Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Olli Saari

Lokaalista globaaliin -tuloksia John-Nirenberg-epäyhtälöille

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelmassa.

Espoo, 15.11.2013

Ohjaaja: Prof. Juha Kinnunen
Valvoja: Prof. Juha Kinnunen

Aalto-yliopisto Tiivistelmä
Perustieteiden korkeakoulu
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Tekijä:	Olli Saari
Tutkinto-ohjelma:	Teknillinen fysiikka ja matematiikka
Pääaine:	Matematiikka
Sivuaine:	Mekaniikka
Työn nimi:	Lokaalista globaaliin -tuloksia John-Nirenberg-epäyhtälöille
Title in English:	Local to global results for John-Nirenberg inequalities
Opetusyksikön koodi:	Mat-1
Valvoja:	Prof. Juha Kinnunen
Ohjaaja:	Prof. Juha Kinnunen

BMO-avaruus muodostuu funktioista, joiden keskivärähtely on tasaisesti rajoitettu kaikissa palloissa. Tämä ehto riittää takaamaan eksponentiaalisesti vaimenevan distribuutiofunktion jokaisen pallon suhteen. Työssä laaditaan yhtenäinen esitys olemassa olevista lokaalista globaaliin -tuloksista BMO-avaruudelle tuplaavassa metrisessä mitta-avaruudessa, eli esitetään John-Nirenberg-epäyhtälön todistus, lokaalin ja globaalin normin ekvivalenssi ja riittävä geometrinen ehto, jolla BMO-funktiot ovat eksponentiaalisesti integroituvia. Tämän jälkeen siirrytään analogiseen teoriaan John-Nirenberg-funktioille.

John-Nirenberg-avaruudet ovat BMO-ehtoa heikommilla L^p-tyyppisillä ehdoilla rajoitetussa avoimessa joukossa määriteltyjen integroituvien funktioiden avaruuksia, jotka voidaan upottaa heikkoihin L^p-avaruuksiin kaikissa metrisissä palloissa. Työssä käydään läpi todistus heikon tyypin estimaatille pallossa ja yleistetään tuplaavaan metriseen mitta-avaruuteen lokaalista globaaliin -tuloksia, eli todistetaan globaalin ja lokaalin John-Nirenberg-ehdon yhtäpitävyys sekä näytetään, että upotus heikkoon L^p-avaruuteen on mahdollinen kaikissa Boman-joukoissa.

Päivämäärä: 15.11.2013	Kieli: suomi	Sivumäärä: 56

Avainsanat: rajoitettu värähtely, BMO, John-Nirenberg-epäyhtälö, John-Nirenberg-avaruus, lokaali, globaali, metrinen mitta-avaruus, alue, Bomanin ketju, H-ketju

Aalto University
School of Science
Department of Mathematics and Systems Analysis

Abstract

Author:	Olli Saari
Degree Programme:	Engineering Physics and Mathematics
Major Subject:	Mathematics
Minor Subject:	Mechanics
Title in English:	Local to global results for John-Nirenberg inequalities
Title in Finnish:	Lokaalista globaaliin -tuloksia John-Nirenberg-epäyhtälöille
Chair:	Mat-1
Supervisor:	Prof. Juha Kinnunen
Instructor:	Prof. Juha Kinnunen

The space BMO consists of the functions with uniformly bounded mean oscillation. This condition is sufficient to make the corresponding distribution functions decay exponentially. In this thesis we give an overview of local to global results related to BMO on metric space with doubling measure, i.e. we study a proof of the John-Nirenberg inequality, the equivalence of local and global norms, and a geometric condition that is sufficient to ensure that BMO is exponentially integrable. Then we go on to study analogous theory for John-Nirenberg functions.

John-Nirenberg spaces are defined by L^p type conditions that are slightly weaker than the condition defining BMO. These spaces can be embedded into weak L^p spaces in metric balls. We study the proof of this embedding theorem and generalize local to global results from Euclidean spaces to metric measure spaces, i.e. we prove that local and global defining conditions are equivalent and that the embedding result holds in every Boman set.

Date: 15.11.2013	Language: Finnish	Number of pages: 56

Keywords: bounded mean oscillation, BMO, John-Nirenberg inequality, John-Nirenberg space, local, global, metric measure space, domain, Boman chain, H-chain

Esipuhe

Tämä työ tutkii rajoitetusti värähteleviä funktioita ja niiden John-Nirenberg-estimaatteja metrisen mitta-avaruuden avoimissa joukoissa. Haluan kiittää ohjaajaani professori Juha Kinnusta mielenkiintoisesta aihe-ehdotuksesta sekä korvaamattomasta avusta siihen tutustumisessa. Matematiikan ja systeemianalyysin laitos on tarjonnut erinomaisen ympäristön työskentelyyn, mistä myöskin olen kiitollinen.

Espoossa, 18.9.2013

Olli Saari

Sisältö

1 Johdanto **1**

2 Tuplaava metrinen mitta-avaruus **4**
2.1 Merkinnät 4
2.2 Perustuloksia 5

3 Metristä geometriaa **7**
3.1 H-ketjut ja häviävä ulkokerros 7
3.2 Bomanin ketjut 17
3.3 Ketjut ja geodeettinen avaruus 19

4 BMO-funktiot **25**
4.1 John-Nirenberg-epäyhtälö pallossa 26
4.2 Lokaali ja globaali BMO 32
4.3 Eksponentiaalinen integroituvuus 36

5 John-Nirenberg-avaruus **41**
5.1 Määritelmiä 41
5.2 Lokaalista globaaliin 43
5.2.1 $JN_{p,\tau,M} = JN_{p,\tau}$ 43
5.2.2 $JN_p = JN_{p,\tau,M}$ 46
5.3 John-Nirenberg-epäyhtälö JN_p-avaruudelle 49
5.3.1 Lokaali epäyhtälö pallossa 49
5.3.2 Globaali epäyhtälö Boman-joukossa 55

Luku 1

Johdanto

Tavallisesti funktion integroituvuutta rajoittaa kaksi tekijää. Lokaalisti ongelmaksi voivat muodostua liian terävät singulariteetit, ja globaalisti integroituvuus kaatuu, jos funktion massa on levinnyt liian pahasti avaruuteen. Jos kuitenkin vaaditaan, että tarkastelun kohteena on vain rajoitettu alue, jälkimmäiseen ongelmaan ei tarvitse kiinnittää huomiota. Silloin kaikki on kiinni funktion lokaalista käytöksestä — erityisesti värähtelystä.

Vuonna 1961 John [15] sekä John ja Nirenberg kuuluisassa artikkelissaan "*On functions of bounded mean oscillation*" [16] esittelivät keskivärähtelyltään rajoitettujen funktioiden BMO-avaruuden. Se määritellään vaatimalla, että funktion poikkeama L^1-normissa keskiarvostaan on jokaisessa kuutiossa samaa kokoluokkaa kuin kuution mitta. Tämän toteutuessa arvot eivät voi muuttua liian voimakkaasti pienissä kuutioissa, minkä seurauksena lokaalien singulariteettien voimakkuudelle saatiin yläraja. John-Nirenberg-epäyhtälön mukaan BMO-funktion pahin mahdollinen singulariteetti on logaritminen, mikä johtaa lokaalisti eksponentiaaliseen integroituvuuteen.

Vaikka löydetty funktioavaruus osoittautui ominaisuuksiltaan äärimmäisen hyväksi, se ei silti ole pelkkä harvinainen poikkeustapaus. BMO on Hardyn-avaruuden H^1 duaali, kuva-avaruus Calderón-Zygmund-operaattoreille avaruudesta L^∞ ja monesti oleellisesti rajoitettujen funktioiden korvike operaattoreiden interpoloinnissa (ks. Grafakos [11]). Mainituista ominaisuuksista viimeinen johtaa toisen tutkimuksen kohteena olevan mutta paljon huonommin tunnetun avaruuden pariin. Samassa artikkelissaan [16] John ja Nirenberg esittelivät myös John-Nirenberg-avaruudet, joissa värähtelyä rajoitetaan pikemminkin L^p-tyyppisesti vastakohtana BMO-avaruuden ehdolle, joka riippuu supremumista kaikkien kuutioiden suhteen. Epäsäännöllisyydet eivät välttämättä riko määrittelyehtoa, kunhan ne tapahtuvat tarpeeksi pienissä joukoissa.

Tarkemmin John-Nirenberg-avaruus määritellään luvussa 5, mutta ajatuksen tasolla määrittelevä seminormi on alueen mitta, joka lasketaan summana funktion keskivärähtelyillä painotuista kuutioiden Lebesgue-mitoista. Myöskään tämän avaruuden funktioden singulariteetit eivät voi olla täysin mielivaltaisia, vaan se voidaan upottaa heikkoon L^p-avaruuteen. Aluksi John-Nirenberg-avaruudet kiinnittivät huomion lähinnä perheenä funktioavaruuksia, joiden rajana BMO saadaan, mutta sen ominaisuuksista seuraa esimerkiksi yksinkertainen todistus Stampacchian interpolaatiolauseelle.

Myöhemmin kiinnostuttiin myös BMO- ja John-Nirenberg-avaruuksien suhteesta alueiden geometriaan. On yleisesti mielenkiintoista, että mikäli vaaditaan funktioilta hyvää käytöstä vain kaukana alueen reunasta, niin miten ne käyttäytyvät reunan lähellä. Reimannin ja Rychenerin tulos [20] vuodelta 1975 osoitti, että avaruudelle BMO lokaalit ja globaalit vaatimukset ovat oleellisesti samoja, ja 1990-luvulla Hurri [13] sekä Smith ja Stegenga [21] todistivat, että eksponentiaalinen integroituvuus on globaali ominaisuus Hölder-alueissa. Tarkalleen ottaen tämä ominaisuus karakterisoi Hölder-alueet, mikä liittyy BMO-funktioiden ja kvasihyperbolisen metriikan kiinteään keskinäiseen yhteyteen.

Vaikka Johnin ja Nirenbergin argumentit käyttivät hyväkseen euklidista avaruutta ja erityisesti Calderón-Zygmund-jakoja, määritellyt avaruudet ovat sikäli syvällisiä, että niiden teoria toimii myös metrisessä mitta-avaruudessa. Tämä on valtava harppaus teorian yleisyydessä, sillä siinä missä euklidisella avaruudella on sekä algebrallinen rakenne että paljon topologisia erikoisominaisuuksia, metrisellä avaruudella ei ole lainkaan rakennetta vektoriavaruutena, ja sen topologian määrittelee pelkkä etäisyysfunktio. Tämä vähentää käytettävissä olevia työkaluja, mutta vastavuoroisesti pakottaa huomion kiinnittymään kaikkein oleellisimpiin ilmiöihin ja luo teoriaa, jonka soveltamisella on varsin vähän rajoitteita.

Vaikka euklidisesta BMO-avaruudesta on olemassa selkeitä esityksiä, vastaavien lokaalista globaaliin tulosten teoria metrisessä mitta-avaruudessa on hieman hajallaan eri artikkeleissa. Tämän työn ensimmäisenä tarkoituksena on laatia selkeä esitys, joka kokoaa BMO-avaruuden keskeisimmät tulokset yhteen. Tähän sisältyy, että käytetyt oletukset ovat huolella valikoituja ja pyrkivät mahdollisimman suureen yleisyyteen niin, että todistukset valottavat lauseiden takana piilevää ilmiömaailmaa. Tämän osion lähteinä geometrian osalta on käytetty Buckleyn artikkeleita [5] ja [6]. Asian konstruktiivinen käsittely nojaa Maasalon [17] ja Staplesin [22] töihin, ja näissä esitettyjä ajatuksia on pyritty ilmaisemaan Buckleyn ketjujen avulla.

John-Nirenberg-avaruudesta metrisessä mitta-avaruudessa valmista tietoa on vähemmän. Työn toinen keskeinen tarkoitus on selvittää artikkeleissa [2], [1] ja [14] esitettyjen määritelmien yhteensopivuus, valita toimiva määritelmä ja yleistää sen avulla tuplaavaan metriseen mitta-avaruuteen tähän asti tunnetut tulokset euklidisesta John-Nirenberg-avaruudesta. Metrisessä avaruudessa keskeisin lähde on Berkovitsin ja Martellin käsikirjoitus [2], ja Hurri-Syrjäsen, Marolan ja Vähäkankaan geometriaan liittyvän tuloksen [14] yleistämisessä tärkeimpiä ovat Franchin, Pérezin ja Wheedenin artikkeli [10] sekä Chuan työ [8].

Luku 2

Tuplaava metrinen mitta-avaruus

2.1 Merkinnät

Metrinen mitta-avaruus on kolmikko (X, d, μ), jossa X on epätyhjä joukko; $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ tavanomainen etäisyysfunktio ja μ Borel-mitta. Tämän lisäksi jatkossa oletetaan, että mitta on tuplaava.

Määritelmä 2.1. Olkoon (X, d, μ) metrinen mitta-avaruus. Borelin mitta μ on tuplaava, jos on olemassa sellainen vakio $c_\mu > 0$, että kaikilla $x \in X$ ja $r > 0$ pätee

$$\mu\left(B(x, 2r)\right) \leq c_\mu \mu\left(B(x, r)\right)$$

ja jos se kuvaa kaikki pallot $(r > 0)$ positiivisiksi reaaliluvuiksi.

Kun $B \subset X$ on avoin pallo, sen sädettä merkitään $r(B) = r_B$ ja keskipistettä $z(B) = z_B$. Kirjaimet z ja r on yleensäkin varattu ensisijaisesti pallojen säteille ja keskipisteille: indeksoidun pallokokoelman $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ keskipisteisiin ja säteisiin viitataan ilman eri mainintaa samoilla indekseillä z_i ja r_i. Siis $B_i = B(z_i, r_i) = B(z(B_i), r(B_i))$. Sanalla *rengas* viitatataan aina joukkoon muotoa $B(z, R) \setminus B(z, r)$, jossa $R > r > 0$.

Monesti tarkastellaan jossain joukossa Ω määriteltyjä funktioita. Näissä tilanteissa pallot $B \subset \Omega$ ovat aina palloja avaruuden X suhteen. Tämä ei ilmene merkinnästä täysin yksikäsitteisesti, mutta edellistä sovelletaan johdonmukaisesti läpi koko työn.

Usein johdetaan epäyhtälöitä, jotka pätevät vakiota vaille. Silloin käytetään tavallisesti selkeyden vuoksi merkintää $\lesssim$. Vakion riippuvuudet joko merkitään alaindeksinä $2n \lesssim_n 1$ tai jätetään merkitsemättä. Jälkimmäisessä tapauksessa pidetään selvänä, että riippuvuuksia on korkeintaan niistä vakioista, joita todistettavan väitteen muotoilu sallii käytettävän. Lisäksi vakiot $C(c_\mu, p)$ voidaan jättää myös väitteiden muotoiluissa mainitsematta.

Funktion $u \in L^1_{loc}(X)$ integraalikeskiarvoa joukossa B merkitään

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B u \mathrm{d}\mu = \fint_B u \mathrm{d}\mu = u_B$$

riippuen siitä, mikä tapa milloinkin on selkein. Jatkossa käytetään ilman eri mainintaa näitä merkintöjä ja oletusta, että työskennellään tuplaavassa metrisessä mitta-avaruudessa (X, d, μ).

2.2 Perustuloksia

Tässä osiossa kerrataan nopeasti joitakin perustuloksia. Todistuksia ei esitetä, vaan ne löytyvät viitteistä. Kaikkein tavallisimmat määritelmät ja väittämät kuten L^p- ja $L^{p,\infty}$-avaruudet, suppenemislauseet sekä Hölderin epäyhtälö oletetaan tunnetuiksi.

Seuraava perustavanlaatuinen peitetulos on yleisesti tunnettu euklidisissa avruuksissa, ja se pätee myös metrisissä avaruuksissa. Todistus on esimerkiksi kirjassa [12].

Lemma 2.2. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus ja $\mathcal{F}$ kokoelma palloja, joiden säteillä on yhteinen yläraja. Oletetaan lisäksi, että $\Omega = \cup_{B \in \mathcal{F}} B$ on rajoitettu. Silloin on olemassa numeroituva osakokoelma $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ siten, että kun $B_1 \neq B_2$ ja $B_1, B_2 \in \mathcal{G}$, niin*

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \quad \textit{ja} \quad \Omega \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B.$$

Lisäksi jokainen $B \in \mathcal{F}$ sisältyy kokonaan ainakin yhteen $5B'$, jossa $B' \in \mathcal{G}$.

Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ dimensiota n vastaa löyhästi tuplaavan metrisen mitta-avaruuden tuplaavuusdimensio D. Sen määritelmä ja olemassaolo todistuksineen käsitellään esimerkiksi A. ja J. Björnin kirjassa [3].

Lemma 2.3 (Tuplaavuusdimensio)**.** *Olkoon (X, d, μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus. Silloin on olemassa $D > 0$ siten, että jos $R > r > 0$ ja $x \in \overline{B}(y, R)$, niin*

$$\left(\frac{r}{R}\right)^D \leq c_\mu^2 \frac{\mu(\overline{B}(x,r))}{\mu(\overline{B}(y,R))}.$$

Mikäli X on yhtenäinen, on olemassa $d > 0$ siten, että

$$\left(\frac{R}{r}\right)^d \lesssim_{c_\mu} \frac{\mu(\overline{B}(y,R))}{\mu(B(x,r))}.$$

Lebesguen differentioituvuuslausetta käytetään pisteittäisen informaation muodostamiseen erilaisista usein integraalikeskiarvoihin liittyvistä estimaateista. Se yleistyy euklidisista avaruuksista metrisiin. Todistus on jälleen kirjassa [12].

Lause 2.4 (Lebesgue)**.** *Olkoon u lokaalisti integroituva epänegatiivinen funktio tuplaavassa metrisessä mitta-avaruudessa (X, d, μ). Silloin*

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} f \mathrm{d}\mu = f(x)$$

μ-melkein kaikilla $x \in X$.

Funktioon f liittyvää kuvausta $\lambda \mapsto \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$ kutsutaan sen *distribuutiofunktioksi*. Sitä käytetään funktion integraalien luonnehtimiseen Cavalierin periaatteen avulla. Seuraavan lemman helppo todistus on kirjassa [11].

Lemma 2.5 (Cavalierin periaate)**.** *Olkoon f mitallinen ja $1 \leq p < \infty$. Silloin*

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Lokaalisti integroituvan f epäkeskinen Hardy-Littlewood-maksimaalifunktio määritellään

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \fint_B f \mathrm{d}\mu.$$

Se on heikon tyypin $(1, 1)$ ja vahvan tyypin (p, p) operaattori. Kootaan tämä seuraavaan lauseeseen. Todistus on kirjassa [12].

Lause 2.6. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus ja $p > 1$. Silloin Hardy-Littlewood-maksimaalioperaattori on rajoitettu ja*

$$\|M\|_{L^p(X) \to L^p(X)} \lesssim_{c_\mu} \frac{p}{p-1}.$$

Riippuvuus parametrista p ei ole paras mahdollinen.

Luku 3

Metristä geometriaa

Tässä luvussa käsitellään tuplaavan metrisen mitta-avaruuden geometriaa. Tarkemmin esitellään kaksi tärkeää ketjuehtoa, joiden avulla määritellään H-ketjujoukot ja Boman-joukot. Euklidisessa avaruudessa alueita on luontevaa karakterisoida kvasihyperbolisen metriikan tai jonkin muun polkuihin liittyvän ominaisuuden avulla, josta voidaan sitten osoittaa seuraavan jonkin ketjuehdon. Metrisessä mitta-avaruudessa polkuyhtenäisyys ei kuitenkaan ole samalla tavalla avaruuden luontainen ominaisuus kuin euklidisissa avaruuksissa, joten on selkeämpää määritellä asiat suoraan ketjuehtojen avulla.

Usein avaruudelle halutaan enemmän säännöllisyyttä kuin pelkkä mitan tuplaavuus. Tähän päästään esimerkiksi vaatimalla *geodeettisuutta* tai vaatimalla metristen pallojen kuuluvaan johonkin ketjujoukkoluokkaan. Geodeettisuudella tiukimmillaan tarkoitetaan, että pisteiden välinen etäisyys on lyhyimmän niitä yhdistävän polun pituus. Vaikka monissa käytännön tilanteissa avaruus todella on geodeettinen, todistusten argumentit käyttävät sitä vain erilaisten ketjujen rakentamiseen. Siksi ketjujoukkojen määrittelyn jälkeen käsitellään ketjuehtojen ja geodeettisuuden suhteet toisiinsa, minkä jälkeen geodeettisuuteen ei enää palata.

