Unimon-kubitin epäresonanssiajo

Anna Vesimäki

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 17.10.2025

Työn ohjaaja

FM Mikko Tuokkola

Vastuuopettaja

Prof. Mikko Möttönen

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Copyright © 2025 Anna Vesimäki

The document can be stored and made available to the public on the open internet pages of Aalto University.
All other rights are reserved.

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Aalto-yliopisto, PL 11000, 00076 AALTO
www.aalto.fi
Tekniikan kandidaatintyön tiivistelmä

Tekijä Anna Vesimäki

Työn nimi Unimon-kubitin epäresonanssiajo

Koulutusohjelma Teknistieteellinen kandidaattiohjelma

Pääaine Teknillinen fysiikka **Pääaineen koodi** SCI3028

Työn ohjaaja FM Mikko Tuokkola

Vastuuopettaja Prof. Mikko Möttönen

Päivämäärä 17.10.2025 **Sivumäärä** 32+2 **Kieli** Suomi

Tiivistelmä

Kvanttimekaaniseen laskentaan perustuvalla uudenlaisella tietokoneella, kvanttitietokoneella, on potentiaalia kyetä ratkaisemaan tiettyjä monimutkaisia ongelmia, joihin parhaiden supertietokoneidenkaan laskentateho ei riitä. Tästä syystä toimivaa kvanttitietokonetta ja sen laskentayksikköä, kubittia, kehitetään nykyään lukuisissa yliopistoissa ja yrityksissä ympäri maailmaa. Yksi lupaavimmiksi osoittautuneista menetelmistä on käyttää kubittina suprajohtavaa virtapiiriä, josta voidaan muodostaa makroskooppinen kvanttimekaaninen kaksitilasysteemi.

Nopean laskennan mahdollistamiseksi yhden kubitin operaatiot eli kvanttiportit on toteutettava nopeilla pulsseilla. Riittävän tarkan operaation saavuttamiseksi suprajohtaville kubiteille käytetään usein heikkoa kapasitiivista kytkentää ulkoiseen resonaattoriin, jolloin tavoiteltu nopeus saavutetaan pulssin tehoa kasvattamalla. Suuri teho voi kuitenkin aiheuttaa kubitin lämpenemistä, mikä heikentää sen koherenssia sekä operaation tarkkuutta. Tässä työssä ongelman ratkaisuksi esitetään kubitin ajamista tyypillisen resonanssialueen sijaan epäresonanssissa, jolloin pulssin kesto on mahdollista saada lyhenemään hyvin nopeasti ajotehon kasvaessa. Lisäksi epäresonanssiajossa kubitin ja ulkoisen resonaattorin väliin voidaan lisätä kubitin taajuuden estävä suodatin, mikä parantaa kubitin elinaikaa merkittävästi. Työssä tutkitaan numeerisesti simuloiden kahden epäresonanssimenetelmän, aliharmonisen ajon sekä kahta ajotaajuutta hyödyntävän nk. kahden taajuuden ajon, toimivuutta unimon-kubitilla, joka on Aalto-yliopistossa kehitetty lupaava suprajohtava kubitti. Tuloksia verrataan unimonin resonanssiajoon.

Tulokset osoittavat, että tutkituissa epäresonanteissa ajoalueissa kvanttiportin nopeutta voidaan kasvattaa vain pienellä lisäyksellä ajojännitteeseen, mikä vahvistaa epäresonanssiajon potentiaalia resonanssiajoon nähden. Unimonille lupaavimmalta ajomenetelmältä vaikuttaa kahden taajuuden ajo, sillä tällä menetelmällä saavutetaan lähes resonanssiajoa vastaava porttien tarkkuus. Tarkkuutta voidaan yhä parantaa optimoimalla käytettäviä ajotaajuuksia, jolloin kahden taajuuden ajo nousee vahvuuksiensa ansiosta erittäin varteenotettavaksi menetelmäksi unimonin ajamiseen.

