if i == j
            q12(i) = (p12(1, i) * (eye(1) - (k11*p22(i, i)))^-1) * k12 .';
            q21(i) = (k21 * (eye(1) - (p22(i, i)*k11))^-1) * p21(i, 1) .';
        end
    end
end

```

```

        q22(i, i) = ((k21*p22(i, i)*(eye(1)-(k11*p22(i, i)))^-
1)*k12.') + k22;
    end
    if i>j
        q12(i) = p12(i);
        q21(i) = p21(i, 1);
        q22(i, i) = p22(i, i);
    end
end

p11 = q11;
p12 = q12;
p21 = q21.';
p22 = q22;

else
    'Valitsemaasi haaraa ei ole olemassa'
end

system = [p11 p12; p21 p22];

% Matriisien nollaus
clear k11;
clear k12;
clear k21;
clear k22;
clear q11;
clear q12;
clear q21;
clear q22;

%% Rinnankytkennän lisääminen

N = N + 1;      % Päivittää rinnankytkettyjen komponenttien määrän
j = 1;         % Rinnankytkennän numero

% Rinnankytkettävän piirin komponenttien lukuarvot:
C3 = 360e-6;
L3 = 3.7e-6;
R3 = 3.6e-3;
%L3 = 3.4e-6;   %L2
%R3 = 3.3e-3;   %R2

% Rinnankytkettävän piirin input-output -yhtälöt
r11 = tf([C3 0], [L3*C3 R3*C3 1]);
r12 = tf(1, [L3*C3 R3*C3 1]);
r21 = tf(1, [L3*C3 R3*C3 1]);
r22 = tf([-L3 -R3], [L3*C3 R3*C3 1]);

% Rinnankytkettävän lohkon sulauttaminen päälohkoon

if j <= N % laskut toteutetaan vain jos rinnankytkentöjä on olemassa
tarpeeksi

    p11 = p11+r11;

    if j<N

```

```

for i = 1:N
    if i<j
        q12(i) = p12(i);
        q21(i) = p21(i);
        q22(i, i) = p22(i, i);
    end
    if i==j
        q12(i) = r12;
        q21(i) = r21;
        q22(i, i) = r22;
    end
    if i>j
        q12(i) = p12(i-1);
        q21(i) = p21(i-1);
        q22(i, i) = p22((i-1), (i-1));
    end
end

p12 = q12;
p21 = q21.';
p22 = q22;

end

if j==N

    p12(1, j) = r12;
    p21(j, 1) = r21;
    p22(j, j) = r22;

end

else
    'Valitsit liian suuren haaraan'
end

system = [p11 p12; p21 p22];

% Matriisien nollaus
clear r11;
clear r12;
clear r21;
clear r22;
clear q11;
clear q12;
clear q21;
clear q22;

```

Liite B: Esimerkkijärjestelmän yhtälöt

$$a_{11} =$$

$$\frac{4.922e - 66 s^{15} + 3.351e - 62 s^{14} + 3.401e - 56 s^{13} + 1.981e - 52 s^{12} + 9.521e - 47 s^{11} + 4.613e - 43 s^{10} + 1.416e - 37 s^9 + 5.482e - 34 s^8 + 1.216e - 28 s^7 + 3.529e - 25 s^6 + 6.052e - 20 s^5 + 1.172e - 16 s^4 + 1.621e - 11 s^3 + 1.571e - 08 s^2 + 0.0018 s}{1.367e - 62 s^{14} + 9.309e - 59 s^{13} + 7.303e - 53 s^{12} + 4.25e - 49 s^{11} + 1.631e - 43 s^{10} + 7.894e - 40 s^9 + 1.97e - 34 s^8 + 7.618e - 31 s^7 + 1.383e - 25 s^6 + 4.011e - 22 s^5 + 5.601e - 17 s^4 + 1.083e - 13 s^3 + 1.193e - 08 s^2 + 1.156e - 05 s + 1}$$

$$a_{12} =$$

$$\frac{1}{1.224e - 09 s^2 + 1.188e - 06 s + 1}$$

$$a_{13} =$$

$$\frac{1.774e - 18 s^4 + 3.453e - 15 s^3 + 2.666e - 09 s^2 + 2.592e - 06 s + 1}{6.296e - 36 s^8 + 2.45e - 32 s^7 + 1.894e - 26 s^6 + 5.521e - 23 s^5 + 1.957e - 17 s^4 + 3.8e - 14 s^3 + 8.01e - 09 s^2 + 7.776e - 06 s + 1}$$

$$a_{21} =$$

$$\frac{1}{1.224e - 09 s^2 + 1.188e - 06 s + 1}$$

$$a_{22} =$$

$$\frac{-3.4e - 06 s - 0.0033}{1.224e - 09 s^2 + 1.188e - 06 s + 1}$$

$$a_{23} =$$

$$0$$

$$a_{31} =$$

$$\frac{1.774e - 18 s^4 + 3.453e - 15 s^3 + 2.666e - 09 s^2 + 2.592e - 06 s + 1}{6.296e - 36 s^8 + 2.45e - 32 s^7 + 1.894e - 26 s^6 + 5.521e - 23 s^5 + 1.957e - 17 s^4 + 3.8e - 14 s^3 + 8.01e - 09 s^2 + 7.776e - 06 s + 1}$$

$$a_{32} =$$

$$0$$

$$a_{33} =$$

$$\frac{-3.103e - 50 s^{11} - 1.811e - 46 s^{10} - 1.169e - 40 s^9 - 5.672e - 37 s^8 - 1.76e - 31 s^7 - 6.817e - 28 s^6 - 1.323e - 22 s^5 - 3.839e - 19 s^4 - 4.966e - 14 s^3 - 9.602e - 11 s^2 - 7.447e - 06 s - 0.0072}{1.117e - 53 s^{12} + 6.521e - 50 s^{11} + 5.047e - 44 s^{10} + 2.45e - 40 s^9 + 9.176e - 35 s^8 + 3.557e - 31 s^7 + 8.56e - 26 s^6 + 2.487e - 22 s^5 + 4.282e - 17 s^4 + 8.294e - 14 s^3 + 1.07e - 08 s^2 + 1.037e - 05 s + 1}$$