3.1 H-ketjut ja häviävä ulkokerros

Euklidisessa avaruudessa Lebesguen mitalla on ominaisuus, että mikäli pallon sisältä poistetaan pienempi samankeskinen pallo, syntyneen renkaan mitta on hallitulla tavalla pienempi kuin alkuperäisen pallon. Tarkemmin sanottuna jos $0 < \delta < 1/2$, niin on olemassa $c, \alpha > 0$ siten, että

$$|B(z,r) \setminus B(z,(1-\delta)r)| \leq c\delta^{\alpha}|B(z,r)|. \tag{3.1}$$

Vastaava ominaisuus ei seuraa metrisessä avaruudessa pelkästä mitan tuplaavuudesta, mutta esimerkiksi geodeettisuus on riittävä ehto sille. Toisaalta samankaltainen ominaisuus voidaan todistaa luokalle joukkoja, jotka toteuttavat edempänä annettavan H-ketjuehdon. Silloin korvataan joukko $B(z,r) \setminus B(z,(1-\delta)r)$ joukon $\Omega \subset X$ *ulkokerroksella*

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x, X \setminus \Omega) < \delta\}.$$

Kaikki tässä osiossa esitettävät määritelmät ja tulokset ovat peräisin Buckleyn artikkelista [6].

Määritelmä 3.1. Joukolla $\Omega \subset X$ on *häviävä ulkokerros*, jos on olemassa $\alpha > 0$ ja $C \simeq_{c_\mu,\Omega} 1$ siten, että jokaiselle $\delta > 0$

$$\mu\left(\Omega_\delta\right) \leq C\delta^\alpha \mu\left(\Omega\right).$$

Koska $B_\delta \subset B(z,r) \setminus B(z,(1-\delta)r)$, häviävä ulkokerros palloilla on lähtökohtaisesti yhtälössä (3.1) esitettyä heikompi ominaisuus. Geodeettisessa avaruudessa se on kuitenkin täysin sama.

Seuraavaksi määritellään H-ketjuttuva joukko ja todistetaan, että sillä on häviävä ulkokerros. H-ketjujoukkojen tarkoitus on ottaa euklidisten Hölder-alueiden paikka metrisissä mitta-avaruuksissa. Ketjuehto vaatii, että jokainen pallo voidaan yhdistää joukon keskukseen toisiaan leikkaavien pallojen ketjulla, jonka pituudelle tunnetaan suhteellisen tiukka yläraja ja jonka pallot sisältyvät joukkoon. Lisäksi peräkkäisten pallojen säteet eivät saa muuttua liikaa.

Määritelmä 3.2 (H-ketju)**.** Joukko Ω on H-ketjuttuva, jos on olemassa reaaliset vakiot $J > 1$ ja $K, L \geq 1$ sekä keskuspallo $B^* = B(z_*, r_*) \subset \Omega$ siten, että jokaiselle pallolle B, jolla $LB \subset \Omega$, on seuraavanlainen palloista muodostuva ketju $B_i = B(z_i, r_i)$, $0 \leq i \leq k$:

i. $(z_0, r_0) = (x, r)$ ja $(z_k, r_k) = (z_*, r_*)$.

ii. Kun $0 \leq i < k$, niin $\frac{1}{J} \leq \frac{r_i}{r_{i+1}} \leq J$ ja on olemassa pallo $B(z_i', r_i') \subset B_i \cap B_{i+1}$ siten, että $r_i' = \frac{r_i + r_{i+1}}{2J}$.

iii. $B(z_i, Lr_i) \subset \Omega$ kaikilla $0 \leq i \leq k$ ja

$$k \leq K \log_2 \frac{2r_*}{r}.$$

Ketjun sanotaan olevan minimaalinen, jos samalle pallolle ei ole olemassa H-ketjua, jossa olisi aidosti vähemmän palloja. Pallon minimaalisen pituista H-ketjua merkitään $H(B(x,r)) = \{B_i\}_{i=0}^k$. Jatkossa myös kaksi pistettä x ja y toisiinsa yhdistävää ketjua, jolla on ominaisuudet (i)-(iii) poislukien pituusrajoitus, sanotaan pisteet x ja y yhdistäväksi H-ketjuksi.

Aina jatkossa H-ketjujen yhteydessä esiintyvä nelikko (J, K, L, B^*) tarkoittaa määritelmän 3.2 parametreja. Seuraavaksi todistetaan kaksi lyhyttä lemmaa, joita tarvitaan häviävän ulkokerroksen ominaisuuden todistamiseen. Jälkimmäinen lemma esiintyy todistuksineen myös lähteissä [22], [8] ja [4].

Lemma 3.3. *Olkoon Ω H-ketjuttuva. Jos $\{B_i\}_{i=0}^k$ on minimaalinen H-ketju, niin silloin $\{B_i\}_{i=j}^k$ on pallon B_j minimaalinen H-ketju ja*

$$\#H(B_j) \leq K \log_2 \left(\frac{4Kr_*}{\sum_{i=0}^{j} r_i} \right).$$

Todistus. Minimaalisuus on selvää. Jos pallolla B_j olisi lyhyempi H-ketju, niin liittämällä tämä alkuperäiseen saataisiin lyhyempi H-ketju pallolle B_0 vastoin minimaalisuusoletusta. Ketjunpituuden ylärajasta 3.2 (iii) seuraa kaikille $0 \leq i \leq k$

$$k - i = \#H(B_i) \leq K \log_2 \left(\frac{2r_*}{r_i} \right) \quad \text{eli} \quad r_i \leq 2r_* \cdot 2^{-\frac{k-i}{K}}.$$

Siis

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j} r_i &\leq 2r_* \cdot 2^{-k/K} \sum_{i=0}^{j} 2^{i/K} \\ &= 2r_* \cdot 2^{-k/K} \frac{2^{(j+1)/K} - 1}{2^{1/K} - 1} \\ &\leq 2r_* \cdot 2^{-k/K} \frac{2^{j/K}}{1 - 2^{-1/K}} \\ &\leq 4Kr_* \cdot 2^{-\frac{k-j}{K}}, \end{aligned}$$

mistä saadaan

$$\#H(B_j) = k - j \leq K \log_2 \left(\frac{4Kr_*}{\sum_{i=0}^{j} r_i} \right).$$

□

Lemma 3.4. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus, $\mathcal{F}$ kokoelma palloja, $a_B > 0$ sen mukaan indeksoitu perhe postitiivisia lukuja, $t > 0$ ja $p \geq 1$. Silloin on olemassa vain tuplaavuusvakiosta ja luvusta t riippuva $C > 0$ siten, että*

$$\| \sum_{B \in \mathcal{F}} a_B \chi_{tB} \|_p \leq pC \| \sum_{B \in \mathcal{F}} a_B \chi_B \|_p.$$

Todistus. Olkoon $p' = \frac{p}{p-1}$ ja $f \in L^{p'}(X)$. Merkitään Hardy-Littlewood-maksimaalioperaattoria M. Nyt käyttäen maksimaalifunktion määritelmää, monotonisen suppenemisen lausetta ja Hölderin epäyhtälöä saadaan

$$\begin{aligned}
\left| \int_X f(x) \left(\sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \chi_{tB}(x) \right) \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \frac{\mu(tB)}{\mu(B)} \left(\mu(B) \fint_{tB} f(x)\mathrm{d}\mu \right) \right| \\
&\lesssim \left| \sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \int_B Mf(x)\mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \int_X \left| Mf(x) \sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \chi_B(x) \right| \mathrm{d}\mu \\
&\leq \| \sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \chi_B \|_p \| Mf \|_{p'}.
\end{aligned}$$

Lauseesta 2.6 saadaan maksimaalifunktion normille arvio $\|M\|_{L^{p'}\to L^{p'}} \lesssim_{c_\mu} p$, joten

$$\| \sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \chi_{tB} \|_p = \sup_{\|f\|_{p'}\leq 1} \left| \int_X f(x) \left(\sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \chi_{tB}(x) \right) \mathrm{d}\mu \right| \lesssim p \| \sum_{B\in\mathcal{F}} a_B \chi_B \|_p.$$

□

Lemma 3.5. *Olkoon $\Omega \subset X$ H-ketjuttuva. Silloin joukolla Ω on häviävä ulkokerros määritelmän 3.1 mielessä:*

$$\mu(\Omega_\delta) \leq C\delta^\alpha \mu(\Omega)$$

kaikilla $\delta > 0$ ja eräillä vain joukosta Ω ja tuplaavuusvakiosta riippuvilla $C, \alpha > 0$.

Todistus. Käytetään määritelmien 3.1 ja 3.2 merkintöjä. Selkeyden vuoksi skaalataan metriikka niin, että $\mathrm{diam}(\Omega) = 1$. Lisäksi voidaan olettaa, että $2B^* \subset \Omega$. Jos näin ei olisi, voitaisiin keskuspallon sädettä jakaa kertoimella J tarpeeksi monta kertaa, jolloin haluttu ominaisuus saavutetaan ketjujen pituuden kasvaessa hallitusti. Ennen teknistä osaa selvitetään ajatus.

Todistus jakautuu kolmeen osaan. Ensimmäisessä otetaan piste $x' \in \Omega$, jonka etäisyys komplementista δ tunnetaan tarkasti. Sen ympäristö ositetaan renkaisiin. Sitten muodostetaan pisteelle H-ketju ja osoitetaan, että tarkoin tunnettu joukko ympäristön renkaista majoittaa riittävän hyvin tunnetun määrän ketjun pallojen keskipisteitä. Näiden renkaiden määrä riippuu parametrista δ. Lisäksi tiedetään, kuinka monessa näistä renkaista keskipisteiden määrä on ylhäältä rajoitettu. Renkaassa olevien pallojen määrän yläraja asettaa niiden säteille alarajan. Siitä saadaan alaraja niiden pallojen määrälle, joiden säteillä on parametrista δ riippuva alaraja ja joiden etäisyys pisteestä x' on rajoitettu parametrin δ avulla.

Toisessa osassa peitetään joukko Ω palloilla lemman 2.2 mukaan. Saadun pallokokoelman pallojen ja ensimmäisessä kohdassa rakennetun kokoelman välille rakennetaan yhteys niin, että ensimmäisen kohdan kokoelman ominaisuuksia hyödyntäen voidaan todistaa, että kun peitteen palloja laajennetaan riittävän suurella vakiokertoimella, ulkokerroksessa Ω_δ oleva piste kuuluu sellaiseen kokoelmaan peitepalloja, että sen pallojen lukumäärää rajoittaa alhaalta $-\log \delta$.

Viimeisessä osassa arvioidaan toisen osan estimaatilla väitteen suuretta $\mu\left(\Omega_\delta\right)\delta^{-\alpha}$ ylöspäin suoralla laskulla ja päädytään haluttuun tulokseen.

Osa 1. Olkoot

$$\begin{aligned} D &= 2J+4 \quad \text{ja} \\ n_0 &= 4\left(1+\log_D \frac{1}{r_*}\right). \end{aligned}$$

Vaaditaan, että $n \geq n_0$. Valitaan sitten piste

$$x' \in \Omega_{D^{-n-2}} \setminus \Omega_{D^{-n-3}} \tag{3.2}$$

ja määritellään sitä ympäröivät renkaat

$$A_j(x') = \{y \in X : D^{-j} < d(x',y) \leq D^{-j+1}\}, 0 \leq j \leq n.$$

Muodostetaan minimaalinen määritelmän 3.2 mukainen ketju pallolle $B\left(x', \frac{d(x',X\setminus\Omega)}{L}\right)$ ja merkitään sen palloja $B_{i'}, 0 \leq i' \leq k$. Koska valinnan (3.2) mukaan $d(x', X\setminus\Omega) \leq D^{-n-2}$, niin

$$r_{i'} \leq d(z_{i'}, X\setminus\Omega) \leq d(z_{i'}, x') + d(x', X\setminus\Omega) \leq d(z_{i'}, x') + D^{-n-2}$$

ja koska peräkkäisten indeksien pallot leikkaavat ketjussa, tästä ja määritelmän 3.2 kohdasta (ii) seuraa

$$\begin{aligned} d(z_{i'+1}, x') &\leq d(z_{i'+1}, z_{i'}) + d(z_{i'}, x') \\ &\leq r_{i'+1} + r_{i'} + d(z_{i'}, x') \\ &\leq (J+1)r_{i'} + d(z_{i'}, x') \\ &\leq (J+2)(d(z_{i'}, x') + D^{-n-2}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Olkoon sitten j' *ensimmäinen* indeksi, jolla $d(z_{j'}, x') > D^{-n-1}$. Tämä on olemassa, koska indeksejä on äärellinen määrä ja viimeistään viimeisessä pallossa ominaisuus on voimassa. Yleisemminkin jos $\hat{j} \geq n_0/4$, niin silloin

$$\begin{aligned}
d(z_{k'}, x') &= d(x_*, x') \\
&\geq d(x_*, X \setminus \Omega) - d(x', X \setminus \Omega) \\
&\geq 2r_* - D^{-n-2} \\
&\geq 2r_* - D^{-n_0/4-2} \\
&\geq 2r_* - r_* \\
&= D^{-(1+\log_D \frac{1}{r_*})+1} \\
&= D^{-n_0/4+1} \\
&\geq D^{-\hat{j}+1}. \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Merkitään $z_{j'} = y$ ja $r_{j'} = r$. Koska j' on ensimmäinen, jolla $d(z_{j'}, x') > D^{-n-1}$, niin erityisesti $d(z_{j'-1}, x') \leq D^{-n-1}$. Tästä ja epäyhtälöstä (3.3) seuraa

$$\begin{aligned}
d(y, x') &= d(z_{j'}, x') \\
&\leq (J+2)(d(z_{j'-1}, x') + D^{-n-2}) \\
&\leq \frac{D}{2}(D^{-n-1} + D^{-n-2}) \\
&\leq D^{-n}.
\end{aligned}$$

Siis $y \in A_{n+1}(x')$.

Muodostetaan nyt minimaalinen H-ketju pallolle $B(y, r)$. Edellä saatiin tulos, että $y \in A_{n+1}(x')$. Toisaalta epäyhtälön (3.4) mukaan

$$x_* \in X \setminus \bigcup_{j=n_0/4}^{\infty} A_j(x'),$$

joten ketjun on kuljettava kaikkien renkaiden $A_j(x')$, $\frac{n_0}{4} \leq j \leq n$ läpi. Jälleen perustellaan kuten kohdassa (3.3), että

$$d(z_{i+1}, x') \leq \frac{D}{2}(d(z_i, x') + D^{-n-2}),$$

joten jos $d(z_i, x') \leq D^{-n-2}$, niin $d(z_{i+1}, x') \leq D^{-n-1}$. Jos puolestaan $d(z_i, x') > D^{-n-2}$, niin silloin $d(z_{i+1}, x') \leq Dd(z_i, x')$. Siis kun eksponentti on suurempi kuin $-n$, ketjupallojen keskipisteiden etäisyydet pisteestä x' kasvavat indeksistä seuraavaan siirryttäessä korkeintaan kertoimella D, eli ketjun pallot eivät voi ohittaa mitään rengasta indeksillä $\frac{n_0}{4} \leq j \leq n$. Toisin sanoen edellä mainituille indekseille j on kullekin ketjun palloa osoittava indeksi i_j siten, että $z_{i_j} \in A_j(x')$.

Seuraavaksi tarkastellaan pisteiden z_{i_j} lukumäärää. Lemman 3.3 mukaan

$$\#H(B(y,r)) \leq K \log_2 \left(\frac{4Kr_*}{\sum_{i=0}^{j} r_i} \right).$$

Tässä voidaan arvioida säteitä maksimaalista voimakkaamman pienenemisen mukaan alaspäin, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j} r_i &\geq \sum_{i=0}^{j} D^{-(j-i)} r_j \\
&> D^{-n-1} \cdot D^{-j} \frac{D^{j+1}-1}{D-1} \\
&= D^{-n-1} \frac{D-D^{-j}}{D-1} \\
&\geq D^{-n-1}
\end{aligned}$$

ja yhteensä

$$\#H(B(y,r)) \leq K \log_2 \left(4Kr_* D^{n+1}\right) < K(4+\log_2 + n)\log_2 D. \tag{3.5}$$

Voidaan määritellä $c' > 0$ siten, että $4 + \log_2 + n \leq c' \left(n - \frac{n_0}{4}\right)$. Merkitään $N = 3Kc' \log_2 D$ ja pidetään kappaleen loppuun asti ilman eri mainintaa $\frac{n_0}{4} \leq j \leq n$. Kerroin c' valittiin niin, että jos jokaisessa $A_j(x')$ olisi N ketjupallon keskipistettä, niitä olisi yli kolme kertaa maksimimäärä. Siis korkeintaan kolmasosassa renkaista $A_j(x')$ ketjupallojen keskipisteiden määrä voi ylittää arvon N, joten vähintään kaksi kolmasosaa renkaista $A_j(x')$ on sellaisia, että niissä on korkeintaan N ketjupallon keskipistettä. Merkitään näiden renkaiden indeksien joukkoa $I \subset [n_0/4, n]$, jolloin

$$\#I \geq \frac{2}{3}\left(n - \frac{n_0}{4}\right) \geq \frac{n}{2}.$$

Valitaan vielä jokaiselle $j \in I$ sellainen $B_{i_j} \in H(B(y,r))$, että $r_{i_j} \geq r_{i'}$ kaikilla $z_{i'} \in A_j$. Merkitään tämän pallon keskipistettä w_j ja sädettä ρ_j.

Otetaan sitten harvaan asuttu rengas $A_j, j \in I$. Renkaan majoittamien pallojen säteistä suurimmalle saadaan alaraja. Nimittäin koska ketju vaeltaa renkaan läpi, on oltava

$$D^{-j+1} - D^{-j} \leq 2 \sum_{z_i \in A_j} r_i \leq 2N\rho_j$$

eli

$$\rho_j \geq \frac{D^{-j}(D-1)}{2N}.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
d(w_j, x') &\leq D^{-j+1} \\
&= \frac{D^{-j}(D-1)}{2N} \cdot \frac{2ND}{D-1} \\
&\leq \frac{2ND}{D-1}\rho_j \\
&\leq \frac{2ND}{D-1} d(w_j, X \setminus \Omega). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Tämä päättää todistuksen ensimmäisen osan.

Osa 2. Olkoon ensin $0 < \delta < D^{-n_0-2}$. Määritellään

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(v, \frac{d(X \setminus \Omega)}{20}\right) : v \in \Omega \right\}.$$

ja valitaan tästä lemman 2.2 mukainen osakokoelma $\mathcal{F}$. Seuraavaksi osoitetaan, että on olemassa vakiot $C_1, c_1 > 0$ siten, että

$$S(x') = \sum_{B \in \mathcal{F}} \chi_{C_1 B}(x) \geq c_1 \log \frac{1}{\delta}$$

kaikilla $x' \in \Omega_\delta$.

Valinnasta $\delta < D^{-n_0-2}$ johtuen jokaiselle $x' \in \Omega_\delta$ on $n \geq n_0$ siten, että $x' \in \Omega_{D^{-n-2}} \setminus \Omega_{D^{-n-3}}$. Riittää näyttää, että $S(x') \geq n/4$, sillä koska $\delta \geq D^{-n-3}$, niin

$$n \geq c_1 \log \frac{1}{\delta} \qquad (3.7)$$

missä c_1 riippuu vain joukosta Ω.

Jokaiselle hyvälle indeksille $j \in I$ valitaan sellainen pallo $B^j \in \mathcal{F}$, että renkaan suurimman ketjupallon keskipiste $w_j \in 5B^j = B\left(v_j, \frac{d(v_j, X\setminus\Omega)}{4}\right)$. Silloin

$$\begin{aligned}
d(w_j, X \setminus \Omega) - \frac{d(v_j, X \setminus \Omega)}{4} &\leq d(w_j, X \setminus \Omega) - d(v_j, w_j) \\
&\leq d(v_j, X \setminus \Omega) \\
&\leq d(w_j, X \setminus \Omega) + d(v_j, w_j) \\
&\leq d(w_j, X \setminus \Omega) + \frac{d(v_j, X \setminus \Omega)}{4},
\end{aligned}$$

joten

$$\frac{4}{5}d(w_j, X \setminus \Omega) \le d(v_j, X \setminus \Omega) \le \frac{4}{3}d(w_j, X \setminus \Omega). \tag{3.8}$$

Tämän ja epäyhtälön (3.6) mukaan

$$\begin{aligned} d(x', v_j) &\le d(x', w_j) + d(w_j, v_j) \\ &\le \frac{2ND}{D-1}d(w_j, X \setminus \Omega) + \frac{d(v_j, X \setminus \Omega)}{4} \\ &\le \left(\frac{50ND}{D-1} + 5\right)\frac{d(v_j, X \setminus \Omega)}{20} \\ &= C_1 r(B^j), \end{aligned} \tag{3.9}$$

mikä määrittelee vakion C_1 ja takaa, että $x' \in C_1 B^j$. Kokoelmassa $\{B^j\}_{j \in I}$ samaan palloon saattaa kuitenkin liittyä useita indeksejä. Tämän korjaamiseksi valitaan indekseistä $j \in I$ sellainen osakokoelma $J = \{j_1, \dots, j_l\}$, että $j_{i+1} \ge j_i + 2$ kun $i < l$ ja että $\#J \ge n/4$. Käytännössä siis otetaan joka toinen indeksi niin, että saadaan mahdollisimman monta.