Avainsanat Suprajohtava kubitti, unimon, epäresonanssiajo, aliharmoninen ajo, kahden taajuuden ajo

Sisällys

Tiivistelmä **3**

Sisällys **4**

Symbolit ja lyhenteet **5**

1 Johdanto **6**

2 Teoreettinen tausta **7**
2.1 Suprajohtavat kubitit ja kvanttipiirit 7
2.2 Schrödingerin yhtälön ratkaiseminen numeerisesti 9
2.3 Resonanssi- ja epäresonanssiajo 10

3 Tutkimusmenetelmät **13**
3.1 Unimonin Lagrangen funktio 13
3.2 Unimonin Hamiltonin funktio 17
3.3 Numeeriset menetelmät 19

4 Tulokset **22**
4.1 Rabi-taajuus 22
4.2 AC Stark -siirtymä 24
4.3 Vuoto laskennallisen avaruuden ulkopuolelle 26

5 Johtopäätökset **28**

A Kahden taajuuden ajon teoria transmonille **33**

Symbolit ja lyhenteet

Symbolit

h	Planckin vakio	$6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ Js
$\hbar$	redusoitu Planckin vakio	$h/(2\pi)$
e	alkeisvaraus	$1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C
Φ_0	magneettivuon kvantti	$h/(2e)$
$\lvert\psi\rangle$	kvanttimekaaninen tilavektori	
$\lvert 0\rangle$, $\lvert \mathrm{g}\rangle$	kubitin perustila	
$\lvert 1\rangle$, $\lvert \mathrm{e}\rangle$	kubitin viritystila	
$\hat{H}$	Hamiltonin operaattori	
ω_q	kubitin taajuus	
ω_d	ajotaajuus	
α	epäharmonisuus	
Ω_R	Rabi-taajuus	
δ	AC Stark -siirtymä	

Lyhenteet

CPW	kaksiulotteinen aaltoputki	*coplanar waveguide*
AC	vaihtovirta	*alternating current*
RWA	pyörivän aallon approksimaatio	*rotating wave approximation*

1 Johdanto

Kvanttitietokoneiden kehitys sai alkunsa 1980-luvulla, kun fyysikot kuten Richard Feynman ja David Deutsch esittivät ajatuksen kvanttimekaniikan periaatteita hyödyntävästä laskentajärjestelmästä [1, 2]. Varhaisessa vaiheessa tutkimus oli pitkälti teoreettista, mutta 1990-luvulla kehitys sai vauhtia, kun muiden muassa Peter Shor ja Lov Grover osoittivat algoritmeillaan, että kvanttitietokone voisi ratkaista tietyt ongelmat huomattavasti klassista tietokonetta nopeammin [3–5]. Viime vuosikymmenten aikana kvanttiteknologian kehitys on kiihtynyt entisestään, ja lukuisten sovelluskohteiden, kuten lääketieteen, kryptografian ja monimutkaisten laskentaongelmien optimoinnin odotetaan hyötyvän kvanttilaskennasta tulevaisuudessa [6–8].

Kvanttitietokoneen potentiaali perustuu sen klassisesta tietokoneesta poikkeavaan laskentaperiaatteeseen. Kubitilla eli kvanttilaskennan perusyksiköllä on perustila $|0\rangle$ ja viritystila $|1\rangle$, jotka vastaavat klassisen tietokoneen bitin kahta arvoa 0 ja 1. Toisin kuin klassinen bitti, kubitti voi perustilan ja viritystilan lisäksi olla niin kutsutussa superpositiotilassa, joka on mielivaltainen lineaarikombinaatio kyseisistä tiloista. [9] Käytännössä kubitti on mahdollista toteuttaa monin tavoin, joista lupaavimpina pidetään ioniloukkuja sekä suprajohtavia virtapiirejä [10, 11]. Keinotekoisiksi atomeiksikin kutsuttujen suprajohtavien kubittien energiaspektri muistuttaa atomin energiatiloja, ja kubitin tiloina $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ käytetään usein spektrin kahta alinta energiatilaa. Yksi suprajohtavien kubittien merkittävä etu on niiden energiaspektrin muokattavuus, sillä kubitin ominaisuudet riippuvat virtapiirin komponenttien parametreista, jotka voidaan säätää halutunlaisiksi. [11]