Osoitetaan nyt, että $\#J = \#\{B^j\}_{j \in J}$. Valitaan indeksipari $j \ge j' + 2$ kokoelmasta J. Silloin epäyhtälön (3.6) nojalla

$$d(w_{j'}, v_{j'}) \le \frac{d(v_{j'}, X \setminus \Omega)}{4} \le \frac{d(w_{j'}, X \setminus \Omega)}{3} \le \frac{d(w_{j'}, x') + D^{-n-2}}{3},$$

joten

$$\begin{aligned} d(w_j, v_{j'}) &\ge d(w_{j'}, x') - d(x', w_j) - d(w_{j'}, v_{j'}) \\ &\ge d(w_{j'}, x') - D^{-j+1} - \frac{d(w_{j'}, x') + D^{-n-2}}{3} \\ &\ge \frac{2}{3}D^{-j'} - \left(\frac{1}{3}D^{-4} + D^{-1}\right)D^{-(j-2)} \\ &> \frac{1}{3}D^{-j'}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned} d(w_j, X \setminus \Omega) &\le d(w_j, x') + d(x', X \setminus \Omega) \le D^{-j+1} + D^{-n-2} \\ &\le D^{-j+1} + D^{-j-2} \le 2D^{-j+1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Yhdessä arvioista (3.11) ja (3.10) seuraa

$$\begin{aligned} d(v_{j'}, X \setminus \Omega) &\le d(v_{j'}, w_j) + d(w_j, X \setminus \Omega) \\ &\le d(v_{j'}, w_j) + \frac{2}{D}D^{-j'} \\ &\le 2d(v_{j'}, w_j), \end{aligned}$$

joten

$$r(5B^{j'}) = \frac{d(v_{j'}, X \setminus \Omega)}{4} \leq \frac{d(v_{j'}, w_j)}{2},$$

mistä johtuen $w_j \notin 5B^{j'}$. Siis $B^{j'} \neq B^j$. Tämä päättää todistuksen toisen osan.

Osa 3. Kokoelmassa $\{B^j\}_{j \in J}$ on $\#J \geq \frac{n}{4}$ palloa. Siis muistaen (3.9) ja (3.7) saadaan valitulle $x' \in \Omega_{D^{-n-2}} \setminus \Omega_{D^{-n-3}}$ toivottu

$$S(x') \geq \frac{n}{4} \geq c_1 \log \frac{1}{\delta},$$

missä kaikki ylimääräiset kertoimet on sisällytetty vakioon c_1. Nyt saadaan monotonisen suppenemisen lauseen ja lemman 3.4 avulla

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega_\delta)\delta^{-\alpha} &\leq \int_{\Omega_\delta} e^{\alpha \log \delta^{-1}} \mathrm{d}\mu \leq \int_{\Omega_\delta} e^{\alpha c_1^{-1} S(x)} \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega \sum_{k=0}^\infty \frac{(\alpha c_1^{-1} S(x))^k}{k!} \mathrm{d}\mu \\
&= \mu(\Omega) + \sum_{k=1}^\infty \frac{(\alpha c_1^{-1})^k}{k!} \int_\Omega \left(\sum_{B \in \mathcal{F}} \chi_{C_1 B}(x) \right)^k \mathrm{d}\mu \\
&\leq \mu(\Omega) + \sum_{k=1}^\infty \frac{(C' k \alpha)^k}{k!} \int_\Omega \left(\sum_{B \in \mathcal{F}} \chi_B(x) \right)^k \mathrm{d}\mu \\
&\leq \mu(\Omega) \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(C' k \alpha)^k}{k!} \right).
\end{aligned}$$

Vakio C' riippuu vain tuplaavuusvakiosta ja joukosta Ω. Potenssisarja suppenee, kun $\alpha < \frac{1}{C'e}$, joten väite on todistettu tapauksessa $\delta < D^{-n_0-2}$.

Mikäli $\delta \geq D^{-n_0-2}$, pätee triviaali

$$\mu(\Omega_\delta) \leq \mu(\Omega) = D^{\alpha(n_0+2)} \left(D^{-n_0-2}\right)^\alpha \mu(\Omega) \leq D^{\alpha(n_0+2)} \delta^\alpha \mu(\Omega).$$

Voidaan siis valita tapauksen $\delta < D^{-n_0-2}$ eksponentti α ja väitteen vakioksi C otetaan eri tapausten vaatimista vakioista suurempi

$$C = \max \left\{ D^{\alpha(n_0+2)}, 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(C' k \alpha)^k}{k!} \right\}.$$

$\square$

3.2 Bomanin ketjut

Tässä osiossa esitetään muoto Bomanin ketjuehdosta, joka määrittelee Boman-joukot. Niiden euklidinen vastine on John-alueiden luokka. Artikkelissaan [7] Buckley, Koskela ja Lu todistivat, että lievin lisäoletuksin avaruuden suhteen Boman- ja John-ehdot määrittelevät saman luokan alueita. Tarkemmin ottaen John-alueet ovat aina Boman-alueita, mutta mikäli avaruus on lisäksi heikosti geodeettinen, eli pallon jokainen piste voidaan aina yhdistää keskipisteeseen janalla, jonka pituus on verrattavissa pallon säteeseen, myös käänteinen pätee.

Määritelmä 3.6 (Bomanin ketju)**.** Alueen $\Omega \subset X$ sanotaan olevan Bomanin ketjualue, jos on olemassa vakiot $C_2 > C_1 > 1$, $C_3 > 1$, $\lambda > 1$ ja $M \in \mathbb{N}$ sekä sellainen kokoelma erillisiä palloja $\mathcal{F}$, että

i. $\Omega = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} C_1 B$ ja

ii. jokainen $C_2 B$ kohtaa korkeintaan M palloa $C_2 V$, kun $B, V \in \mathcal{F}$. Lisäksi pätee $C_2 B \subset \Omega$.

On myös olemassa sellainen keskuspallo $B^* \in \mathcal{F}$, että jokainen $B \in \mathcal{F}$ voidaan yhdistää siihen äärellisellä ketjulla $\{B\}_{i=1}^{k(B)}$, $B_1 = B^*, B_{k(B)} = B$ siten, että

i. kun $i < k(B)$, niin on olemassa sellainen metrinen pallo $D_i \subset C_1 B_i \cap C_1 B_{i+1}$, että $\mu(D_i) \geq C_3 \max\{\mu(B_i), \mu(B_{i+1})\}$.

ii. $B \subset \lambda B_i$ kaikilla $0 \leq i \leq k(B)$.

Mikäli Ω ei ole yhtenäinen, mutta toteuttaa ketjuehdon, sen sanotaan olevan Boman-joukko.

Seuraava lemma tulee osoittautumaan korvaamattomaksi John-Nirenberg-avaruuksien kannalta. Se on mukaelma Seng-Kee Chuan artikkelin [8] lauseesta 1.5, joka käsittelee painotetun $L^p(\mathbb{R}^n)$-normin ketjuttamista Boman-joukossa. Tässä painotettu L^p on vaihdettu heikkoon ja $\mathbb{R}^n$ metriseen mitta-avaruuteen. Muutamia muitakin muutoksia on tehty.

Lemma 3.7. *Olkoon $\Omega \subset X$ Boman ja $1 < p < \infty$. Silloin*

$$\sum_{B \in \mathcal{F}} \|u_{C_1 B} - u_{C_1 B_*}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1 B)} \lesssim_{\Omega, c_\mu, p} \sum_{V \in \mathcal{F}} \|u - u_{C_1 V}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1 V)}.$$

Tässä heikot kvasinormit ovat normalisoimattomia.

Todistus. Normalisoimattomalle kvasinormille $\|\cdot\|_{L^{p,\infty}}$ on olemassa sen kanssa ekvivalentti normi $\|\cdot\|_X$, koska $p > 1$. Siksi voidaan käyttää kolmioepäyhtälöä toistuvasti ilman, että sovellusten lukumäärä vaikuttaa kvasikolmioepäyhtälön vakioon. Olkoon $\mathcal{F}$ joukon Boman-pallojen kokoelma. Valitaan jokin C_1B. Silloin

$$\|u_{C_1B} - u_{C_1B_*}\|_{L^{p,\infty}(C_1B)} \lesssim_p \sum_{i=1}^{k} \|u_{C_1B_i} - u_{C_1B_{i-1}}\|_{L^{p,\infty}(C_1B)}.$$

Vakion a heikko $L^{p,\infty}(A)$-normi on aina $|a|\mu(A)^{\frac{1}{p}}$, joten

$$\begin{aligned}
&\|u_{C_1B_i} - u_{C_1B_{i-1}}\|_{L^{p,\infty}(C_1B)} = |u_{C_1B_i} - u_{C_1B_{i-1}}|\mu(C_1B)^{\frac{1}{p}} \\
&= |u_{C_1B_i} - u_{C_1B_{i-1}}|\mu(C_1B_i \cap C_1B_{i-1})^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\mu(C_1B)}{\mu(C_1B_i \cap C_1B_{i-1})}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}
&|u_{C_1B_i} - u_{C_1B_{i-1}}|\mu(C_1B_i \cap C_1B_{i-1})^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u_{C_1B_i} - u_{C_1B_{i-1}}\|_{L^{p,\infty}(C_1B_i \cap C_1B_{i-1})} \\
&\lesssim_p \|u - u_{C_1B_i}\|_{L^{p,\infty}(C_1B_i \cap C_1B_{i-1})} + \|u - u_{C_1B_{i-1}}\|_{L^{p,\infty}(C_1B_i \cap C_1B_{i-1})} \\
&\le \|u - u_{C_1B_i}\|_{L^{p,\infty}(C_1B_i)} + \|u - u_{C_1B_{i-1}}\|_{L^{p,\infty}(C_1B_{i-1})}.
\end{aligned}$$

Käyttäen tätä ja Boman-ketjun ominaisuutta

$$\mu(C_1B_i \cap C_1B_{i+1}) \ge C_3 \max\{\mu(B_i), \mu(B_{i+1})\}$$

voidaan arvioida

$$\sum_{i=1}^{k} \|u_{C_1B_i} - u_{C_1B_{i-1}}\|_{L^{p,\infty}(C_1B)} \lesssim \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\mu(C_1B)}{\mu(C_1B_i)}\right)^{\frac{1}{p}} \|u - u_{C_1B_i}\|_{L^{p,\infty}(C_1B_i)}.$$

Bomanin viimeinen ehto vaatii, että $B \subset \lambda B_i$ kaikilla Boman-ketjun palloilla. Siis $\chi_B \le \chi_{\lambda B_i}$. Siitä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\frac{\chi_B(x)}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}} \|u_{C_1B} - u_{C_1B_*}\|_{L^{p,\infty}(C_1B)} &\lesssim \sum_{i=0}^{k} \frac{\chi_B(x)}{\mu(C_1B_i)^{\frac{1}{p}}} \|u - u_{C_1B_i}\|_{L^{p,\infty}(C_1B_i)} \\
&\le \sum_{V \in \mathcal{F}} \frac{\chi_{\lambda V}(x)}{\mu(V)^{\frac{1}{p}}} \|u - u_{C_1V}\|_{L^{p,\infty}(C_1V)}.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi käytetään edellistä arviota ja ketjupallojen erillisyyttä. Saadaan

$$
\begin{aligned}
\sum_{B\in\mathcal{F}} \|u_{C_1B} - u_{C_1B_*}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1B)} &= \sum_{B\in\mathcal{F}} \int_B \frac{\chi_B(x)}{\mu(B)} \|u_{C_1B} - u_{B_*}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1B)} \mathrm{d}\mu \\
&\lesssim \sum_{B\in\mathcal{F}} \int_B \left(\sum_{V\in\mathcal{F}} \frac{\chi_{\lambda V}(x)}{\mu(V)^{\frac{1}{p}}} \|u - u_{C_1V}\|_{L^{p,\infty}(C_1V)} \right)^p \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega \left(\sum_{V\in\mathcal{F}} \frac{\chi_{\lambda V}(x)}{\mu(V)^{\frac{1}{p}}} \|u - u_{C_1V}\|_{L^{p,\infty}(C_1V)} \right)^p \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}
$$

Poistetaan kerroin λ lemmalla 3.4 ja käytetään Hölderin epäyhtälöä summaan. Lopulta

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\sum_{V\in\mathcal{F}} \frac{\chi_{\lambda V}(x)}{\mu(V)^{\frac{1}{p}}} \|u - u_{C_1V}\|_{L^{p,\infty}(C_1V)} \right)^p \mathrm{d}\mu \\
&\lesssim \int_\Omega \left(\sum_{V\in\mathcal{F}} \frac{\chi_{V}(x)}{\mu(V)^{\frac{1}{p}}} \|u - u_{C_1V}\|_{L^{p,\infty}(C_1V)} \right)^p \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_\Omega \left(\sum_{V\in\mathcal{F}} \frac{\chi_{V}(x)}{\mu(V)} \|u - u_{C_1V}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1V)} \right) \left(\sum_{V\in\mathcal{F}} \chi_V(x) \right)^{\frac{p}{p'}} \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_{V\in\mathcal{F}} \|u - u_{C_1V}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1V)}.
\end{aligned}
$$

□

3.3 Ketjut ja geodeettinen avaruus

Edellisten osalukujen — ensinäkemältä mielivaltaiset — ketjuehdot liittyvät kiinteästi jatkossa esitettäviin funktioavaruuksiin. Ne edustavat niitä avaruuksien ominaisuuksia, joilla on merkitystä BMO- ja JN_p-avaruuksien lokaalista globaaliin ominaisuuksille. Tässä osiossa näytetään, että Boman-alueet ovat aina H-ketjujoukkoja. Lisäksi osoitetaan esimerkiksi, että geodeettisessa avaruudessa metrinen pallo on Boman-alue ja siten H-ketjujoukko.

Aloitetaan laatimalla yleisemminkin hyödyllinen Whitney-tyyppinen jako tuplaavan metrisen mitta-avaruuden avoimille joukoille. Se pyrkii tavoittamaan mahdollisimman monia euklidisiin Whitneyn kuutioihin liittyviä ominaisuuksia. Samankaltaisia tuloksia löytyy esimerkiksi lähteistä [9] ja [18].

Lemma 3.8. *Olkoon (X,d,μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus, $\Omega \subset X$ avoin ja $\beta > 1$. Silloin on olemassa numeroituva kokoelma palloja $\mathcal{W}(\Omega)$ siten, että*

i. $\Omega = \bigcup_{B\in\mathcal{W}(\Omega)} B$ *ja pallot* $\{\frac{1}{5}B\}_{B\in\mathcal{W}(\Omega)}$ *ovat pistevieraita.*

ii. *Kaikilla* $B \in \mathcal{W}(\Omega)$ *on voimassa* $2\beta r(B) = d(z(B), X\setminus\Omega)$.

iii. *Jos* $B(z_i, nr_i) \cap B(z_j, nr_j) \neq \varnothing$, *niin silloin* $\alpha_n^{-1} \leq r_i/r_j \leq \alpha_n$ *eräällä vain parametristä* β *ja kertoimesta* $n < 2\beta$ *riippuvalla* $\alpha_n > 1$.

iv. *Jos* $B(z_i, r_i) \cap B(z_j, r_j) \neq \varnothing$, *niin*

$$\mu\left(B(z_i, 2r_i) \cap B(z_j, 2r_j)\right) \geq C \max\{\mu\left(B(z_i, 2r_i)\right), \mu\left(B(z_j, 2r_j)\right)\},$$

missä $C > 0$ *riippuu vain tuplaavuusvakiosta ja parametrista* β.

v. *Jos* $B \in \mathcal{W}(\Omega)$, *niin on korkeintaan* M *sellaista* $B' \in \mathcal{W}(\Omega)$, *että* $\gamma B \cap \gamma B' \neq \varnothing$, *kun* $\gamma < 2\beta$. M *riippuu vain tuplaavuusvakiosta ja parametreista* β *ja* γ.

Todistus. Jokaiselle $z \in \Omega$ määritellään

$$\rho_z = \frac{1}{10\beta} d(z, X\setminus\Omega).$$

Lemman 2.2 mukaan voidaan kerätä numeroituva kokoelma pistevieraita palloja $B(z_i, \rho_{z_i})$ siten, että $\bigcup_i B(z_i, 5\rho_{z_i}) \supset \Omega$. Merkitään $r_i = 5\rho_{z_i}$, jolloin $\{B(z_i, r_i)\}$ on etsitty kokoelma. Määrittelystä on selvää, että se toteuttaa kohdat (i) ja (ii).

Kohta (iii) voidaan perustella suoralla laskulla. Valitaan toisensa kohtaavat pallot $B(z_i, nr_i)$ ja $B(z_j, nr_j)$. Koska pallon säde määräytyy sen keskipisteen sijainnin mukaan, voidaan arvioida kolmioepäyhtälöllä

$$\begin{aligned}
\frac{r_i}{r_j} &= \frac{d(z_i, X\setminus\Omega)}{d(z_j, X\setminus\Omega)} \leq \frac{d(z_i, z_j) + d(z_j, X\setminus\Omega)}{d(z_j, X\setminus\Omega)} \leq \frac{n(r_i + r_j) + d(z_j, X\setminus\Omega)}{d(z_j, X\setminus\Omega)} \\
&= \frac{n(r_i + r_j)}{2\beta r_j} + 1 \leq \frac{n}{2\beta}\frac{r_i}{r_j} + \left(\frac{n}{2\beta} + 1\right),
\end{aligned}$$

mistä seuraa

$$\frac{r_i}{r_j} \leq \frac{2\beta + n}{2\beta - n} = \alpha_n.$$

Samanlainen epäyhtälö saadaan, kun vaihdetaan indeksien i ja j paikat keskenään. Tämä ominaisuus pätee laajemminkin kaikille palloille $B(z, 10\rho_z) = B(z, 2r_z)$, mitä tullaan tarvitsemaan seuraavan kohdan todistamisessa.

Neljättä väittämää varten otetaan piste $x \in B(z_i, r_i) \cap B(z_j, r_j)$. Voidaan olettaa, että $r_i \le r_j$. Valitsemalla piste $y \in B\left(x, \frac{1}{4}r_i\right)$ huomataan, että

$$d(y, z_i) \le d(y, x) + d(x, z_i) \le \frac{1}{4}r_i + r_i \le 2r_i$$

ja

$$d(y, z_j) \le d(y, x) + d(x, z_j) \le \frac{1}{4}r_i + r_j \le 2r_j,$$

joten

$$B\left(x, \frac{1}{4}r_i\right) \subset B(z_i, 2r_i) \cap B(z_j, 2r_j).$$

Siis

$$\begin{aligned}
\mu\left(B(z_i, 2r_i) \cap B(z_j, 2r_j)\right) &\ge \mu\left(B\left(x, \frac{1}{4}r_i\right)\right) \\
&\gtrsim_{c_\mu} \mu\left(B\left(x, 4\alpha_1 r_i\right)\right) \\
&\ge \max\{\mu\left(B(z_i, 2r_i)\right), \mu\left(B(z_j, 2r_j)\right)\},
\end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen (vi).

Viimeistä kohtaa varten otetaan $B \in \mathcal{W}(\Omega)$ ja aletaan kerätä jonoa palloista, joilla $\gamma B' \cap \gamma B \ne \varnothing$. Merkitään niitä B_i, $i = 1, 2, \ldots$. Jos $\gamma B' \cap \gamma B \ne \varnothing$, niin $\gamma B' \subset 3\gamma\alpha_\gamma B$ ja $\gamma B \subset 3\gamma\alpha_\gamma B'$. Otetaan jonon k ensimmäistä palloa. Silloin huomataan, että

$$\mu(B) \gtrsim \mu(3\gamma\alpha_\gamma B) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu\left(\frac{1}{5}B_i\right) \gtrsim_{c_\mu, \beta} \sum_{i=1}^{k} \mu(3\gamma\alpha_\gamma B_i) \ge \sum_{i=1}^{k} \mu(B) = k\mu(B)$$

eli $k \lesssim_{c_\mu, \beta, \gamma} 1$ kuten väitettiin. □

Seuraavaksi todistetaan, että Boman-alue on H-ketjuttuva. Todistus käyttää Buckleyn, Koskelan ja Lun [7] argumentteja.

Lause 3.9. *Olkoon Ω Boman-alue. Silloin se on H-ketjujoukko parametreilla, jotka riippuvat vain Boman-parametreista.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{F}$ Boman-pallojen kokoelma. Olkoot C_1, C_2, C_3, λ ja M alueen Boman-vakiot määritelmän 3.6 mukaisesti. Bomanin ketju toteuttaa H-ketjun ensimmäisen vaatimuksen suoraan. Kolmannesta Boman-ehdosta seuraa, että ketjussa peräkkäin esiintyville palloille $B, B' \in \mathcal{F}$ on $D \subset C_1 B \cap C_1 B'$, jolla

$$\mu(D) \ge C_3 \max\{\mu(C_1 B), \mu(C_1 B')\}$$

Koska Ω on yhtenäinen, lemman 2.3 mukaan

$$r(C_1B') \simeq r(D) \simeq r(C_1B).$$

Tämä takaa H-ketjuehdon (ii) täyttymisen. Kolmannen ehdon ensimmäiseen kohtaan voidaan valita $L = \frac{C_2}{C_1}$. Todistettavaksi jää ketjun pituusvaatimus.

Otetaan pallo $B \in \mathcal{F}$ ja merkitään sen ketjua $\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{F}$. Väitetään, että on olemassa $Q \lesssim_{c_\mu,\lambda} 1$ siten, että jokaiselle ketjun $\mathcal{C}(B)$ pallon indeksille k pätee joko $k \leq Q$ tai $r_j > 2r_0$ jollain $0 \leq j \leq k$. Tätä varten olkoon $t = 2\lambda+4$. Tarkastellaan palloja $B_i \subset tB_0$. Olkoon tämän toteuttavien indeksien joukko I. Koska Boman-ketjun pallot erillisiä, niin

$$\mu\left(B_0\right) \gtrsim_{c_\mu,\lambda} \mu\left(tB_0\right) \geq \sum_{i\in I} \mu\left(B_i\right) \gtrsim_{c_\mu,\lambda} \sum_{i\in I} \mu\left(\lambda B_i\right) \geq \mu\left(B_0\right) Q_0.$$

Siis $\#I = Q_0 \lesssim_{c_\mu,\lambda} 1$. Osoitetaan, että haettu $Q = Q_0 + 1$.

Olkoon $k > Q$. Silloin on $j \leq k$ siten, että $B_j \not\subseteq tB_0$. Jos $B_j \cap 2\lambda B_0 = \varnothing$, niin voidaan ottaa $x \in B_0 \subset \lambda B_j$, jolloin

$$\lambda r_j + r_0 \geq d(x, z_j) + d(x, z_0) \geq d(z_0, z_j) > r_j + 2\lambda r_0,$$

mistä seuraa

$$r_j > \frac{2\lambda - 1}{\lambda - 1} r_0 \geq \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} + 1\right) r_0 \geq 2r_0.$$

Jos puolestaan $B_j \cap 2\lambda B_0 \neq \varnothing$, otetaan $x \in B_j \setminus tB_0$. Silloin

$$(2\lambda + 4)r_0 = tr_0 < d(x, z_0) \leq d(x, z_j) + d(z_0, z_j) \leq 2r_j + 2\lambda r_0$$

ja väite $2r_0 < r_j$ seuraa.

Seuraavaksi ohennetaan ketjua $\mathcal{C}(B) = \{B_i\}_{i=0}^{k}$. Jos $k \leq Q$, määritellään $\mathcal{F}_i(B) = \mathcal{C}(B)$ kaikilla $i \geq 0$. Jos puolestaan $k > Q$, valitaan $j_1 \leq k$ siten, että $r_j > 2r_0$. Määritellään kokoelmat

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(B) &= \{B_i\}_{i=0}^{j-1} \quad \text{ja} \\ \mathcal{F}_1(B) &= \mathcal{F}_0(B) \cup \mathcal{C}(B_{j_1}), \end{aligned}$$

kaikilla $i \geq 2$, missä $\mathcal{C}(B_j)$ on pallon B_j Boman-ketju. Sen indeksointi alkaa nollan sijaan arvosta j. Näillä merkinnöillä $\mathcal{F}_1(B')$, $\mathcal{F}_0(B')$ ja $\mathcal{C}(B')$ viitataan jatkossa edellä suoritetun iteroinnista saataviin kokoelmiin aloituspallolla B'.

Kun i on suurin luku, jolla $\mathcal{F}_i \neq \mathcal{F}_{i+1}$, niin on olemassa indeksi j_i siten, että $\mathcal{F}_i = \{V_l\}_{l=0}^{j_i-1} \cup \mathcal{C}(V_{j_i})$. Palloa V_{j_i} kutsutaan rajapalloksi. Muodostetaan $\mathcal{F}_0(V_{j_i})$ ja $\mathcal{F}_1(V_{j_i})$ ja asetetaan

$$\mathcal{F}_{i'}(B) = \mathcal{F}_{i-1} \cup \mathcal{F}_1(V_{j_i}),$$

kun $i' > i$. Tämä ketju sisältää pallon $V_{j_{i+1}}$, jonka säde on $r_{j_{i+1}} > 2^{j_i+1}r_0$. Koska $V_{j_{i+1}} \subset \Omega$, ketjun jatkaminen päättyy jollain indeksillä, sillä $\mu(\Omega) < \infty$. Merkitään $\mathcal{F}_\infty$ sitä kokoelmaa, joka jää lopulliseksi.

Ketjun $\mathcal{F}_\infty(B) = \{V_i\}_{i=0}^{k-1}$ pallot voivat pienentyä indeksin kasvaessa, mutta $\lambda V_j \supset V_r$, jossa V_r on edellinen rajapallo. Siis $r_j \geq \frac{r_r}{\lambda}$. Valitsemalla $\rho = 2^{\frac{1}{Q}}$ ja $C = \rho^{-Q}\lambda^{-1}$, saadaan ketjun pallojen kasvulle geometrinen alaraja

$$r(B_i) \geq C\rho^i r(B_0).$$

Tästä seuraa haluttu yläraja ketjun pituudelle. Merkitään viimeisen pallon eli keskuspallon indeksiä k, jolloin

$$k \lesssim \log_2 \frac{r_*}{r_0} + 1 = \log_2 \frac{2r_*}{r_0}.$$

Siis Boman-alue on H-ketjuttuva parametreilla, jotka riippuvat vain Boman-parametreista. $\square$

Päätetään luku todistamalla, että geodeettisen avaruuden pallo on Boman. Tästä seuraa edellisen mukaan, että se on myös H-ketjuttuva.

Lause 3.10. *Olkoon (X, d, μ) geodeettinen tuplaava metrinen mitta-avaruus. Jokainen metrinen pallo on Boman-alue samoilla parametreilla ja edelleen H-ketjualue.*

Todistus. Olkoon $\Omega \subset X$ metrinen pallo. Merkitään keskipistettä $z(\Omega) = x_*$. Muodostetaan lemman 3.8 mukainen hajotelma $\mathcal{W}$ parametrilla β siten, että $B_* = B(x_*, r)$ tulee valituksi. Valitaan se keskuspalloksi. Otetaan sitten jokin $B \in \mathcal{W}$ ja muodostetaan geodeesi $\gamma : [0, l(\gamma)] \longrightarrow \Omega$, joka yhdistää pisteen $z(B)$ pallon Ω keskipisteeseen x_*.

Muodostetaan seuraavaksi ketju $\mathcal{C}(B)$. Oletetaan ensin, että $B \cap B_* = \varnothing$. Silloin on olemassa sellainen $r \in (0, l(\gamma))$, että $\gamma(r) \in \partial B$ ja $\gamma((r, l(\gamma)]) \subset X \setminus \overline{B}$. Valitaan jokin sellainen pallo $B_1 \in \mathcal{W}$, että $\gamma(r) \in B_1$. Jos $B_* \cap B \neq \varnothing$, niin silloin valitaan seuraajapalloksi $B_1 = B_*$.

Iteroimalla edellä kuvattua prosessia saadaan muodostettua ketju palloja $\mathcal{C}$. Koska ne ovat kiinteällä kertoimella erillisiksi kutistettavissa, ketun pituus on äärellinen. On vielä osoitettava, että pallot saadaan toteuttamaan Bomanin ehdot. Tämä tehdään Buckleyn, Koskelan ja Lun [7] argumentilla.

Merkitään $\mathcal{C}(B) = \{B_i\}_i$, $r_i = z(B_i)$ ja $z_i = r(B_i)$. Olkoon $\gamma(t_i) \in B_i$ geodeesin piste. Silloin

$$r_i = \frac{1}{2\beta} d(z_i, \partial\Omega) \geq \frac{1}{2\beta}\left(d(\gamma(t_i), \partial\Omega) - d(\gamma(t_i), z_i)\right) \geq \frac{1}{2\beta}(t_i - r_i).$$

Viimeinen epäyhtälö tulee geodeettisuudesta ja ominaisuudesta $\gamma(t_i) \in B_i$. Toisaalta käyrän γ on poistuttava ensimmäisestä pallosta B_0, joten edellisestä voidaan jatkaa päätelmään

$$r_i \geq \frac{t_i}{2\beta + 1} \geq \frac{r_0}{2\beta + 1}.$$

Otetaan sitten $B_j \in \mathcal{C}(B)$. Jos $x \in \frac{1}{5}B_0$, niin

$$\begin{aligned} d(x, z_j) &\leq d(x, z_0) + d(z_0, \gamma(t_j)) + d(\gamma(t_j), z_j) \\ &\leq r_0 + t_j + r_j \\ &\lesssim_\beta r_j + d(\gamma(t_j), \partial\Omega) \\ &\leq r_j + (d(\gamma(t_j), z_j) + d(z_j, \partial\Omega)) \\ &\lesssim_\beta r_j. \end{aligned}$$

On siis olemassa vain Whitneyn jaon parametreista riippuva λ siten, että $\frac{1}{5}B_0 \subset \frac{\lambda}{5}B_j$. Tämä on Bomanin neljäs ehto. Ehdot kolme ja kaksi ovat lemmasta 3.8 selviä. Ensimmäinen nähdään suoraan määrittelystä.

Boman-palloiksi päätyivät kutistetut Whitney-pallot. Siitä seuraa, että Boman-vakiot eivät riipu lainkaan valitusta pallosta. Erityisesti suhde $\frac{C_2}{C_1}$ on mielivaltaisen suuri, joten pallo on H-ketjujoukko edellisen lauseen todistuksen mukaan millä vain $L > 1$. $\square$

Luku 4

BMO-funktiot

Määritelmä 4.1. Olkoon $\Omega \subset X$ avoin. Lokaalisti integroituva $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ kuuluu avaruuteen $BMO(\Omega)$, jos

$$\|u\|_* = \sup_{B \subset \Omega} \fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Avaruudella on lokaali vastine $BMO_{loc}(\Omega)$, jonka määrittelee ehto

$$\|u\|_{*,loc} = \sup_{\tau B \subset \Omega} \fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu < \infty,$$

jollain kiinteällä $\tau > 1$.

BMO-funktioilla on lukuisia mielenkiintoisia ominaisuuksia. Tässä luvussa todistetaan ensin John-Nirenberg-epäyhtälö artikkelin [1] menetelmällä. Sen jälkeen osoitetaan Maasaloa [17] mukaillen, että lokaali ja globaali seminormi ovat ekvivalentteja avaruudessa, jonka pallot toteuttavat H-ketjuehdon. Lopuksi näytetään, että BMO on eksponentiaalisesti integroituva jokaisessa H-ketjujoukossa. Viimeisenä mainitun tuloksen todisti ensimmäisenä Buckley [6], mutta tässä esitettävä todistus käyttää Buckleyn työn lisäksi Staplesin [22] ja Maasalon [17] tekniikoita vastaavan tuloksen saamiseen.

Buckley määritteli H-ketjut Hölder-alueiden yleistykseksi metriseen mitta-avaruuteen, joten viimeinen tulos vastaa euklidista tietoa, että BMO integroituu eksponentiaalisesti täsmälleen Hölder-alueissa, jotka ovat täsmälleen ne alueet, joissa kvasihyperbolinen metriikka integroituu eksponentiaalisesti. Euklidisen avaruuden tulokset ovat artikkeleissa [21] ja [13].

4.1 John-Nirenberg-epäyhtälö pallossa

Aloitetaan John-Nirenberg-epäyhtälöstä. Klassinen todistus euklidisessa avaruudessa perustuu iteroituun Calderòn-Zygmund-jakoon. Koska metrisessä avaruudessa ei ole käytettävissä yhtä tehokasta hajotelmaa lokaalisti integroituville funktioille, John-Nirenberg-epäyhtälöllä on lukuisia eri todistuksia. Seuraavaksi esitettävä todistus perustuu metrisillä palloilla toimivaan hieman karkeampaan Calderòn-Zygmund-tyyppiseen jakoon. Se on peräisin artikkelista [1], jossa Aalto, Berkovits, Kansanen ja Yue laativat jaon todistaakseen heikon L^p-estimaatin John-Nirenberg-funktioille metrisessä mitta-avaruudessa.

Lemma 4.2 (Calderòn-Zygmund)**.** *Olkoon (X, d, μ) tuplaava mitta-avaruus, $f \in L_{\mathrm{loc}}(X)$, $B_0 = B(z_0, R) \subset X$ kiinteä pallo ja $\lambda_0 > 0$. Oletetaan lisäksi, että*

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{11B_0} |f| \mathrm{d}\mu \leq \lambda_0.$$

Silloin on olemassa numeroituva kokoelma pistevieraita palloja $\mathcal{G}_{\lambda_0} = \{B_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ siten, että kaikilla indekseillä i pätee $5B_i \subset 11B_0$ ja

i. $|f(x)| \leq \lambda_0$ *μ-melkein kaikilla $x \in B_0 \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{I}} 5B_i$.*

ii. $\lambda_0 < \fint_{B_i} |f| \mathrm{d}\mu \leq c_\mu^3 \lambda_0$.

iii. $c_\mu^{-3} \lambda_0 < \fint_{5B_i} |f| \mathrm{d}\mu \leq \lambda_0$.

Lisäksi kun jako suoritetaan tasoilla $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_N$, saadaan numeroituvat kokoelmat $\mathcal{G}_{\lambda_0}, \ldots, \mathcal{G}_{\lambda_N}$ siten, että kun $0 < k \leq N$ niin jokaiselle i löytyy j, jolla

$$\mathcal{G}_{\lambda_k} \ni B_i \subset 5B_j \in \mathcal{G}_{\lambda_{k-1}}.$$

Todistus. Osoitetaan, että haluttu kokoelma $\mathcal{G}_\lambda$ on olemassa jokaisella $\lambda \geq \lambda_0$ ja että jokaisella valinnalla $0 < \lambda_0 \leq \tilde{\lambda} < \lambda$ voidaan muodostaa yhteensopiva pallokokoelma $\mathcal{G}_{\tilde{\lambda}}$. Määritellään erityinen maksimaalifunktio

$$Mf(x) = \sup_{\substack{B \ni x \\ B \subset B_0}} \fint_B |f| \mathrm{d}\mu$$

ja joukko, jossa sen arvot ylittävät asetetun tason λ

$$E_\lambda = \{x \in B_0 : Mf(x) > \lambda\}.$$

Määritelmän mukaan jokaiselle $x \in E_\lambda$ on olemassa sellainen pallo $x \in B_x \subset B_0$, että

$$\fint_{B_x} |f| \mathrm{d}\mu > \lambda. \tag{4.1}$$

Olkoon tämän pallon säde r_x. Valitaan sellainen kokonaisluku $k_x > 0$, että $5^{k_x - 1} r_x \leq 2R < 5^{k_x} r_x$. Nyt $B_0 \subset 5^{k_x} B_x \subset 11 B_0$, koska jokaisella $y \in 5^k B_x$ pätee

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq 10R + R = 11R$$

ja jokaisella $y \in B_0$

$$d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) \leq R + R = 2R.$$

Silloin

$$\fint_{5^{k_x} B_x} |f| \mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{11 B_0} |f| \mathrm{d}\mu \leq \lambda_0 \leq \lambda. \tag{4.2}$$

Voidaan siis kiinnittää skaalaavalle kertoimelle pienin kokonaislukueksponentti $1 \leq n_x \leq k_x$, jolla keskiarvon ja tason λ välinen epäyhtälö (4.2) pätee. Erityisesti se siis ei päde eksponentilla $n_x - 1$. Lisäksi on oleellista, että koska edellä etsitylle k_x pätee $k_x \geq n_x$, niin siitä seuraten $5^{n_x} B_x \subset 5^{k_x} B_x \subset 11 B_0$.

Valitaan lemman 2.2 mukainen numeroituva kokoelma pistevieraita palloja $\mathcal{G}_\lambda$ perheestä $\{5^{n_x - 1} B_x\}_{x \in E_\lambda}$. Osoitetaan, että tämä on haluttu jako pallolle B_0. Lemman 2.2 mukaan

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} 5^{n_x - 1} B_x \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_\lambda} 5B, \tag{4.3}$$

joten

$$B_0 \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_\lambda} 5B \subset B_0 \setminus E_\lambda.$$

Nyt joukon E_λ määrittelystä ja Lebesguen lauseesta 2.4 seuraa, että melkein kaikilla $y \in B_0 \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_\lambda} 5B$

$$\lambda \geq Mf(y) \geq \limsup_{r \to 0} \fint_{B(y,r)} |f| \mathrm{d}\mu = |f(y)|.$$

Siis (i) on voimassa.

Lukujen n_x valinnan perusteella kaikilla $5^{n_x-1}B_x \in \mathcal{G}_\lambda$ pätee

$$\begin{aligned}\lambda &< \fint_{5^{n_x-1}B_x} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\le \frac{\mu\left(8\cdot 5^{n_x-1}B_x\right)}{\mu\left(5^{n_x-1}B_x\right)} \fint_{5^{n_x}B_x} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\le c_\mu^3 \fint_{5^{n_x}B_x} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\le c_\mu^3 \lambda,\end{aligned}$$

joten kohta (ii) on todistettu. Kun otetaan perheestä $\mathcal{G}_\lambda$ pallo ja viisinkertaistetaan sen säde, saadaan eräs $5^{n_x}B_x$. Epäyhtälö (4.2) ei luvun n_x valinnan mukaan päde kertoimella 5^{n_x-1} mutta pätee kertoimella 5^{n_x}, joten

$$\begin{aligned}c_\mu^{-3}\lambda &\le c_\mu^{-3} \fint_{5^{n_x-1}} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\le c_\mu^{-3} \frac{\mu\left(8\cdot 5^{n_x-1}B_x\right)}{\mu\left(5^{n_x-1}B_x\right)} \fint_{5^{n_x}B_x} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\le \fint_{5^{n_x}B_x} |f| \mathrm{d}\mu \\ &\le \lambda.\end{aligned}$$

Siis myös (iii) on voimassa.

Todistamatta on enää jaon iteroituvuusominaisuus. Muodostetaan joukko $E_{\tilde{\lambda}}$ kuten edellä. Koska $\tilde{\lambda} \le \lambda$, niin $E_\lambda \subset E_{\tilde{\lambda}}$. Valitaan pallot B_x samalla tavalla kuin aiemmin mutta sillä poikkeuksella, että kaikille $x \in E_\lambda \cap E_{\tilde{\lambda}}$ otetaan sama pallo kuin ylemmällä tasolla λ. Valitaan jälleen kullekin $x \in E_{\tilde{\lambda}}$ pienin $\tilde{n}_x$, jolla epäyhtälö (4.2) pätee tasolla $\tilde{\lambda}$. Tässä $n_x \le \tilde{n}_x$ kaikilla $x \in E_\lambda$, koska $\tilde{\lambda} \le \lambda$. Siis $5^{n_x-1}B_x \subset 5^{\tilde{n}_x-1}B_x$. Jälkimmäinen pallo kuuluu kuitenkin kokoelmaan, josta $\mathcal{G}_{\tilde{\lambda}}$ muodostetaan peitelauseen 2.2 avulla, joten

$$5^{n_x-1}B_x \subset 5^{\tilde{n}_x-1}B_x \subset 5B$$

eräällä $B \in \mathcal{G}_{\tilde{\lambda}}$. □

Kun edellä todistetulla jaolla johdetaan John-Nirenberg-epäyhtälö BMO-funktioille, tarkoituksena on toistaa jakoa tason λ diskreetisti muuttuvilla arvoilla. Tästä saadaan rekursiokaava, jota iteroimalla päädytään lopulliseen estimaattiin distribuutiofunktiolle. Seuraava lemma toimii johdantona John-Nirenberg-epäyhtälöön.