Suprajohtavien kubittien tilaa säädellään mikroaaltotaajuuksilla toimivalla ulkoisella sähkömagneettisella kentällä [12]. Halutut operaatiot eli kvanttiportit toteutetaan valitsemalla ajavalle sähkömagneettiselle pulssille sopiva kesto ja taajuus. Ulkoisen kentän kapasitiivisessa kytkennässä operaatioista saadaan tyypillisesti tarkempia heikentämällä käytettyä kytkentää, mutta tällöin tarvittavat pulssit pitenevät. Pulssien kestoa voidaan lyhentää kasvattamalla kytkennässä käytettyä tehoa, mikä puolestaan voi aiheuttaa lämpenemistä heikentäen kubitin koherenssia. [13, 14] Eräs ratkaisu ongelmaan on ajaa kubittia yleisesti käytetyn resonanssiajon sijaan sopivalla epäresonanssiajomenetelmällä, jossa pulssin kesto lyhenee hyvin nopeasti ajotehon kasvaessa [15]. Epäresonanssiajo myös mahdollistaa sen, että resonanssitaajuudella fotonien siirtyminen kubitin ja ajavan resonaattorin välillä voidaan estää sopivalla suodattimella, mikä kasvattaa kubitin elinaikaa huomattavasti [14].

Tässä työssä tutkitaan kahden erilaisen epäresonanssiajomenetelmän, aliharmonisen ajon ja työssä esiteltävän kahden taajuuden ajon, toimivuutta Aalto-yliopiston ja IQM:n yhteistyössä kehitetyn unimon-kubitin ajossa. Tällä lupaavalla suprajohtavalla kubitilla on useita hyviä ominaisuuksia, kuten korkea epäharmonisuus, varauksista johtuvan matalataajuisen kohinan täydellinen sietokyky sekä vuosta johtuvan kohinan osittainen sietokyky [16]. Tutkimus toteutetaan numeerisesti simuloiden. Työn rakenne on seuraava: Luvussa 2 esitellään suprajohtavien kubittien perusperiaatteita sekä työssä käytetyt ajomenetelmät. Luvussa 3 tarkastellaan unimonin simuloimisessa käytettyä matemaattista ja numeerista mallia, ja saatuja tuloksia käsitellään luvussa 4. Tulosten merkitystä arvioidaan luvussa 5, joka päättää tutkielman.

2 Teoreettinen tausta

Tässä luvussa käsitellään työn kannalta olennaista teoriaa. Ensimmäisessä alaluvussa esitellään kubittien perusominaisuuksia sekä suprajohtavien kubittien käytännön toteutusta. Toisessa alaluvussa perehdytään Schrödingerin yhtälön numeeriseen ratkaisemiseen ja tarkastellaan lyhyesti Floquet'n teorian hyödyntämistä siinä. Kolmannessa alaluvussa esitellään ajetuille kubiteille olennaiset käsitteet Rabi-taajuus ja AC Stark -siirtymä työssä käytettävien ajotaajuusalueiden yhteydessä.

2.1 Suprajohtavat kubitit ja kvanttipiirit

Kvanttitietokoneen laskennallinen yksikkö eli kubitti on kvanttimekaaninen systeemi, jonka laskennallinen Hilbertin avaruus $\mathcal{H}$ voidaan virittää ortogonaalisilla tiloilla $|0\rangle$ ja $|1\rangle$. Kubitin tilaa kuvaa kompleksinen tilavektori $|\psi\rangle$, joka on lineaarikombinaatio kubitin ominaistiloista,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\,, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,, \tag{1}$$

missä kertoimet α ja β toteuttavat normalisointiehdon $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. [12]

Kubitin laskennallisina ominaistiloina $|0\rangle$ ja $|1\rangle$ käytetään usein kvanttimekaanisen systeemin energiatiloja. Vaikka laskennallisia tiloja on vain kaksi, myös useita energiatiloja omaava kvanttimekaaninen systeemi voi toimia kubittina, mikäli systeemistä on mahdollista erotella kaksi energiatilaa. Yleensä kubitin tiloiksi valitaan kaksi alinta energiatilaa. Nämä vastaavat systeemille ominaisen Hamiltonin funktion $\hat{H}$ ominaistiloja $|0\rangle$ ja $|1\rangle$, joiden ominaisarvoyhtälön

$$\hat{H}|i\rangle = E_i|i\rangle\,, \quad i = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

mukaisille ominaisarvoille E_i pätee

$$E_i < E_{i+1}\,, \quad i = 0, 1, 2, ...\,. \tag{3}$$

Tilaa $|0\rangle$ kutsutaan kubitin perustilaksi $|\mathrm{g}\rangle$ (engl. *ground state*) ja tilaa $|1\rangle$ ensimmäiseksi viritystilaksi $|\mathrm{e}\rangle$ (engl. *first excited state*). Kubitin laskennallisen avaruuden ulkopuolelle jää toinen viritystila $|\mathrm{f}\rangle$ sekä korkeammat energiatilat.