Lemma 4.3. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava mitta-avaruus, $f \in L_{\mathrm{loc}}(X)$, $B_0 = B(z_0, R) \subset X$ kiinteä pallo, $\lambda_0 > 0$ sekä*

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{11B_0} |f| \mathrm{d}\mu \leq \lambda_0$$

kuten lemman 4.2 oletuksissa. Kun $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_0$, niin

$$(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \sum_{B \in \mathcal{G}_n} \mu(B) \leq \sum_{B \in \mathcal{G}_{n-1}} \int_{5B} |f - f_{5B}| \mathrm{d}\mu,$$

missä $\mathcal{G}_n$ on tason λ_n Calderòn-Zygmund-pallojen kokoelma.

Todistus. Kiinnitetään pallo $B_0 \subset X$. Muodostetaan funktiolle f lemman 4.2 mukainen jako tasoilla λ_n ja λ_{n-1}. Tarkastellaan saatuja pallokokoelmia $\mathcal{G}_{n-1}$ ja $\mathcal{G}_n$. Indeksoidaan alemman kokoelman pallot positiivisilla kokonaisluvuilla eli $\mathcal{G}_{n-1} = \{B_1, B_2, \ldots\}$. Muodostetaan sitten lemman 4.2 tarjoamat joukot

$$\begin{aligned}
J_1 &= \{B \in \mathcal{G}_n : B \subset 5B_1\} \\
J_2 &= \{B \in \mathcal{G}_n : B \subset 5B_2\} \setminus J_1 \\
J_k &= \{B \in \mathcal{G}_n : B \subset 5B_k\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} J_i
\end{aligned}$$

Käyttämällä nyt lemman 4.2 kohtia (ii) ja (iii) sekä Calderòn-Zygmund-pallojen erillisyyttä saadaan

$$\begin{aligned}
\lambda_n \sum_{B \in \mathcal{G}_n} \mu(B) &\leq \sum_{B \in \mathcal{G}_n} \int_B |f| \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_k \sum_{B \in J_k} \int_B |f| \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_k \sum_{B \in J_k} \int_B (|f| - f_{5B_k} + \lambda_{n-1}) \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_k \left[\sum_{B \in J_k} \int_B |f - f_{5B_k}| \mathrm{d}\mu + \lambda_{n-1} \sum_{B \in J_k} \mu(B) \right] \\
&= \sum_k \left[\int_{\bigcup_{B \in J_k}} |f - f_{5B_k}| \mathrm{d}\mu + \lambda_{n-1} \sum_{B \in J_k} \mu(B) \right] \\
&\leq \sum_k \left[\int_{5B_k} |f - f_{5B_k}| \mathrm{d}\mu + \lambda_{n-1} \sum_{B \in J_k} \mu(B) \right],
\end{aligned}$$

mistä seuraa väitetty

$$(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \sum_{B \in \mathcal{G}_n} \mu(B) \le \sum_{\mathcal{G}_{n-1}} \int_{5B_k} |f - f_{5B_k}| \mathrm{d}\mu.$$

□

Lause 4.4 (John-Nirenberg)**.** *Olkoon $B \subset X$ ja $u \in BMO(11B)$. Silloin jokaiselle pallolle ja kaikille $\lambda > 0$ pätee*

$$\mu(\{x \in B : |u - u_B| > \lambda\}) \le c_1 \mu(B) e^{-c_2 \frac{\lambda}{\|u\|_*}}.$$

Vakiot $c_1, c_2 > 0$ riippuvat vain tuplaavuusvakiosta c_μ.

Todistus. Kiinnitetään pallo $B_0 \subset X$. Koska $u \in BMO(X)$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{11B_0} |u - u_B| \mathrm{d}\mu &\le \frac{1}{\mu(B_0)} \left(\int_{11B_0} |u - u_{11B}| \mathrm{d}\mu + \int_{11B_0} |u_{11B} - u_B| \mathrm{d}\mu \right) \\
&\le \frac{\mu(16B_0)}{\mu(B_0)} \left(\fint_{11B_0} |u - u_{11B}| \mathrm{d}\mu + |u_{11B_0} - u_{B_0}| \right) \\
&\le c_\mu^4 \|u\|_* + c_\mu^4 \fint_{B_0} |u - u_{11B_0}| \mathrm{d}\mu \\
&\le c_\mu^4 \|u\|_* + c_\mu^4 \frac{\mu(16B_0)}{\mu(B_0)} \fint_{11B_0} |u - u_{11B_0}| \mathrm{d}\mu \\
&\le 2c_\mu^8 \|u\|_*.
\end{aligned}$$

Merkitään $f = u - u_{B_0}$. Tällöin pätee $f_{B_0} = 0$. Edellisen arvion mukaan f toteuttaa lemman 4.2 ja siten myös lemman 4.3 oletukset, joten voidaan muodostaa Calderòn-Zygmund-jako tasoilla

$$\lambda_n = 2c_\mu^8 \|u\|_* n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ja merkitä jälleen tason λ_n pallokokoelmaa $\mathcal{G}_n$. Lemman 4.2 kohdasta (i) seuraa, että

$$\{x \in B_0 : |f(x)| > \lambda_n\} \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_n} 5B. \tag{4.4}$$

Toisaalta lemman 4.3 mukaan

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in \mathcal{G}_n} \mu(B) &\le \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{B \in \mathcal{G}_{n-1}} \int_{5B} |f - f_{5B_k}| \mathrm{d}\mu \\
&\le \frac{c_\mu^3 \|f\|_*}{\lambda_1} \sum_{B \in \mathcal{G}_{n-1}} \mu(B).
\end{aligned}$$

Iteroimalla tätä ja käyttämällä tietoa $\|u\|_* = \|f\|_*$ sekä Calderòn-Zygmund-pallojen keskinäistä pistevierautta ja sisältymistä palloon $11B_0$ saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\mathcal{G}_n} \mu(B) &\leq \left(\frac{c_\mu^3\|f\|_*}{\lambda_1}\right)^{n-1} \sum_{B\in\mathcal{G}_1} \mu(B)\\ &= \left(\frac{c_\mu^3\|f\|_*}{2c_\mu^8\|u\|_*}\right)^{n-1} \sum_{B\in\mathcal{G}_1} \mu(B)\\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}}\mu(11B_0)\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Otetaan sitten mielivaltainen $\lambda > 0$. Mikäli $\lambda \geq 2c_\mu^8\|u\|_*$, valitaan sellainen $N \in \mathbb{N}$, että

$$\lambda_N = 2c_\mu^8\|u\|_* N \leq \lambda < 2c_\mu^8\|u\|_*(N+1) = \lambda_{N+1}.$$

Silloin

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in B_0 : |u(x) - u_{B_0}| > \lambda\}) &= \mu(\{x \in B_0 : |f(x)| > \lambda\})\\ &\leq \mu(\{x \in B_0 : |f(x)| > \lambda_N\})\\ &\leq c_\mu^3 \sum_{B\in\mathcal{G}_N} \mu(B)\end{aligned}$$

viimeisen epäyhtälön seuratessa huomiosta (4.4). Soveltamalla sitten iteroimalla saatua estimaattia (4.5) päädytään epäyhtälöön

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in B_0 : |u(x) - u_{B_0}| > \lambda\}) &\leq c_\mu^3 \frac{1}{2^{N-1}}\mu(11B_0)\\ &\leq c_\mu^7 e^{(1-N)\log 2}\mu(B_0)\\ &\leq c_\mu^7 e^{\left(2-\frac{\lambda}{2c_\mu^8\|u\|_*}\right)\log 2}\mu(B_0)\\ &= 4c_\mu^7 e^{-\frac{\lambda}{\|u\|_*}\frac{\log 2}{2c_\mu^8}}\mu(B_0)\,.\end{aligned}$$

Käsittelemättä jääneessä tapauksessa $\lambda < 2c_\mu^8\|u\|_*$ sama estimaatti pätee triviaalisti

$$4c_\mu^7 e^{-\frac{\lambda}{\|u\|_*}\frac{\log 2}{2c_\mu^8}} \geq 4c_\mu^7 e^{-\log 2} = 2c_\mu^7 > 1,$$

joten todistus on valmis. $\square$

4.2 Lokaali ja globaali BMO

John-Nirenberg-epäyhtälön ensimmäinen sovellus on lokaalin ja globaalin seminormin ekvivalenssi. Vastaava tulos voidaan todistaa myös ilman John-Nirenberg-epäyhtälöä, mutta käytetty tapa soveltaa samoja tekniikoita kuin John-Nirenberg-epäyhtälön laajentamistodistus seuraavassa osaluvussa.

Todistuksessa tarvitaan lemmaa, joka alunperin liittyy Staplesin [22] tutkimukseen kvasihyperbolisen metriikan ja BMO-funktioiden integroituvuudesta. Seuraavassa kvasihyperbolinen etäisyys on korvattu minimaalisen H-ketjun pituudella.

Lemma 4.5. *Olkoon $L > 11\tau$, Ω H-ketjujoukko ja $u \in BMO_{loc}(\Omega)$. Tässä $\tau > 1$ on lokaaliuskerroin. Silloin on olemassa $a \simeq_{\Omega,c_\mu,L} 1$ siten, että jos pallot $B(x,r)$ ja $B(y,R)$ voidaan yhdistää H-ketjulla H, niin*

$$|u_{B(x,r)} - u_{B(y,R)}| \leq a\#H.$$

Todistus. Olkoon $H = \{B_i\}_{i=1}^k$ pallot yhdistävä H-ketju. Otetaan jokin $1 \leq i < k$. Ketjuehdon 3.2 (ii) mukaan on olemassa indeksistä i ja valitusta riippumaton C' siten, että

$$\mu\left(B_i \cap B_{i+1}\right) \geq C'(\mu\left(B_i\right) + \mu\left(B_{i+1}\right)).$$

Merkitään

$$E_i(\lambda) = \{x \in B_i : |u - u_{B_i}| > \lambda\}.$$

Koska John-Nirenberg-epäyhtälön mukaan $\mu\left(E_i(\lambda)\right) \leq c_1 e^{-c_2 \frac{\lambda}{\|u\|_*}} \mu\left(B\right)$, voidaan valinnalla $\lambda = \frac{1}{c_2}\|u\|_* \log \frac{2c_1}{C'}$ aiheuttaa

$$E_i = E_i(\lambda) \leq \frac{C'}{2}\mu\left(B_i\right).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left(B_i \cap B_{i+1}\right) \setminus \left(E_i \cup E_{i+1}\right)\right) &= \mu\left(B_i \cap B_{i+1}\right) - \mu\left(E_i \cup E_{i+1}\right) \\
&\geq C'(\mu\left(B_i\right) + \mu\left(B_{i+1}\right)) - \frac{C'}{2}(\mu\left(B_i\right) + \mu\left(B_{i+1}\right)) \\
&\geq \frac{C'}{2}(\mu\left(B_i\right) + \mu\left(B_{i+1}\right)) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

On siis olemassa $x_i \in (B_i \cap B_{i+1}) \setminus (E_i \cup E_{i+1})$. Tällä pätee

$$|u(x_i) - u_{B_i}| \leq \lambda \quad \text{ja} \quad |u(x_i) - u_{B_{i+1}}| \leq \lambda.$$

Siis

$$|u_{B_x} - u_{B_y}| \le \sum_{i=1}^{k} |u_{B_{i+1}} - u_{B_i}| \le \sum_{i=1}^{k} (|u_{B_{i+1}} - u(x_i)| + |u(x_i) - u_{B_i}|) \le 2k\lambda.$$

Koska $\lambda = \frac{1}{c_2}\|u\|_* \log \frac{2c_1}{C'}$, väite on todistettu. □

Näillä apuneuvoilla voidaan todistaa seminormien ekvivalenssi avaruudessa, jonka pallot ovat H-ketjujoukkoja. Edellisen lemman mukaan ketjunpituus antaa tavan arvioida keskiarvojen muutosta, ja aiempi lemma 3.5 tarjoaa tavan käsitellä funktiota lähestyttäessä joukon reunaa.

Lause 4.6. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus, jonka pallot ovat H-ketjujoukkoja parametreilla (J, K, L) määritelmän 3.2 mukaisesti. Lisäksi $L \ge 11\tau$. Olkoon $\Omega \subset X$ avoin ja $u \in BMO(\Omega)$. Silloin*

$$\|u\|_* \simeq_{c_\mu} \|u\|_{*,loc}.$$

Todistus. Olkoon $\tau > 1$. Koska jokainen lokaali pallo $\tau B \subset \Omega$ on käytettävissä myös globaalina pallona $B \subset \Omega$, on heti selvää, että $\|u\|_{*,loc} \le \|u\|_*$. Toisen epäyhtälön todistamiseksi valitaan mielivaltainen globaali pallo $\tilde{B} = B(z, R) \subset \Omega$. Tarkoituksena on laskea normin määrittelyssä esiintyvälle poikkeaman integraalikeskiarvolle yläraja, joka riippuu vain lokaalista BMO-normista. Sitä varten pallo täytyy peittää numeroituvalla kokoelmalla osapalloja, jotka yhdistetään H-ketjuilla keskuspalloon B_0. Olkoon $\beta > L$. Keskuspalloksi voidaan valita $B_0 = B(z, \frac{1}{2\beta}R)$.

Muodostetaan pallolle $\tilde{B}$ lemman 3.8 mukainen Whitney-tyyppinen peite parametrilla β. Merkitään saatujen pallojen kokoelmaa $\mathcal{G} = \{B_i : i \in I\}$. Seuraavaksi jaetaan kokoelman $\mathcal{G}$ pallot luokkiin, joissa ketjunpituudelle $\#H$ saadaan riittävän tarkka arvio. Määritellään $\mathcal{W}_1 = \{B(x, r) \in \mathcal{G} : 2\beta d(x, X \setminus \tilde{B}) > \frac{1}{2}\}$ ja edelleen kaikille kokonaisluvuille $k > 1$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_k &= \{x \in B(z, R) : 2\beta d(x, X \setminus \tilde{B}) > 2^{-k}R\}, \\ \mathcal{W}_k &= \{B(x, r) \in \mathcal{G} : x \in \tilde{B}_k \setminus \tilde{B}_{k-1}\} \quad \text{ja} \\ W_k &= \bigcup_{B \in \mathcal{W}_k} B. \end{aligned}$$

Nyt jos $B(x_i, r_i) \subset W_k$, niin $2^{-k}R \le 2\beta d(x_i, X \setminus \tilde{B}) \le 2^{-k+1}R$. Koska lemman 3.8 mukaan $r_i = 2\beta d(x_i, X \setminus \tilde{B})$, niin $2^{-k}R \le r_i \le 2^{-k+1}R$. Silloin H-ketjun pituusvaatimuksesta 3.2 seuraa

$$
\begin{aligned}
\#H_i &\lesssim \log\left(\frac{2r_0}{r_i}\right) \\
&\leq \log 2^k \\
&\lesssim k. \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

Toinen oleellinen ominaisuus

$$
W_k \subset \{x \in B : 2\beta d(x, X \setminus \tilde{B}) \leq 2^{-k+2}R\} \qquad (4.7)
$$

nähdään seuraavasti. Otetaan $a \in B_i \subset W_k$, jolloin

$$
\begin{aligned}
d(a, X \setminus \tilde{B}) &\leq d(a, z_i) + d(z_i, X \setminus \tilde{B}) \\
&\leq r_i + d(z_i, X \setminus \tilde{B}) \\
&\leq \left(\frac{1}{2\beta} + 1\right) d(z_i, X \setminus \tilde{B}) \\
&\leq 2d(z_i, X \setminus \tilde{B}) \\
&\leq \frac{2^{-k+2}R}{2\beta}
\end{aligned}
$$

joten $B_i \subset \{x \in B : 2\beta d(x, X \setminus \tilde{B}) \leq 2^{-k+2}R\}$.

Seuraavaksi voidaan todistaa varsinainen väite. Olkoon $u \in BMO_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Silloin

$$
\begin{aligned}
\fint_{\tilde{B}} |u - u_{B_0}| \mathrm{d}\mu &= \frac{1}{\mu(\tilde{B})} \int_{\cup_{k=1}^{\infty} W_k} |u - u_{B_0}| \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{B \in \mathcal{W}_k} \frac{1}{\mu(\tilde{B})} \int_B |u - u_{B_0}| \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{B \in \mathcal{W}_k} \frac{\mu(B)}{\mu(\tilde{B})} \left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu + \fint_B |u_B - u_{B_0}| \mathrm{d}\mu\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{B \in \mathcal{W}_k} \frac{\mu(B)}{\mu(\tilde{B})} \left(\|u\|_{*,loc} + |u_B - u_{B_0}|\right). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Viimeisessä epäyhtälössä käytettiin tietoa, että pallot $B \in \mathcal{G}$ ovat lokaalin arvion käytettävissä. Koska jälkimmäisessä termissä $B \in \mathcal{W}_k$, sille saadaan lemman 4.5 ja epäyhtälön (4.6) avulla arvio

$$
|u_B - u_{B_0}| \lesssim \#H(B)\|u\|_{*,loc} \lesssim k\|u\|_{*,loc}.
$$

Nyt summan (4.8) molemmat termit on arvioitu BMO-normilla. Jäljellä olevaan kertoimeen käytetään kohdan (4.7) sisältymistä $W_k \subset \tilde{B}_k \setminus \tilde{B}_{k-2}$, kokoelman $\mathcal{W}_k$ lemmasta 3.8 periytyvää erillisiksi palloiksi kutistettavuutta ja ulkokerroksen häviämistä 3.5, jolloin

$$\begin{aligned}
\sum_{B\in\mathcal{W}_k} \frac{\mu(B)}{\mu(\tilde{B})} \lesssim \sum_{B\in\mathcal{W}_k} \frac{\mu(\frac{1}{5}B)}{\mu(\tilde{B})} &\leq \frac{\mu(\cup_{B\in\mathcal{W}_k}\frac{1}{5}B)}{\mu(B)} \\
&\leq \frac{\mu(\{x\in\tilde{B} : 2\beta d(x, X\setminus B) \leq 2^{-k+2}R\})}{\mu(\tilde{B})} \\
&\lesssim 2^{-k\alpha},
\end{aligned}$$

missä α on lemman 3.5 vakio. Toisaalta

$$\begin{aligned}
\fint_{\tilde{B}} |u - u_{\tilde{B}}| \mathrm{d}\mu &\leq \fint_{\tilde{B}} |u - u_{\tilde{B}}| \mathrm{d}\mu + \fint_{\tilde{B}} |u_{B_0} - u_{\tilde{B}}| \mathrm{d}\mu \\
&\leq 2\fint_{\tilde{B}} |u - u_{B_0}| \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

joten yhteensä

$$\begin{aligned}
\fint_{\tilde{B}} |u - u_{\tilde{B}}| \mathrm{d}\mu &\lesssim \fint_{\tilde{B}} |u - u_{B_0}| \mathrm{d}\mu \\
&\lesssim \|u\|_{*,loc} \sum_{k=1}^{\infty} (1+k) 2^{-\alpha k} \\
&\lesssim \|u\|_{*,loc},
\end{aligned}$$

koska sarja suppenee parametrin α riippuessa vain tuplaavuusvakiosta ja avaruuden pallojen H-ketjuparametreista. Tämä arvio on sama kaikille globaaleille palloille $\tilde{B} \subset \Omega$, joten väite on todistettu. $\square$

Oletus metristen pallojen H-ketjuttuvuudesta ei luultavasti ole paras mahdollinen. Todistuksessa sen avulla saadaan lineaarinen raja palloketjujen pituudelle ja eksponentiaalinen väheneminen vastaavaan pituuteen johtavan renkaan mitalle, mikä on enemmän kuin tarpeeksi viimeisen epäyhtälön sarjan suppenemiseksi.

Pienellä muutoksella seuraavassa osaluvussa esitettävä todistus osoittaisi, että geodeettisen H-ketjualueen eli Hölder-alueen kvasihyperbolinen metriikka integroituu eksponentiaalisesti. Toisaalta Staplesin [22] tulos näyttää, että kvasihyperbolisen metriikan integroituminen edes jossain potenssissa karakterisoi alueet, joissa lokaalista globaaliin -tulos on voimassa. Toisin sanoen tuloksen saamiseksi riittää, että avaruuden pallojen kvasihyperbolinen metriikka integroituu. Ei ole kuitenkaan selvää, millainen palloketjuehto vastaisi tätä alueluokkaa.

Toinen oleellinen piirre edellisessä todistuksessa oli tapa kuljettaa lokaalia estimaattia ketjussa. Tätä ideaa tullaan toistamaan monta kertaa. Lähtötietona oli estimaatti lokaalisti käytettävissä oleville palloille. Tutkittava joukko peitettiin kokoelmalla palloja $\mathcal{G}$, minkä jälkeen jokaisessa $B \in \mathcal{G}$ jaettiin tutkittava suure osiin

$$|u - u_{B_0}| \leq |u - u_B| + |u_B - u_{B_0}|.$$

Ensimmäisen osan käsittely vaati pelkän oletuksen lokaalille pallolle, mutta jälkimmäinen arvioitiin yhdistämällä B referenssipalloon B_0 ketjun avulla. Jokainen siirtymä ketjupallosta toiseen teki vakiolisäyksen estimaattiin, ja joukon Ω geometrian avulla tämä saatiin hallintaan. Yleisesti tarvitaan siis lokaali estimaatti, ketjutustekniikka funktioavaruudellle ja joukolle Ω geometrinen ominaisuus, joka tukee ketjua.

4.3 Eksponentiaalinen integroituvuus

John-Nirenberg-epäyhtälön toinen seuraus on, että BMO-funktiot ovat eksponentiaalisesti integroituvia palloissa. Toisaalta epäyhtälö voidaan laajentaa H-ketjujoukkoon, ja eksponentiaalinen integroituvuus voidaan todistaa myös siellä oleellisesti samalla tavalla kuin pallossa. Seuraava lause sisältää epäyhtälön geometrisen laajennuksen.

Lause 4.7. *Olkoon $\Omega \subset X$ H-ketjujoukko, $L \geq 11$ ja $u \in BMO(\Omega)$. Silloin on olemassa vain joukosta Ω ja tuplaavuusvakiosta riippuvat $c_3, c_4 > 0$ siten, että eräällä $c \in \mathbb{R}$ ja kaikilla $\lambda > 0$*

$$\mu\left(\{x \in \Omega : |u - c| > \lambda\}\right) \leq c_3 e^{-c_4 \frac{\lambda}{\|u\|_*}} \mu\left(\Omega\right).$$

Todistus. Valitaan palloista

$$\left\{B\left(x, \frac{d(x, X \setminus \Omega)}{55}\right) : x \in \Omega\right\}$$

lemman 2.2 mukainen numeroituva kokoelma erillisiä palloja $\mathcal{F} = \{B_i\}, i = 0, 1, \ldots$ siten, että

$$\Omega \subset \bigcup_i 5B_i$$

sillä lisävaatimuksella, että ensimmäisen pallon B_0 keskipiste on H-keskuspallon keskipiste. Merkitään $r(B_i) = r_i$ ja $z(B_i) = z_i$. Seuraavaksi jaetaan joukko Ω kerroksiin

$$\Omega_{2^{-k}} = \{x \in \Omega : d(x, X \setminus \Omega) \leq 2^{-k}\}.$$

Tästä saadaan luonnollinen ositus pallokokoelmalle $\mathcal{F}$ määrittelemällä

$$\mathcal{W}_k = \{B_i \in \mathcal{F} : z_i \in \Omega_{2^{-k}} \setminus \Omega_{2^{-k-1}}\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kaikilla $B_i \in \mathcal{W}_k$ pätee $B_i \subset \Omega_{2^{-k+1}}$, koska jos $x \in B_i$, niin

$$\begin{aligned} d(x, X \setminus \Omega) &\leq d(x, z_i) + d(z_i, X \setminus \Omega) \leq r_i + d(z_i, X \setminus \Omega) \\ &\leq \frac{56}{55} d(z_i, X \setminus \Omega) \leq 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Olkoon sitten $\lambda > 0$. Nyt

$$\begin{aligned} &\mu\left(\{x \in \Omega : |u - u_{5B_0}| > \lambda\}\right) \\ &\leq \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : |u - u_{5B_0}| > \lambda\}\right) \\ &\leq \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : |u - u_{5B_i}| > \frac{\lambda}{2}\}\right) + \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : |u_{5B_i} - u_{5B_0}| > \frac{\lambda}{2}\}\right) \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Koska $55B_i \subset \Omega$, ensimmäiseen summaan voidaan soveltaa John-Nirenberg-epäyhtälöä 4.4, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : |u - u_{5B_i}| > \frac{\lambda}{2}\}\right) \\ &\leq \sum_i c_1 e^{-c_2 \frac{\lambda}{2\|u\|_*}} \mu(5B_i) \\ &\lesssim e^{-c_2 \frac{\lambda}{2\|u\|_*}} \sum_i \mu(B_i) \\ &\leq e^{-c_2 \frac{\lambda}{2\|u\|_*}} \mu(\Omega) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Toista summaa varten arvioidaan lemman 4.5 avulla

$$|u_{5B_i} - u_{5B_0}| \leq a \# H(5B_i) \leq aK \log \frac{2r_0}{r_i}.$$

Tästä saadaan

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : |u_{5B_i} - u_{5B_0}| > \frac{\lambda}{2}\}\right) \\
&\leq \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : aK \log\frac{2r_0}{r_i} > \frac{\lambda}{2}\}\right) \\
&= \sum_i \mu\left(5B_i\right) \chi_{\{i : d(z_i, X\setminus\Omega) < 110 r_0 e^{-\frac{\lambda}{2aK}}\}}(i).
\end{aligned}
$$

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ sellainen, että $2^{-N-1} < 110 r_0 e^{-\frac{\lambda}{2aK}} \leq 2^{-N}$. Nyt

$$
\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_i \mu\left(5B_i\right) \chi_{\{i : d(z_i, X\setminus\Omega) < 2^{-N}\}}(i) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{B_i \in \mathcal{W}_k} \mu\left(5B_i\right) \chi_{\{i : d(z_i, X\setminus\Omega) < 2^{-N}\}}(i) \\
&= \sum_{k=N}^{\infty} \sum_{B_i \in \mathcal{W}_k} \mu\left(5B_i\right) \\
&\leq c_\mu^3 \sum_{k=N}^{\infty} \mu\left(\Omega_{2^{-k+1}}\right).
\end{aligned}
$$

Lemman 3.5 mukaan

$$
\begin{aligned}
S_2 &\lesssim \sum_{k=N-1}^{\infty} 2^{-k\alpha} \mu\left(\Omega\right) \\
&= 2^{\alpha(1-N)} \frac{1}{1-2^{-\alpha}} \mu\left(\Omega\right).
\end{aligned}
$$

Luvun N valinnan perusteella

$$
N \geq \frac{\lambda}{2aK} \log_2 e - \log_2(110 r_0) - 1,
$$

joten

$$
S_2 \lesssim e^{-\frac{\lambda}{2aK}} \mu\left(\Omega\right).
$$

Jälkimmäisessä estimaatissa luku a on muotoa $C\|u\|_*$, jossa C ei riipu funktiosta u. Voidaan siis valita uusi vain joukosta Ω ja tuplaavuusvakiosta riippuva vakio $c_3 > 0$ siten, että

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in \Omega : |u - u_{5B_0}| > \lambda\}\right) &\leq S_1 + S_2 \\
&\lesssim \left(e^{-c_2 \frac{\lambda}{2\|u\|_*}} + e^{-\frac{\lambda}{2aK}}\right) \mu\left(\Omega\right) \\
&\lesssim e^{-c_3 \frac{\lambda}{\|u\|_*}} \mu\left(\Omega\right)
\end{aligned}
$$

□

Kun John-Nirenberg-epäyhtälö on yleistetty H-ketjujoukkoihin, seuraa eksponentiaalinen integroituvuus helposti. Seuraava vaihe seuraa Björnien kirjan [3] esitystä.

Lause 4.8. *Olkoon $\Omega \subset X$ H-ketjujoukko, $L \geq 11$ ja $u \in BMO(\Omega)$. Silloin on olemassa $\epsilon > 0$ ja vain joukosta Ω sekä tuplaavuusvakiosta riippuva $0 < c < \infty$ siten, että*

$$\int_\Omega e^{\epsilon|u-u_\Omega|} \mathrm{d}\mu < c.$$

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Pyritään osoittamaan, että väitteen integraali on äärellinen. Varmistetaan ensin, että u_Ω on olemassa. Cavalierin periaatteen 2.5 mukaan

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u - u_{5B_0}| \mathrm{d}\mu &= \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \Omega : |u - u_{5B_0}|\} > \lambda\right) \mathrm{d}\lambda \\ &\leq \int_0^\infty c_3 e^{-c_4 \frac{\lambda}{\|u\|_*}} \mu\left(\Omega\right) \mathrm{d}\lambda < \infty,\end{aligned}$$

joten koska u on lokaalisti integroituva, saadaan

$$\left| \int_\Omega u \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_0^\infty c_3 e^{-c_4 \frac{\lambda}{\|u\|_*}} \mu\left(\Omega\right) \mathrm{d}\lambda + \mu\left(\Omega\right) |u_{5B_0}| < \infty.$$

Eksponenttifunktion konveksiudesta johtuen ja Cavalierin periaatteen avulla

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\frac{1}{2}\epsilon|u-u_\Omega|} \mathrm{d}\mu &\leq \int_\Omega e^{\epsilon|u-u_{5B_0}|} \mathrm{d}\mu \\ &= \int_0^\infty \mu\left(\{x \in \Omega : e^{\epsilon|u-u_{5B_0}|\}} > \lambda\right) \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^1 \mu\left(\{x \in \Omega : e^{\epsilon|u-u_{5B_0}|} > \lambda\}\right) \mathrm{d}\lambda \\ &\qquad + \int_1^\infty \mu\left(\{x \in \Omega : e^{\epsilon|u-u_{5B_0}|} > \lambda\}\right) \mathrm{d}\lambda \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Ensimmäinen integraali voidaan arvioida triviaalilla estimaatilla

$$I_1 \leq \int_0^1 \mu\left(\Omega\right) \mathrm{d}\lambda = \mu\left(\Omega\right).$$

Toista varten vaihdetaan muuttujaksi $\nu = \log \lambda$. Silloin lauseen 4.7 mukaan

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^\infty e^\nu \mu \left(\{x \in \Omega : \epsilon|u - u_{5B_0}| > \nu\}\right) \mathrm{d}\nu \\
&\leq c_3 \mu\left(\Omega\right) \int_0^\infty e^{\left(1 - c_4 \frac{1}{\epsilon\|u\|_*}\right)\nu} \mathrm{d}\nu \\
&= C < \infty,
\end{aligned}
$$

kun $\epsilon < \frac{c_4}{\|u\|_*}$. Siis kun $\epsilon < \frac{c_4}{2\|u\|_*}$, niin

$$
\int_\Omega e^{\epsilon|u-u_\Omega|} \mathrm{d}\mu \lesssim I_1 + I_2 < c < \infty
$$

$\square$

Luku 5

John-Nirenberg-avaruus

Artikkelissaan [16] John ja Nirenberg määrittelivät klassisen BMO-avaruuden lisäksi luokan laajempia funktioavaruuksia. Jokaiselle $p > 1$ saadaan *John-Nirenberg-avaruus* niistä euklidisen avaruuden $L^1(\Omega)$-funktioista u, joilla

$$\sup_{\mathcal{W}(\Omega)} \sum_{Q \in \mathcal{W}(\Omega)} |Q| \left(\fint_Q |u - u_Q| \right)^p = K_u^p < \infty,$$

kun supremum määrittyy joukon Ω osituksista $\mathcal{W}(\Omega)$ melkein pistevieraisiin kuutioihin. Joukko Ω oli alunperin kuutio. Saatuja avaruuksia merkitään $JN_p(\Omega)$, ja niille voidaan todistaa John-Nirenberg-epäyhtälö, mutta eksponentiaalisesti vaimenevan distribuutiofunktion sijaan saadaan heikko L^p-estimaatti.

John-Nirenberg-avaruuden määritelmässä puhutaan nimenomaan osituksista, joten ei ole lainkaan ilmeistä, mikä on niiden oikea lokaali vastine. Ilmeisesti ensimmäinen ehdotus määritelmälle euklidisissa avaruuksissa esitetään Hurri-Syrjäsen, Marolan ja Vähäkankaan työssä [14].

Tämän luvun tarkoituksena on yleistää sekä globaali että lokaali JN_p tuplaavaan metriseen mitta-avaruuteen, osoittaa ne samoiksi, esittää John-Nirenberg-epäyhtälön todistus ja yleistää sen euklidisissa avaruuksissa tunnettu laajenemisominaisuus metriseen mitta-avaruuteen.

5.1 Määritelmiä

John-Nirenberg-avaruuden yleistäminen metriseen mitta-avaruuteen vaatii joustamista määritelmässä esiintyvän osituksen suhteen, koska euklidisten kuutioiden kaltaiset rakenteet eivät ole enää yhtä luonnollisia metrisissä avaruuksissa. Artikkelissa [1] esitettiin määritelmä John-Nirenberg-avaruudelle pallossa B vaihtamalla ositus niihin pallokokoelmiin, jotka täyttävät lemman

4.2 oletukset pallon $\frac{1}{11}B$ suhteen. Tällä määritelmällä oli mahdollista todistaa John-Nirenberg-epäyhtälö pallosssa $\frac{1}{11}B$ samankaltaisella tekniikalla kuin minkä sovellus BMO-avaruuteen on lainattu lukuun 4. Kuitenkin jo samassa artikkelissa todettiin, että tulos saadaan myös käyttämällä MacManusin ja Perézin [19] sekä Franchin, Perézin ja Wheedenin [10] menetelmiä.

Seuraavan askeleen metristen John-Nirenberg-avaruuksien suhteen ottivat Berkovits ja Martell artikkelissaan [2]. Vaikka sen pääpaino on yleistetyissä Poincarén epäyhtälöissä, se parantaa John-Nirenberg-avaruuksien teoriaa esittämällä luonnollisemman määritelmän ja todistamalla John-Nirenberg-epäyhtälön määrittelypallon mielivaltaisen suurissa osapalloissa. Tässä Berkovitsin ja Martellin [2] määritelmässä joukon Ω ositukset korvataan seuraavilla *erillisten pallojen jaoilla.*

Määritelmä 5.1 (Erillisten pallojen jako)**.** Avoimen joukon $\Omega \subset X$ erillisten pallojen jako parametrilla $\tau \geq 1$ on korkeintaan numeroituva kokoelma palloja $\{B_i\}_i$ siten, että $\tau B_i \subset \Omega$ jokaisella i ja että pallot τB_i ovat erillisiä. Joukon erillisten pallojen jakojen kokoelmaa merkitään $\mathcal{E}_\tau(\Omega)$. Mikäli $\tau = 1$, se jätetään merkitsemättä.

Erillisten pallojen jakojen avulla voidaan määritellä globaalit JN_p-avaruudet vaatimalla jaon parametriksi $\tau = 1$ ja lokaalit vaatimalla jakoparametriksi $\tau > 1$.

Esitetään vielä metrinen versio Hurri-Syrjäsen, Marolan ja Vähäkankaan [14] lokaaleista jaoista euklidisissa avaruuksissa. Niiden avulla määritellyille John-Nirenberg-avaruuksille on valmiita tuloksia avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 5.2 (Lokaali rajoitetusti leikkaava jako)**.** Avoimen joukon $\Omega \subset X$ lokaali rajoitetusti leikkaava jako parametreilla $\tau \geq 1$ ja $M \in \mathbb{N}$ on korkeintaan numeroituva kokoelma palloja $\mathcal{D} = \{B_i\}_i$ siten, että $\tau B_i \subset \Omega$ jokaisella i ja että on olemassa vain avaruuden tuplaavuusvakiosta ja lokaalisuusvakiosta τ riippuva M_τ siten, että kun $B \in \mathcal{D}$ niin

$$\#\{C \in \mathcal{D} : C \cap B \neq \varnothing\} \leq M_\tau.$$

Lokaalien rajoitetusti leikkaavien jakojen kokoelmaa merkitään $\mathcal{L}_{\tau,M}(\Omega)$.

Esitetään sitten vielä yhteenvetona ne John-Nirenberg-avaruuksien määritelmät, joihin edellisillä jaoilla päädytään.

Määritelmä 5.3 (John-Nirenberg-avaruus)**.** Olkoon $\Omega \subset X$ avoin, $u \in L^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\tau \geq 1$ ja $M \in \mathbb{N}$. Määritellään

$$K^p_{u,\tau}(\Omega) = \sup_{\mathcal{D} \in \mathcal{E}_\tau(\Omega)} \sum_{B \in \mathcal{D}} \mu\,(B) \left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p$$

ja vaihtamalla erillisten pallojen jako lokaaliin rajoitetusti leikkaavien pallojen jakoon

$$K^p_{u,\tau,M}(\Omega) = \sup_{\mathcal{D}\in\mathcal{L}_{\tau,M}(\Omega)} \sum_{B\in\mathcal{D}} \mu(B) \left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p.$$

Näiden avulla määritellään globaali, lokaali ja leikkaava John-Nirenberg-avaruus

$$\begin{aligned} JN_p(\Omega) &= \{u \in L^1(\Omega) : K^p_u(\Omega) < \infty\}, \\ JN_{p,\tau}(\Omega) &= \{u \in L^1(\Omega) : K^p_{u,\tau}(\Omega) < \infty\} \quad \text{ja} \\ JN_{p,\tau,M}(\Omega) &= \{u \in L^1(\Omega) : K^p_{u,\tau,M}(\Omega) < \infty\}. \end{aligned}$$

5.2 Lokaalista globaaliin

Tässä osassa todistetaan, että kaikki määritelmän 5.3 avaruudet ovat samoja. Tähän päästään sisältymisketjulla

$$JN_p \subset JN_{p,\tau,M} \subset JN_{p,\tau} \subset JN_p,$$

jonka ensimmäinen sisältyminen voidaan yleistää suoraan Hurri-Syrjäsen, Marolan ja Vähäkankaan euklidisesta tuloksesta [14], kolmas kohta on ilmeinen ja toinen todistetaan seuraavaksi yksinkertaisella geometrisella argumentilla.

5.2.1 $JN_{p,\tau,M} = JN_{p,\tau}$

Koska rajoitetusti leikkaavassa jaossa jokaista palloa leikkaa tasaisesti rajoitettu määrä muita palloja, ajatuksena on esittää jako äärellisenä yhdisteenä erillisten pallojen jaoista. Tämän jälkeen väite seuraa helposti. Seuraava lemma sisältää kaiken oleellisen.

Lemma 5.4. *Olkoon $M \in \mathbb{N}$ ja $\mathcal{P}$ korkeintaan numeroituva kokoelma palloja siten, että jokainen $B \in \mathcal{P}$ kohtaa korkeintaan M saman kokoelman palloa. Silloin*

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{A}_i,$$

jossa $\mathcal{A}_i$ on mahdollisesti tyhjä kokoelma erillisiä palloja kaikilla $1 \le i \le M$.

Todistus. Jokaiselle $B \in \mathcal{P}$ määritellään kohtaajien joukko

$$L(B) = \{C \in \mathcal{P} : C \cap B \neq \varnothing\}.$$

Jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ puolestaan asetetaan

$$\mathcal{D}_n = \{B \in \mathcal{P} : \#L(B) = n\}.$$

Silloin selvästi $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{M} \mathcal{D}_i$. Jos $M = 1$, pallot ovat valmiiksi erillisiä, ja väite pätee.

Edetään induktiivisesti. Oletetaan, että väite pätee kun $M \leq m - 1$. Olkoon sitten $M = m$. Numeroidaan positiivisilla kokonaisluvuilla $\mathcal{D}_m = \{B_i\}_i$. Olkoon $V_1 = B_1$ ja $P_1 = \{C \in \mathcal{D}_m : C \cap B_1 \neq \varnothing\}$. Rakennetaan jono erillisiä palloja induktiivisesti. Oletetaan, että kokoelmasta $\mathcal{D}_m$ on valittu erilliset pallot $\{V_i\}_{i=1}^k = \mathcal{A}^k$ ja kullekin kohtaajien joukko

$$P_i = \{C \in \mathcal{D}_m \setminus \bigcup_{l=1}^{i-1} P_l : C \cap V_i \neq \varnothing\}.$$

Oletetaan ensin, että on olemassa pienin indeksi j siten, että

$$B_j \in \mathcal{D}_m \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P_i.$$

Silloin asetetaan $B_j = V_{k+1}$ ja $P_{k+1} = \{C \in \mathcal{D}_m \setminus \bigcup_{i=1}^k P_i : C \cap V_{k+1} \neq \varnothing\}$.