Suprajohtavat kubitit perustuvat kvanttimekaaniseen harmoniseen värähtelijään, jollainen voidaan muodostaa esimerkiksi kuvan 1(a) LC-piirillä [12]. Tämä ilmenee LC-piirin Hamiltonin funktiosta [11]

$$\hat{H}_{\mathrm{LC}} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{\hat{\phi}^2}{2L}\,, \tag{4}$$

joka on summa piirin kapasitiivisesta ja induktiivisesta energiasta. Kaavassa (4) C ja L kuvaavat piirin kapasitanssia ja induktanssia. Kvanttimekaaniset operaattorit $\hat{Q}$ ja $\hat{\phi}$ on määritelty jatkuvien vuo- ja varausmuuttujien [11]

$$\phi = \int_{-\infty}^{t} V(t')\,\mathrm{d}t'\,, \tag{5}$$

$$Q = \int_{-\infty}^{t} I(t')\,\mathrm{d}t' \tag{6}$$

avulla siten, että ne toteuttavat kanonisen kommutaatiorelaation [11]

$$\left[\hat{\phi}, \hat{Q}\right] = \hat{\phi}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{\phi} = \mathrm{i}\hbar\,, \tag{7}$$

missä $\hbar = h/(2\pi)$ on redusoitu Planckin vakio. Kvanttimekaanisena harmonisena värähtelijänä LC-piirillä on ääretön määrä energiatiloja tasavälein [17]. Koska peräkkäisten energiatilojen erotus $E_j - E_i = \hbar/\sqrt{LC}$ on sama kaikilla tilapareilla E_i ja E_j, systeemistä ei voida erottaa kahta tilaa ja käyttää niitä kubitin laskennallisina tiloina.

Kuvassa 1(b) LC-piirin kela on korvattu Josephsonin liitoksella, joka on epälineaarinen induktiivinen elementti. Josephsonin liitos koostuu kahdesta suprajohtavasta elektrodista, joita erottaa ohut eristekerros [12]. Elementin epälineaarisuuden aiheuttaa sen sinimuotoinen induktiivinen energia $-E_\mathrm{J}\cos\left(2\pi\hat{\phi}/\Phi_0\right)$, missä E_J on Josephsonin energia ja $\Phi_0 = h/(2e)$ on magneettivuon kvantti [18]. Tässä e viittaa alkeisvaraukseen. Josephsonin liitoksella on myös levymäisestä rakenteestaan johtuva kapasitiivinen energia, joka vastaa kondensaattorin energiaa kapasitanssilla C_J.

Joshepsonin liitos tekee harmonisesta värähtelijästä epäharmonisen, jolloin sen energiatilojen välisistä etäisyyksistä tulee erisuuret. Tällöin kahden alimman energiatilan erotus $\hbar\omega_{01} = E_1 - E_0$ eroaa muista mahdollisista energiasiirtymistä, ja tilat voidaan erottaa kubitin laskennallisiksi tiloiksi $|0\rangle$ ja $|1\rangle$. Taajuutta ω_{01} kutsutaan kubitin taajuudeksi, ja sitä merkitään usein symbolilla ω_q. Yksinkertaisimman mahdollisen transmon-kubitin piirikaavio onkin kuvan 1(b) mukainen [11].

Tässä työssä tarkasteltava unimon-kubitti perustuu molemmista päistään maadoitettuun kaksiulotteiseen aaltoputkiresonaattoriin (CPW-resonaattori, engl. *coplanar waveguide resonator*). Resonaattorin keskimmäiseen johtimeen on lisätty Josephsonin liitos, joka tekee resonaattorin energiatiloista epäharmonisia. [16] CPW-resonaattorilla on useita erillisiä moodeja, mikä tekee unimonista monimoodisen kubitin [19]. Tästä johtuen unimonin operoimisessa voi hyödyntää useampaa moodia samanaikaisesti [20]. Tässä työssä kubittina käytetään kuitenkin vain unimonin pienimmän taajuuden moodia, ja laskennallisen avaruuden virittävät sen kaksi alinta energiatilaa. Unimonin piirikaavio esitellään luvussa 3.1.