Jos indeksiä j ei ole, niin silloin $\mathcal{D}_m \subset \bigcup_{i=1}^k P_i$ eli jokaiselle $B \in \mathcal{D}_m \setminus \mathcal{A}^k$ on $P_i \ni B$ eli $V_i \in \mathcal{A}^k$ siten, että $B \cap V_i \neq \varnothing$. Silloin määritelmän mukaan $\#\{C \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{A}_k : C \cap B \neq \varnothing\} < m$, koska pallo on menettänyt vähintään yhden kohtaajan kokoelmaan $\mathcal{A}^k$. Asetetaan

$$\mathcal{P}_{m-1} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{A}^k.$$

Nyt $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{m-1} \cup \mathcal{A}^k$, jossa $\mathcal{A}^k$ on äärellinen kokoelma erillisiä palloja ja $\mathcal{P}_{m-1}$ on numeroituva kokoelma palloja, joiden kohtaamien kokoelman $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}^k$ pallojen lukumäärä on korkeintaan $m - 1$.

Mikäli indeksi j löytyy aina, määritellään $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}^k$. Otetaan sitten mikä tahansa $B_i \in \mathcal{D}_m \setminus \mathcal{A}$. Väitetään, että $B_i \in \bigcup_{l=1}^{\infty} P_l$. Oletetaan päinvastoin, että B_i ei kuulu mihinkään kokoelmaan P_l. Koska kokoelma $\mathcal{A}$ on numeroituvasti ääretön, siihen liitettyjen pallojen $B_k \in \mathcal{A}$ indekseillä k ei ole ylärajaa. On siis olemassa $V_{j'} = B_k \in \mathcal{A}$ siten, että $k > i$. Vastaoletuksen mukaan erityisesti $B_i \notin \bigcup_{l=1}^{j'} P_l$, joten

$$B_i \in \mathcal{D}_m \setminus \bigcup_{l=1}^{j'} P_l.$$

Pallo $V_{j'} = B_k$ valittiin kuitenkin ylläolevan ehdon täyttävistä sellaiseksi, että sillä on pienin mahdollinen indeksi. Koska $i < k$, on päädytty ristiriitaan. Siis $B_i \in \bigcup_{l=1}^{\infty} P_l$.

Nyt on olemassa indeksi l siten, että $B_i \in P_l$. Tällöin $B_i \cap V_l \neq \varnothing$, ja B_i on menettänyt ainakin yhden kohtaajan kokoelmaan $\mathcal{A}$. Määritellään $\mathcal{P}_{m-1} = \mathcal{D}_m \setminus \mathcal{A}$, jolloin $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{m-1} \cup \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ on numeroituva kokoelma erillisiä palloja, ja $\mathcal{P}_{m-1}$ on numeroituva kokoelma palloja, joista jokainen kohtaa korkeintaan $m-1$ kokoelman $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$ palloa.

Nyt

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{D}_n = \left(\bigcup_{n=1}^{m-1} \mathcal{D}_n \right) \cup \mathcal{D}_m = \left(\bigcup_{n=1}^{m-1} \mathcal{D}_n \right) \cup \mathcal{P}_{m-1} \cup \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{A}_i,$$

missä viimeinen yhtälö tulee induktio-oletuksesta. Siis väite pätee päitee kaikilla $M \in \mathbb{N}$. □

Seuraavaksi sijoitetaan pallokokoelman tilalle lokaali rajoitetusti leikkaavien pallojen jako ja muutetaan se äärelliseksi kokoelmaksi erillisten pallojen jakoja.

Lause 5.5. *Olkoon $\Omega \subset X$ avoin ja $1 < p < \infty$. Kaikilla $M \in \mathbb{N}$, $\tau \geq 1$ ja $u \in L^1(\Omega)$ pätee*

$$K^p_{u,\tau,M}(\Omega) \simeq_M K^p_{u,\tau}(\Omega)$$

eli

$$JN_{p,\tau,M}(\Omega) = JN_{p,\tau}(\Omega).$$

Todistus. Otetaan lokaali rajoitetusti leikkaavien pallojen jako $\mathcal{D} \in \mathcal{L}_{\tau,M}(\Omega)$. Tämä täyttää lemman 5.4 oletukset. Se voidaan jakaa siis osakokoelmiin $\mathcal{A}_i, i = 0, 1, \ldots M$ niin, että $\mathcal{A}_i$ koostuu erillisistä palloista. Nämä ovat lokaaleja erillisten pallojen osituksia samalla parametrillä τ. Siis jos $u \in L^1(\Omega)$, niin

$$\begin{aligned}\sum_{B \in \mathcal{D}} \mu(B) \left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p &= \sum_{i=1}^{M} \sum_{B \in \mathcal{A}_i} \mu(B) \left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p \\ &\leq M K^p_{u,\tau}(\Omega).\end{aligned}$$

Ottamalla supremum kaikista $\mathcal{D} \in \mathcal{L}_{\tau,M}(\Omega)$ saadaan

$$K^p_{u,\tau,M}(\Omega) \leq M K^p_{u,\tau}(\Omega).$$

Toinen suunta on selvä. Koska $\mathcal{E}_\tau(\Omega) \subset \mathcal{L}_{\tau,M}(\Omega)$, niin

$$\begin{aligned}
K^p_{u,\tau} &= \sup_{\mathcal{D}\in\mathcal{E}_\tau(\Omega)} \sum_{B\in\mathcal{D}} \mu(B) \left(\fint_B |u-u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p \\
&\leq \sup_{\mathcal{D}\in\mathcal{L}_{\tau,M}(\Omega)} \sum_{B\in\mathcal{D}} \mu(B) \left(\fint_B |u-u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p \\
&= K^p_{u,\tau,M}.
\end{aligned}$$

Yhdessä $K^p_{u,\tau,M}(\Omega) \simeq_M K^p_{u,\tau}(\Omega)$ kuten väitettiin. □

5.2.2 $JN_p = JN_{p,\tau,M}$

Lokaalista globaaliin tuloksen todistuksessa käytetään euklidisessa avaruudessa osituksen kuutioiden Whitneyn jakoa. Saatuja kuutioita pystytään lokaalisuusvaatimuksen puitteissa laajentamaan hieman, minkä varassa koko todistus lepää. Toinen tärkeä piirre on mahdollisuus järjestää jaon kuutiot ketjuihin, joita pystytään hallitusti uudelleenjärjestelemään.

Seuraavaksi yleistetään Hurri-Syrjäsen, Marolan ja Vähäkankaan [14] tulos, jolla liitettiin yksittäinen globaaliin ositukseen liittyvä kuutio alueen lokaaliin jakoon. Kuutio vaihdetaan luonnollisesti metriseen palloon. Sen lisäksi Whitneyn jako ja siihen liittyvä ketjuhajotelma korvataan Boman-ehdon palloilla. Tämä on luontevaa siinä mielessä, että aiempi todistus hyödynsi tietoa, että euklidinen pallo on John-alue.

Lemma 5.6. *Olkoon (X, d, μ) tuplaava metrinen mitta-avaruus, jonka kaikki pallot ovat Boman-ketjujoukkoja samoilla parametreilla. Olkoon myös $B \subset X$ metrinen pallo, $1 < p < \infty$ ja $u \in L^1(B)$. Merkitään $\mathcal{F}$ pallon B Boman-pallojen kokoelmaa. Silloin*

$$\left(\fint_B |u-u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p \lesssim \frac{1}{\mu(B)} \sum_{P\in\mathcal{F}} \mu(C_1P) \left(\fint_{C_1P} |u-u_{C_1P}| \mathrm{d}\mu \right)^p.$$

Todistus. Jaetaan arvioitava suure kahteen osaan. Merkitään pallon B Boman-keskuspalloa P^*, jolloin

$$\begin{aligned}
\int_B |u-u_B| \mathrm{d}\mu &\leq 2 \int_B |u-u_{C_1P^*}| \mathrm{d}\mu \\
&\leq 2 \sum_{P\in\mathcal{F}} \left(\int_{C_1P} |u-u_{C_1P}| \mathrm{d}\mu + \mu(C_1P) |u_{C_1P}-u_{C_1P^*}| \right) \\
&= 2 \sum_{P\in\mathcal{F}} \int_{C_1P} |u-u_{C_1P}| \mathrm{d}\mu + 2 \sum_{P\in\mathcal{F}} \mu(C_1P) |u_{C_1P}-u_{C_1P^*}|.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Aloitetaan jälkimmäisestä termistä. Jokaiselle P muodostetaan Boman-ehdon mukainen ketju $\mathcal{C}(P) = \{C_1 P_i\}_{i=0}^{k_P}$. Merkitään lisäksi $\mathcal{S}(P) = \{B \in \mathcal{F} : P \in \mathcal{C}(B)\}$. Tällä kokoelmalla on Boman-ehdosta johtuva ominaisuus

$$\bigcup_{B \in \mathcal{S}(P)} B \subset \lambda B. \tag{5.2}$$

Käyttäen määritelmän 3.6 pallojen leikkauksia koskevia ehtoja voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
\sum_{P \in \mathcal{F}} \mu(C_1 P)|u_{C_1 P} - u_{C_1 P^*}| &\leq \sum_{P \in \mathcal{F}} \mu(C_1 P) \sum_{i=1}^{k_P} |u_{C_1 P_i} - u_{C_1 P_{i-1}}| \\
&= \sum_{P \in \mathcal{F}} \mu(C_1 P) \sum_{i=1}^{k_P} \fint_{C_1 P_i \cap C_1 P_{i-1}} |u_{C_1 P_i} - u_{C_1 P_{i-1}}| \mathrm{d}\mu \\
&\leq \sum_{P \in \mathcal{F}} \mu(C_1 P) \sum_{i=1}^{k_P} \Bigg(\fint_{C_1 P_i \cap C_1 P_{i-1}} |u - u_{C_1 P_{i-1}}| \mathrm{d}\mu \\
&\qquad\qquad + \fint_{C_1 P_i \cap C_1 P_{i-1}} |u - u_{C_1 P_i}| \mathrm{d}\mu \Bigg) \\
&\lesssim \sum_{P \in \mathcal{F}} \mu(C_1 P) \sum_{i=1}^{k_P} \left(\fint_{C_1 P_{i-1}} |u - u_{C_1 P_{i-1}}| \mathrm{d}\mu + \fint_{C_1 P_i} |u - u_{C_1 P_i}| \mathrm{d}\mu \right) \\
&\lesssim \sum_{P \in \mathcal{F}} \mu(C_1 P) \sum_{P' \in \mathcal{C}(P)} \fint_{P'} |u - u_{P'}| \mathrm{d}\mu \\
&\lesssim \sum_{P' \in \mathcal{F}} \left(\sum_{P \in \mathcal{S}(C_1 P')} \mu(P) \right) \fint_{C_1 P'} |u - u_{C_1 P'}| \mathrm{d}\mu \\
&\lesssim \sum_{P' \in \mathcal{F}} \int_{C_1 P'} |u - u_{C_1 P'}| \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Viimeinen epäyhtälö käytti sisältymistä (5.2) ja toiseksi viimeinen vain järjesteli summan uudelleen: jokaisen pallon ja vastaavan ketjun sijaan summataan jokainen pallo ja ne pallot, joiden ketju kulkee edellisen läpi. Päädyttiin samaan muotoon kuin mikä epäyhtälön (5.1) ensimmäisellä termillä on.

Loppuosa väitteestä todistuu Hölderin epäyhtälöllä. Merkitään Hölderkonjugaattia $p' = \frac{p}{p-1}$. Nyt

$$\begin{aligned}
\sum_{P'\in\mathcal{F}} \int_{C_1P'} |u - u_{C_1P'}| \mathrm{d}\mu &= \sum_{P'\in\mathcal{F}} \mu\left(C_1P\right)^{\frac{1}{p'}} \mu\left(C_1P\right)^{-\frac{1}{p'}} \int_{C_1P'} |u - u_{C_1P'}| \mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\sum_{P'\in\mathcal{F}} \mu\left(C_1P\right) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{P'\in\mathcal{F}} \mu\left(C_1P'\right)^{1-p} \left(\int_{C_1P'} |u - u_{C_1P'}| \mathrm{d}\mu \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \mu\left(B\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{P'\in\mathcal{F}} \mu\left(C_1P'\right) \left(\fint_{C_1P'} |u - u_{C_1P'}| \mathrm{d}\mu \right)^p \right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

joten yhteensä

$$\left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p \lesssim \frac{1}{\mu\left(B\right)} \sum_{P\in\mathcal{F}} \mu\left(C_1P\right) \left(\fint_{C_1P} |u - u_{C_1P}| \mathrm{d}\mu \right)^p$$

kuten väitettiin. □

Edellisestä seuraa helposti puuttuva lokaalista globaaliin tulos, joka täydentää John-Nirenberg-avaruuksien ekvivalenssitodistuksen.

Lause 5.7. *Olkoot avaruuden (X, d, μ) pallot Boman-joukkoja kiinteillä parametreilla, olkoon Ω avoin, $1 < p < \infty$ ja $\tau \leq \frac{C_2}{C_1}$. Silloin kaikilla $M \in \mathbb{N}$ ja $u \in L^1(\Omega)$ pätee*

$$K^p_{u,\tau,M}(\Omega) \simeq_M K^p_u(\Omega)$$

eli

$$JN_{p,\tau,M}(\Omega) = JN_p(\Omega).$$

Siis John-Nirenberg-avaruuksien kaikki määritelmät 5.3 ovat yhtäpitäviä.

Todistus. Otetaan ensin M Boman-ehdon 3.6 mukaisesti ja $\tau \leq \frac{C_2}{C_1}$. Muodostetaan joukolle Ω erillisten pallojen globaali ositus $\mathcal{D} \in \mathcal{E}(\Omega)$. Silloin lemman 5.6 mukaan

$$\begin{aligned}
\sum_{B\in\mathcal{D}} \mu\left(B\right) \left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p &\lesssim \sum_{B\in\mathcal{D}} \mu\left(B\right) \cdot \frac{1}{\mu\left(B\right)} \sum_{P\in\mathcal{F}(B)} \mu\left(C_1P\right) \left(\fint_{C_1P} |u - u_{C_1P}| \mathrm{d}\mu \right)^p \\
&= \sum_{B\in\mathcal{J}} \mu\left(B\right) \left(\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \right)^p \\
&\leq K^p_{u,\tau,M},
\end{aligned}$$

koska erillisiin palloihin muodostettujen lokaalien rajoitetusti leikkaavien pallojen jakojen yhdiste on edelleen lokaali ja rajoitetusti leikkaava. Ottamalla supremum yli globaalien erillisten pallojen jakojen saadaan

$$K_u^p \lesssim K_{u,\tau,M}^p.$$

Toisaalta on selvää, että $K_{u,\tau}^p \lesssim K_u^p$, sillä lokaali erillisten pallojen jako kelpaa myös globaaliksi jaoksi. Aiemmin lauseessa 5.5 todistettiin, että $K_{u,\tau,M}^p \lesssim K_{u,\tau}^p$, joten nyt kaikki seminormit ovat ekvivalentteja, kun lokaalisuusvakio $\tau \leq \frac{C_2}{C_1}$. □

5.3 John-Nirenberg-epäyhtälö JN_p-avaruudelle

Tässä osiossa todistetaan John-Nirenberg-epäyhtälö $JN_p(\Omega)$-avaruudelle. Tavoitteena on arvio muotoa

$$\mu\left(\{x \in \Omega : |u - c| > \lambda\}\right) \leq \frac{K_u^p(\Omega)}{\lambda^p}.$$

Ensin esitetään Berkovitsin ja Martellin todistus lokaalille John-Nirenberg-epäyhtälölle palloon. Tämä voidaan yleistää globaaliksi epäyhtälöksi Boman-joukkoon käyttämällä lemmoja 5.4 ja 3.7.

5.3.1 Lokaali epäyhtälö pallossa

Seuraava todistus on Berkovitsin ja Martellin käsikirjoituksesta [2]. Todistuksen kaksi ensimmäistä lemmaa esitetään siinä selkeyden vuoksi, mutta niiden alkuperäiset versiot ovat MacManusin ja Pérezin artikkelista [19]. Koko tarkastelu liittyy palloon $B_0 \subset X$, joten se oletetaan jatkossa kiinnitetyksi. Kun $\delta > 0$, merkitään $\hat{B}_0 = (1+\delta)B_0$ ja määritellään pallokanta

$$\mathcal{B} = \{B : z(B) \in B_0 \quad \text{ja} \quad r_B \leq \delta r_0\}$$

sekä siihen liittyvä Hardy-Littlewood-maksimaalioperaattori $M_{\mathcal{B}}$. Jos $x \in B \in \mathcal{B}$, niin silloin

$$d(x, z_0) \leq d(x, z_B) + d(z_B, z_0) \leq r_B + r_0 \leq (1+\delta)r_0$$

eli $B \subset \hat{B}_0$.

Aloitetaan todistamalla yläraja korkeakeskiarvoisen pallon säteelle.

Lemma 5.8. *Olkoon $B \in \mathcal{B}$, $\lambda_0 = 9^D c_\mu^2 (1 + \delta^{-1})^D$ ja $f \geq 0$ lokaalisti integroituva. Tässä D on lemman 2.3 tuplaavuusdimensio.*

Jos

$$\lambda \geq \lambda_0 \fint_{\hat{B}_0} f \mathrm{d}\mu,$$

niin $r_B \leq \left(\frac{\delta}{9}\right) r_0$ *ja erityisesti* $9B \in \mathcal{B}$.

Todistus. Koska oletuksesta seuraa

$$\frac{1}{\lambda_0} \geq \frac{f_{\hat{B}_0}}{f_B} \geq \frac{\mu(B)}{\mu(\hat{B}_0)}$$

ja tuplaavuusdimensiolemmasta 2.3

$$\left(\frac{r_B}{r_{\hat{B}_0}}\right)^D \leq c_\mu^2 \frac{\mu(B)}{\mu(\hat{B}_0)},$$

niin käyttämällä vielä luvun λ_0 määrittelyä saadaan

$$r_B \leq c_\mu^{\frac{2}{D}} r_{\hat{B}_0} \left(\frac{\mu(B)}{\mu(\hat{B}_0)}\right)^{\frac{1}{D}} \leq c_\mu^{\frac{2}{D}} r_{\hat{B}_0} \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{D}} \leq \frac{c_\mu^{\frac{2}{D}}(1+\delta) r_0}{9 c_\mu^{\frac{2}{D}}(1+\delta^{-1})} = \frac{\delta}{9} r_0.$$

$\square$

Tämän teknisen yksityiskohdan jälkeen muodostetaan Calderón-Zygmund-tyyppinen jako epänegatiiviselle funktiolle.

Lemma 5.9. *Olkoon* $f \in L^1_{loc}(\hat{B}_0)$ *epänegatiivinen,* $M_{\mathcal{B}}$ *edellä määritelty maksimaalioperaattori,* $\Omega_\lambda = \{x \in \hat{B}_0 : M_{\mathcal{B}} f(x) > \lambda\} \neq \varnothing$ *ja* λ_0 *kuten edellisessä lemmassa.*

Jos

$$\lambda \geq \lambda_0 \fint_{\hat{B}_0} f \mathrm{d}\mu,$$

niin on olemassa numeroituva erillisten pallojen kokoelma $\{B_i\}_i$ *siten, että*

i. $\bigcup_i B_i \subset \Omega_\lambda \subset \bigcup_i 5B_i$,

ii. $9B_i \in \mathcal{B}$,

iii. $f_{B_i} > \lambda$ *ja*

iv. *mikäli* $\sigma > 0$ *ja* $\sigma B_i \in \mathcal{B}$, *niin* $f_{\sigma B_i} \leq \lambda$.

Todistus. Jokaiselle $x \in \Omega_\lambda$ määritellään

$$\tilde{r}_x = \sup\{r(B) : x \in B \in \mathcal{B} \quad \text{ja} \quad f_B > \lambda\}$$

ja valitaan pallo $x \in B_x \in \mathcal{B}$ siten, että $\frac{1}{2}\tilde{r}_x < r(B_x) \leq \tilde{r}_x$ ja $f_{B_x} > \lambda$. Lemman 2.2 mukaan on numeroituva erillisen pallojen kokoelma $\{B_i\}_i$, joka täyttää vaatimuksen (i). Vaatimus (ii) seuraa suoraan lemmasta 5.8 ja kohta (iii) on valintatavasta selvä. Neljännen (iv) kohdan oletuksen täyttävän pallon B_i säde on $\sigma r_i > \frac{\sigma}{2} r_x \geq r_x$, joten luvun r_x maksimaalisuuden nojalla väite pätee. □

Seuraavaksi todistetaan erikoistapaus Berkovitsin ja Martellin tuloksesta [2]. Alkuperäinen lause on yleisempi, mutta tässä mielenkiinnon kohteena on vain JN_p Poincarén epäyhtälöiden itseparantuvuusominaisuuksien sijaan, joten todistusta ja muotoilua on varaa selkeyttää lauseen yleisyyden kustannuksella.