Kuva 1. (a) Piirikaavio LC-piiristä, joka sisältää kelan (induktanssi L) ja kondensaattorin (kapasitanssi C). (b) Kondensaattorista (kapasitanssi C) ja Josephsonin liitoksesta koostuva piiri. Josephsonin liitosta kuvaa sen kapasitanssi C_J ja Josephsonin energia E_J. Molemmissa piireissä symboli ϕ kuvaa vuota kyseisessä solmussa.

2.2 Schrödingerin yhtälön ratkaiseminen numeerisesti

Kvanttimekaanisen systeemin aikakehitys määräytyy Schrödingerin yhtälöstä [17]

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle\,, \tag{8}$$

missä $\hat{H}(t)$ on systeemin Hamiltonin funktio ja $|\psi(t)\rangle$ systeemin tilavektori ajanhetkellä t. Jos Hamiltonin funktio ei riipu ajasta, yhtälöstä tulee ensimmäisen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö, jolla on analyyttinen ratkaisu

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\mathrm{i}\hat{H}\,(t-t_0)/\hbar}|\psi(t_0)\rangle \tag{9}$$

tunnetun hetkellisen tilan $|\psi(t_0)\rangle$ avulla ilmaistuna.

Dynaamisissa systeemeissä, kuten ajetuissa kubiteissa, Hamiltonin funktio kuitenkin usein riippuu ajasta, jolloin systeemin aikakehityksen ratkaiseminen hankaloituu. Analyyttisen ratkaisun puuttuessa Schrödingerin yhtälö voidaan ratkaista numeerisesti hetkellä t tunnetun alkutilan $|\psi(t_0)\rangle$ suhteen jakamalla aikaväli $[t_0, t]$ riittävän pieniin jaksoihin Δt, joissa systeemin Hamiltonin funktio approksimoidaan vakioksi. Tällöin tilan ratkaisemisessa ajanhetkellä t voidaan hyödyntää aikariippumattoman Schrödingerin yhtälön ratkaisua. Tila hetkellä $t_0 + \Delta t$ on yhtälön (9) perusteella

$$|\psi(t_0 + \Delta t)\rangle \approx e^{-\mathrm{i}\hat{H}(t_0+\Delta t/2)\,\Delta t/\hbar}|\psi(t_0)\rangle\,,$$

kun Hamiltonin funktio aikavälillä $[t_0, t_0+\Delta t]$ oletetaan vakioksi, joka vastaa funktion arvoa välin puolessavälissä. Laskemalla samalla menetelmällä systeemin tila jokaisella aika-askeleella tilaksi hetkellä t saadaan

$$|\psi(t)\rangle \approx \left[\prod_{n=0}^{N-1} e^{-\mathrm{i}\hat{H}(t_{N-1-n}+\Delta t/2)\,\Delta t/\hbar}\right]|\psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t,\,t_0)|\psi(t_0)\rangle\,, \tag{10}$$

missä $t_n = t_0 + n \times \Delta t$ ja $N = (t - t_0)/\Delta t$. [21]

Edellä esiteltyä numeerista ratkaisumenetelmää voidaan nopeuttaa merkittävästi Floquet'n teorian avulla, jos systeemin Hamiltonin funktio on periodinen. Tällöin on olemassa jaksonaika T, jolle kaikilla ajanhetkillä t pätee $\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$. Yhtälön (10) mukainen yhden jakson aikakehitystä vastaava operaattori $\hat{U}(t_0+T, t_0)$ on Hamiltonin jaksollisuudesta johtuen sama kaikille jaksoille $[t_0 + k \times T, t_0 + (k+1) \times T]\,,\ k \in \mathbb{Z}\,,$ joten systeemin tilaksi hetkellä $t = t_0 + n \times T$ saadaan [22]

$$|\psi(t)\rangle \approx \hat{U}(t_0 + T, t_0)^n|\psi(t_0)\rangle\,. \tag{11}$$

Floquet'n teoria on erityisen hyödyllinen, jos Hamiltonin jaksonaika T on pieni systeemin tilojen aikakehityksen mittakaavassa.