Lause 5.10. *Olkoon $f \in L^1_{loc}(X)$ epänegatiivinen. Oletetaan, että jokaiselle pallolle $B \in \mathcal{B}$ on olemassa funktiot g^B ja h^B sekä vakio $\tilde{g}^B$ siten, että kaikille palloille yhteisellä $\gamma_1 > 0$ seuraavat ehdot täyttyvät:*

i. $f(x) \leq g^B(x) + h^B(x)$ *μ-melkein kaikilla $x \in B$,*

ii. $\|h\|_{L^\infty(B)} \leq \gamma_1 f_B$ *ja*

iii. $g_B \leq \tilde{g}^B$.

Määritellään viimeisen ehdon vakioon liittyvä maksimaalifunktio

$$G_{\mathcal{B}} f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}} \tilde{g}^B.$$

Silloin kaikilla $1 < p < \infty$

$$\|M_{\mathcal{B}} f\|^p_{L^{p,\infty}(\hat{B}_0)} \lesssim_{c_\mu} \|G_{\mathcal{B}} f\|^p_{L^{p,\infty}(\hat{B}_0)} + \mu(\hat{B}_0)(f_{\hat{B}_0})^p.$$

Todistus. Olkoon $K > 0$ toistaiseksi vapaa parametri. Oletetaan lemman 5.9 merkinnöillä $\lambda > \lambda_0 f_{\hat{B}_0}$ ja muodostetaan joukon Ω_λ peite saman lemman muokaisesti. Merkitään saatuja palloja $\{B_i\}_i$.

Näytetään aluksi, että kaikilla indekseillä i

$$\{x \in 5B_i : M_{\mathcal{B}} f(x) > K\lambda\} = \{x \in 5B_i : M_{\mathcal{B}}(f\chi_{9B_i})(x) > K\lambda\}. \tag{5.3}$$

Sisältyminen oikealta vasemmalle on selvää. Otetaan siis $x \in 5B_i$, joka kuuluu vasemmanpuoleiseen joukkoon. On olemassa $x \in B \in \mathcal{B}$ siten, että $f_B > K\lambda$. Väitetään, että $B \subset 9B_i$. Koska kaikilla $y \in B$ pätee

$$d(y, z_i) \leq d(y, z_B) + d(z_B, z_i) \leq r_B + 5r_i,$$

riittää näyttää, että $r_B \leq 3r_i$. Oletetaan päinvastoin, että $r_B > 3r_i$. Silloin $d(y, z_i) \leq r_B + 5r_i < 3r_B$. Seuraa

$$B \subset 3\frac{r_B}{r_i}B_i = \tilde{B}_i.$$

Koska toisaalta lemman 5.8 mukaan $r_B \leq \frac{\delta}{9}r_0$, niin

$$r(\tilde{B}_i) = 3r_B \leq \frac{\delta}{3}r_0 < \delta r_0,$$

mistä seuraa $\tilde{B}_i \in \mathcal{B}$. Siis lemman 5.9 mukaan $f_{\tilde{B}_i} \leq \lambda$. Valitaan $K \geq 3^D c_\mu^2$, jolloin tuplaavuusdimensiolemmasta 2.3 seuraa

$$f_B \leq \frac{\mu(\tilde{B}_i)}{\mu(B)} \fint_{\tilde{B}_i} f \mathrm{d}\mu \leq c_\mu^2 \left(\frac{3r_B}{r_B}\right)^D \lambda \leq K\lambda,$$

mikä on ristiriita. Siis on oltava $r_B \leq 3r_i$ ja $B \subset 9B_i$, joten yhtälö (5.3) on voimassa.

Olkoon $\gamma > 0$. Määritellään

$$E_\lambda = \{x \in \hat{B}_0 : M_{\mathcal{B}} f(x) > K\lambda, G_{\mathcal{B}} \leq \gamma\lambda\}.$$

Pallojen $\{B_i\}_i$ peiteominaisuudesta seuraa, että

$$\mu(E_\lambda) \leq \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : M_{\mathcal{B}} f(x) > K\lambda, G_{\mathcal{B}} \leq \gamma\lambda\}\right).$$

Voidaan tarkastella vain epätyhjiä joukkoja $E_\lambda \cap 5B_i$, koska tyhjät joukot hyväksyvät nollamittaisina kaikki seuraavat estimaatit triviaalisti. Jos siis $x \in E_\lambda \cap 5B_i$ niin silloin yhtälön (5.3), lauseen oletusten (i) ja (ii) sekä lemman 5.9 väitteen (iv) mukaan

$$\begin{aligned}
K\lambda &\leq M_{\mathcal{B}}(f\chi_{9B_i})(x) \\
&\leq M_{\mathcal{B}}(g^{9B_i}\chi_{9B_i})(x) + M_{\mathcal{B}}(h^{9B_i}\chi_{9B_i})(x) \\
&\leq M_{\mathcal{B}}(g^{9B_i}\chi_{9B_i})(x) + \gamma_1 f_{9B_i} M_{\mathcal{B}}(\chi_{9B_i})(x) \\
&\leq M_{\mathcal{B}}(g^{9B_i}\chi_{9B_i})(x) + \gamma_1\lambda.
\end{aligned}$$

Siis $(K - \gamma_1)\lambda < M_{\mathcal{B}}(g^{9B_i}\chi_{9B_i})(x)$. Parametrille K voidaan asettaa lisävaatimus $K > \gamma_1$ edellisen $K \geq 3^D c_\mu^2$ lisäksi.

Toisaalta maksimaalioperaattorille $M_{\mathcal{B}}$ on heikon tyypin $(1,1)$ estimaatti, joten tämän ja viimeisessä epäyhtälössä oletuksen (iii) mukaan

$$
\begin{aligned}
\mu\left(E_\lambda\right) &\leq \sum_i \mu\left(\{x \in 5B_i : M_{\mathcal{B}}(g^{9B_i}\chi_{9B_i})(x) > (K-\gamma_1)\lambda, G_{\mathcal{B}} \leq \gamma\lambda\}\right) \\
&\lesssim_{c_\mu} \sum_i \frac{1}{(K-\gamma_1)\lambda} \|g^{9B_i}\chi_{9B_i}\|_{L^1(\hat{B}_0)} \\
&\leq \sum_i \frac{\mu\left(9B_i\right)}{(K-\gamma_1)\lambda} \fint_{9B_i} g^{9B_i} \mathrm{d}\mu \\
&\lesssim_{c_\mu} \sum_i \frac{\mu\left(B_i\right)}{(K-\gamma_1)\lambda} \tilde{g}^{9B_i}.
\end{aligned}
$$

Koska on olemassa $x \in E_\lambda \cap 5B_i \subset E_\lambda \cap 9B_i$, niin joukon E_λ määrittely takaa, että $\tilde{g}^{9B_i} \leq G_{\mathcal{B}}(f)(x) \leq \gamma\lambda$. Koska pallot $B_i \subset \Omega_\lambda$ ovat lemman 5.9 vaatimusten mukaisesti erillisiä, saadaan

$$
\mu\left(E_\lambda\right) \lesssim_{c_\mu} \frac{\gamma}{K-\gamma_1} \mu\left(\Omega_\lambda\right)
$$

ja lopulta

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\Omega_{K\lambda}\right) &\leq \mu\left(\Omega_{K\lambda} \cap E_\lambda\right) + \mu\left(\Omega_{K\lambda} \cap E_\lambda^c\right) \\
&\lesssim_{c_\mu} \frac{\gamma}{K-\gamma_1} \mu\left(\Omega_\lambda\right) + \mu\left(\{x \in \hat{B}_0 : G_{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\gamma\}\right).
\end{aligned}
$$

Tämä arvio hoitaa tapauksen $\lambda \geq \lambda_0 f_{\hat{B}_0}$. Päinvastaisessa tilanteessa pätee triviaali

$$
\mu\left(\Omega_{K\lambda}\right) \leq \mu(\hat{B}_0) \leq \left(\frac{\lambda_0 f_{\hat{B}_0}}{\lambda}\right)^p \mu(\hat{B}_0),
$$

joten aina on voimassa

$$
\mu\left(\Omega_{K\lambda}\right) \lesssim_{c_\mu,\delta} \frac{\gamma}{K-\gamma_1} \mu\left(\Omega_\lambda\right) + \mu\left(\{x \in \hat{B}_0 : G_{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\gamma\}\right) + \left(\frac{f_{\hat{B}_0}}{\lambda}\right)^p \mu(\hat{B}_0).
$$

Todistus viimeistellään määrittelemällä

$$
\phi(N) = \sup_{0<\lambda<N} \lambda^p \mu\left(\Omega_\lambda\right),
$$

jolloin

$$
\begin{aligned}
\phi(N) &= K^p \sup_{0<\lambda<\frac{N}{K}} \lambda^p \mu\left(\Omega_{K\lambda}\right) \\
&\lesssim_{c_\mu,\delta} \frac{\gamma}{K-\gamma_1} \phi(N) + \|G_{\mathcal{B}}f\|^p_{L^{p,\infty}(\hat{B}_0)} + \mu(\hat{B}_0)(f_{\hat{B}_0})^p.
\end{aligned}
$$

Olkoon sitten $C_{c_\mu,\delta}$ edellisen epäyhtälön vakio. Valinnalla $\gamma < \frac{K-\gamma_1}{C_{c_\mu,\delta}}$ saadaan

$$\|M_{\mathcal{B}}f\|^p_{L^{p,\infty}(\hat{B}_0)} = \lim_{N\to\infty} \phi(N) \lesssim_{c_\mu,\delta} \|G_{\mathcal{B}}f\|^p_{L^{p,\infty}(\hat{B}_0)} + \mu(\hat{B}_0)(f_{\hat{B}_0})^p,$$

kuten väitettiin. □

Lauseen 5.10 eleganssi ilmenee täysin vasta sen sovelluksessa JN_p-avaruuteen, ja majoroivien funktioiden g ja h tulkinta käy selväksi seuraavasta todistuksesta.

Lause 5.11. *Olkoon $B_0 \subset \Omega$ pallo, $1 < p < \infty$ ja $u \in JN_p(\Omega)$. Silloin kaikilla $\lambda > 0$ pätee*

$$\mu\left(\{x \in B_0 : |u - u_{B_0}| > \lambda\}\right) \lesssim_{c_\mu,\delta} \frac{K_u^p(\hat{B}_0)}{\lambda^p}.$$

Todistus. Olkoon $f = |u - u_{B_0}|$. Jokaisella $B \in \mathcal{B}$ määritellään majoranttifunktiot

$$f \le |u - u_B| + |u_B - u_{B_0}| = g^B + h^B.$$

Lauseen 5.10 oletus (i) on selvä. Toinen oletus (ii) vakiolla $\gamma_1 = 1$ on myös ilmeinen

$$h^B = |u_B - u_{B_0}| \le \fint_B |u - u_{B_0}| \mathrm{d}\mu = f_B.$$

Kolmannen oletuksen vakio $\tilde{g}^B$ on luonnollisesti funktion u keskivärähtely keskiarvonsa ympärillä pallossa B, joten

$$G_{\mathcal{B}}f(x) = \sup_{x\in B\in\mathcal{B}} \tilde{g}^B = \sup_{x\in B\in\mathcal{B}} \fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu.$$

Lebesguen differentioituvuuslauseen 2.4 välittömänä seurauksena $M_{\mathcal{B}}f(x) \ge f(x)$ μ-melkein kaikilla $x \in B_0$. Soveltamalla lausetta 5.10 saadaan

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p,\infty}(B_0)} &\le \|M_{\mathcal{B}}f\|_{L^{p,\infty}(\hat{B}_0)}\\ &\lesssim_{c_\mu,\delta} \|G_{\mathcal{B}}f\|_{L^{p,\infty}(\hat{B}_0)} + \mu(\hat{B}_0)(f_{\hat{B}_0})^p.\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}&\sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in B_0 : |u - u_B| > \lambda\}\right)\\ &\lesssim_{c_\mu,\delta} \sup_{\lambda>0} \lambda^p \mu\left(\{x \in B_0 : G_{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\}\right) + \mu(\hat{B}_0)\left(\fint_{\hat{B}_0} |u - u_{\hat{B}_0}| \mathrm{d}\mu\right)^p. \quad (5.4)\end{aligned}$$

Jälkimmäinen termi voidaan arvioida suoraan JN_p-seminormilla $K_u^p(\hat{B}_0)$. Ensimmäistä varten olkoon $\lambda > 0$. Jokaiselle $x \in \{x \in \hat{B}_0 : G_{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\}$ on sellainen $B \in \mathcal{B}$, että

$$1 < \frac{1}{\lambda}\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu \quad \text{eli} \quad 1 < \left(\frac{1}{\lambda}\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu\right)^p. \tag{5.5}$$

Valitaan näistä lemman 2.2 mukainen numeroituva erillisten pallojen kokoelma $\mathcal{G}$. Silloin kokoelman peiteominaisuuden avulla voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
\mu\left(\{x \in \hat{B}_0 : G_{\mathcal{B}}f(x) > \lambda\}\right) &\lesssim_{c_\mu} \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \\
&< \sum_{B \in \mathcal{G}} \mu(B) \left(\frac{1}{\lambda}\fint_B |u - u_B| \mathrm{d}\mu\right)^p \\
&\leq \frac{1}{\lambda^p} K_u^p(\hat{B}_0).
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä epäyhtälöön (5.4) saadaan kaikille $\lambda > 0$

$$\mu\left(\{x \in B_0 : |u - u_{B_0}| > \lambda\}\right) \lesssim_{c_\mu, \delta} \frac{K_u^p(\hat{B}_0)}{\lambda^p},$$

kuten alunperin väitettiin. □

5.3.2 Globaali epäyhtälö Boman-joukossa

Seuraavaksi globalisoidaan estimaatti Boman-joukkoihin. Todistuksen idea on peräisin Franchin, Pérezin ja Wheedenin työstä [10]. He mainitsevat tutkimaansa funktionaaliin liittyvän heikon tyypin estimaatin laajenevan alueen lokaaleista palloista koko alueeseen siten, että koko alueen heikkoa L^p-normia majoroi summa palloittaisista estimaateista, kunhan alue on Boman. Tätä ei kuitenkaan todisteta, vaan viitataan todistuksen olevan lähes identtinen Chuan [8] tulokseen.

Chuan työ ei varsinaisesti liity mihinkään edellä käsiteltyyn Bomanin ketjuja lukuunottamatta. Siinä tutkitaan painotettuja Sobolevin epäyhtälöitä ketjualueissa. Tekniikka kuitenkin siirtyy suoraan heikon tyypin estimaateille, ja sen avulla saadaan muotoiltua lemma 3.7.

Myöhemmin Berkovits ja Martell [2] osoittivat, että Franchin, Perezin ja Wheedenin funktionaalit voi korvata John-Nirenberg-funktiolla ja niiden globaaleilla JN_p-seminormeilla. Näiden avulla saadaan distribuutiofunktiolle majorantti, joka on summa ketjupallojen globaaleista JN_p-seminormeista. Pallot kuitenkin leikkaavat, joten todistus tarvitsee vielä lemman 5.4.

Lause 5.12. *Olkoon* $\Omega \subset X$ *Boman,* $1 < p < \infty$ *ja* $u \in JN_p(\Omega)$. *Silloin jollakin* $c \in \mathbb{R}$ *pätee*

$$\mu\left(\{x \in \Omega : |u - c| > \lambda\}\right) \lesssim_{c_\mu, \Omega} \frac{K_u^p(\Omega)}{\lambda^p}$$

kaikilla $\lambda > 0$.

Todistus. Olkoon $\mathcal{F}$ joukon Boman-pallojen kokoelma ja $\lambda > 0$. Silloin

$$\begin{aligned}
\lambda^p \mu(\{x \in \Omega : |u - u_{C_1 B_*}| > \lambda\}) &\leq \sum_{B \in \mathcal{F}} \lambda^p \mu\left(\{x \in C_1 B : |u - u_{C_1 B_*}|\}\right) \\
&\lesssim_p \sum_{B \in \mathcal{F}} \lambda^p \mu\left(\{x \in C_1 B : |u - u_{C_1 B_*}| > \lambda\}\right) \\
&\qquad + \sum_{B \in \mathcal{F}} \lambda^p \mu\left(\{x \in C_1 B : |u_{C_1 B} - u_{C_1 B_*}| > \lambda\}\right) \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Toiselle summalle heikon $L^{p,\infty}$-kvasinormin määritelmä, lemma 3.7 ja lause 5.11 antavat

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_{B \in \mathcal{F}} \|u_{C_1 B} - u_{C_1 B_*}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1 B_1)} \lesssim \sum_{B \in \mathcal{F}} \|u - u_{C_1 B}\|^p_{L^{p,\infty}(C_1 B_1)} \\
&= \sum_{B \in \mathcal{F}} \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \mu\left(\{x \in C_1 B : |u - u_{C_1 B}| > \lambda\}\right) \\
&\lesssim \sum_{B \in \mathcal{F}} K_u^p(C_2 B)
\end{aligned}$$

Myös ensimmäinen summa arvioidaan lauseen 5.11 mukaisesti

$$S_1 \lesssim \sum_{B \in \mathcal{F}} K_u^p(C_2 B),$$

mikä on sama muoto kuin summan S_2 majorantilla. Bomanin ketjuehdon mukaan pallon kohtaamien muiden pallojen määrällä on tasainen yläraja, joten lemman 5.4 mukaan voidaan jakaa $C_2\mathcal{F}$ erillisten pallojen kokoelmiin $\mathcal{A}_k$, jolloin

$$S_1 + S_2 \lesssim \sum_{k=1}^{M} \sum_{C_2 B \in \mathcal{A}_k} K_u^p(C_2 B) \leq M K_u^p(\Omega).$$

Yhteensä saadaan haluttu lopputulos

$$\mu\left(\{x \in \Omega : |u - u_{C_1 B_*}| > \lambda\}\right) \lesssim \frac{K_u^p(\Omega)}{\lambda^p}.$$

□

Kirjallisuutta

[1] D. Aalto, L. Berkovits, O. E. Kansanen and Hong Yue, *John-Nirenberg lemmas for doubling measure*, arXiv:0910.1228.

[2] L. Berkovits and J. M. Martell, *On generalized Poincaré inequalities*, Preprint, 2013.

[3] A. Björn and J. Björn, *Nonlinear Potential theory on metric Spaces*, European Mathematical Society, 2011.

[4] J. Boman, *Lp-estimates for very strongly elliptic systems*, Report No. 29, Dept. of Math., Univ. of Stockholm, Sweden, 1982.

[5] S. M. Buckley, *Is the maximal function of a Lipschitz function continuous?*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24** (1999), 519-528.

[6] S. M. Buckley, *Inequalities of John-Nirenberg type in doubling spaces*, J. Anal. Math. **79** (1999), 215-240.

[7] S. Buckley, P. Koskela and G. Lu, *Boman equals John*, Proc. XVIth Rolf Nevanlinna Colloquium, de Gruyter, Berlin, 1996, 91-99.

[8] S-K. Chua, *Weighted Sobolev inequalities on domains satisfying the chain condition*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 449-457

[9] R.R. Coifman, G.Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homegènes*, Springer, Berlin, 1971.

[10] B. Franchi, C. Pérez and R. L. Wheeden, *Self improving properties of John-Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal. **153** (1) (1998), 108-146.

[11] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc, 2004.

[12] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on metric spaces*, Springer-Verlag, New-York, 2001.

[13] R. Hurri, *The John-Nirenberg inequality and a Sobolev inequality for general domains,*, J. Math. Anal. Appl. **175** (1993), 579-587.

[14] R. Hurri-Syrjänen, N. Marola and A. V. Vähäkangas, *Aspects of local to global results*, arXiv:1301.7273.

[15] F. John, *Rotation and strain*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 391-413.

[16] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415-426.

[17] O. E. Maasalo, *Global integrability of p-superharmonic functions on metric spaces*, J. Anal. Math. **106** (2008), 191-207.

[18] R. A. Macías and C. Segovia, *A Decomposition into Atoms of Distributions on spaces of Homogeneous Type*, Adv. Math. **33**, 271-309, (1979).

[19] P. MacManus and C. Pérez, *Generalized Poincaré inequalities: sharp self-improving properties*, Internat. Math. Res. Notices, **2** (1998), 101-116.

[20] H. M. Reimann, T. Rychener, *Funktionen beschränkter mittlerer Oszillation*, Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 487.

[21] W. Smith and D. A. Stegenga, *Exponential integrability of the quasihyperbolic metric in Hölder domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. **16** (1991), 345-360.

[22] S. G. Staples, *L^p-averaging domains in homogeneous spaces*, J. Math. Anal. Appl. **317** (2006), 550-564.