2.3 Resonanssi- ja epäresonanssiajo

Kvanttimekaaniseen laskentaan ei riitä pelkkä toimiva kubitti, vaan sen kvanttitilaa täytyy pystyä myös kontrolloimaan. Suprajohtaville kubiteille tämä on mahdollista kytkemällä kubitti ulkoiseen resonaattoriin, joka luo kubitille ulkoisen sähkömagneettisen kentän [12]. Kubitti vuorovaikuttaa kentän kanssa absorboimalla ja emittoimalla fotoneja, jolloin sen kvanttitila muuttuu. Ulkoisen resonaattorin parametreja säätelemällä kubittia ajavalle oskilloivalle jännitteelle voidaan valita sellainen taajuus ja amplitudi, että kubitin tilassa tapahtuu haluttu muutos, esimerkiksi siirtymä perustilalta $|\mathrm{g}\rangle$ ensimmäiselle viristystilalle $|\mathrm{e}\rangle$. Muun muassa tämä niin kutsuttu ge-siirtymä voidaan toteuttaa usealla eri ajotaajuudella hyödyntämällä erilaisia fysikaalisia prosesseja.

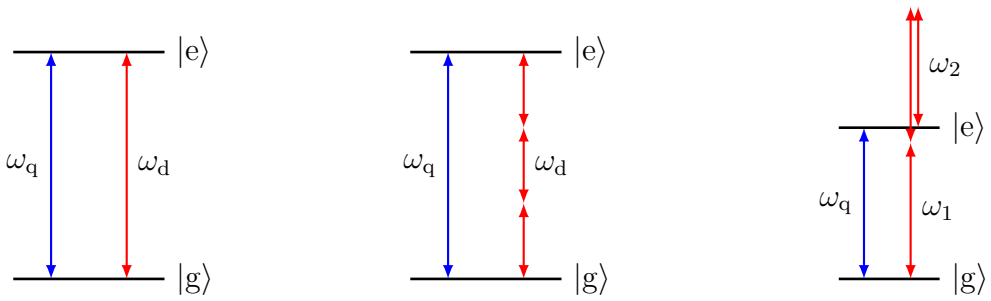
Yleisimmin käytetyssä ajomenetelmässä ajotaajuus ω_d on lähellä kubitin taajuutta ω_q, jolloin puhutaan resonanssiajosta. Kuvassa 2(a) havainnollistetussa prosessissa yksittäinen fotoni virittää perustilassa olevan kubitin seuraavalle energiatilalleen tietyllä todennäköisyydellä, joka vaihtelee sinimuotoisesti. Riittävän pitkä oskilloiva ajopulssi saa kubitin siirtymään myös takaisin perustilalleen, minkä vuoksi kubitin tila värähtelee näiden kahden energiatilan välillä. Tätä kutsutaan Rabi-oskillaatioksi. [17]

Kuvissa 2(b) ja 2(c) esitellään kaksi erilaista epäresonanssiajomenetelmää, joissa ajava taajuus eroaa selvästi kubitin taajuudesta. Aliharmonisessa ajossa (engl. *subharmonic drive*) kubittia ajetaan noin kolmasosalla kubitin taajuudesta, jolloin kubitti tarvitsee virittyäkseen samanaikaisesti kolme fotonia ajavasta sähkömagneettisesta aallosta [15]. Myös kahden taajuuden ajoksi tässä työssä kutsuttu kuvan 2(c) ajomenetelmä perustuu kolmen fotonin prosessiin, mutta kubitin tilan virittämiseen käytetään kahta fotonia taajuudella ω_1 ja yhtä taajuudella ω_2. Fotonien taajuuksien on toteutettava relaatio $2\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_\mathrm{q}$.

Ajetun kubitin Hamiltonin funktio riippuu ajasta ja voidaan ilmaista muodossa [14]

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)\,, \tag{12}$$

missä $\hat{H}_0$ vastaa ajamattoman kubitin Hamiltonin funktiota. Ajotermin $\hat{H}'(t)$ aikariippuvuus seuraa ajojännitteestä $V(t)$, ja termin voidaan olettaa olevan muotoa



(a) Resonanssiajo. (b) Aliharmoninen ajo. (c) Kahden taajuuden ajo.

Kuva 2. Havainnekuva ge-siirtymän toteuttamisesta eri ajotaajuuksilla. Kubitin taajuus on ω_q. Kubittia voidaan ajaa taajuudella (a) $\omega_\mathrm{d} \approx \omega_\mathrm{q}$, (b) $\omega_\mathrm{d} \approx \omega_\mathrm{q}/3$ tai (c) kahdella erisuurella taajuudella ω_1 ja ω_2, kun yhtälö $2\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_\mathrm{q}$ pätee.

$\hat{H}'(t) = \hat{M}V(t)$, missä $\hat{M}$ on aikariippumaton operaattori. Yhteen ajotaajuuteen perustuvat resonanssiajo ja aliharmoninen ajo voidaan toteuttaa oskilloivalla ajojännitteellä

$$V(t) = V_{\max} \sin(\omega_{\mathrm{d}} t)\,, \tag{13}$$

missä $V_{\max}$ on jännitteen amplitudi. Kaksitilasysteemeille, jollainen kubitti ideaalisesti on, pätee relaatio [11]

$$M_{0,1} V_{\max} = \hbar \Omega_{\mathrm{R}}\,, \tag{14}$$

missä $M_{0,1}$ kuvaa operaattorin $\hat{M}$ ge-siirtymään liittyvää elementtiä ja Ω_{R} on Rabi-oskillaation taajuus resonanssissa. Näin ollen resonanssiajon Rabi-taajuus on suoraan verrannollinen ajojännitteen amplitudiin.

Tässä työssä mallinnettavalla unimonilla eri ajoalueita ei ole juuri tutkittu, joten tuloksia verrataan transmoniin, joka on laajasti tunnettu suprajohtava kubitti [23]. Transmonin aliharmonisessa ajossa kubitin tilojen oskillaatio eli Rabi-oskillaatio tapahtuu taajuudella [14]

$$\Omega_{\mathrm{R}}^{\mathrm{sub}} = \frac{2\alpha}{3} \left| \frac{\omega' \Omega_{\mathrm{R}}}{\omega'^2 - \omega_{\mathrm{d}}^2} \right|^3\,, \tag{15}$$

missä $\alpha = [(E_2 - E_1) - (E_1 - E_0)]/\hbar$ on kubitin epäharmonisuus, ω' määritellään lausekkeella $\omega' = \omega_{\mathrm{q}} - \alpha$ ja Ω_{R} vastaa yhtälön (14) mukaista resonanssiajon Rabi-taajuutta. Koska Ω_{R} on suoraan verrannollinen ajojännitteen amplitudiin, aliharmoninen Rabi-taajuus $\Omega_{\mathrm{R}}^{\mathrm{sub}}$ skaalautuu amplitudin kuutioon.

Kahden taajuuden ajo voidaan toteuttaa esimerkiksi ajojännitteellä

$$V(t) = V_{\max} \left[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\right]\,. \tag{16}$$

Tässä oskilloivilla termeillä on yhteinen amplitudi, jolloin liitteessä A transmonille johdettu kahden taajuuden ajon Rabi-taajuus (A10) yksinkertaistuu muotoon

$$\Omega_{\mathrm{R}}^{\mathrm{two}} = \frac{4\alpha\omega'^3\Omega_{\mathrm{R}}^3}{\left(\omega'^2 - \omega_1^2\right)^2 \left(\omega'^2 - \omega_2^2\right)}\,. \tag{17}$$

Aliharmonisen ajon tapaan tässäkin Rabi-taajuus $\Omega_{\mathrm{R}}^{\mathrm{two}}$ skaalautuu ajojännitteen amplitudin kuutioon.

Kvanttilaskennassa tavoitellaan riittävän nopeaa ja mahdollisimman tarkkaa kubitin tilan kontrollointia. Edellä esitellyissä ajomenetelmissä Rabi-taajuus kasvaa ajojännitteen amplitudin kasvaessa, joten sopivan kestoisen ge-siirtymän saavuttamiseksi jännitteen täytyy olla riittävän suuri. Amplitudin kasvaessa ajavan resonaattorin luoma ulkoinen sähkömagneettinen kenttä vahvistuu, jolloin havaitaan AC Stark -siirtymäksi kutsuttu ilmiö (engl. *AC Stark shift*). Ilmiön taustalla on ulkoisen sähkömagneettisen kentän ja usean energiatilan systeemin välinen vuorovaikutus, joka aiheuttaa pieniä siirtymiä systeemin tiloihin. [24, 25] Kubitin tilojen $|\mathrm{g}\rangle$ ja $|\mathrm{e}\rangle$ välisen energiaeron muuttuminen muuttaa kubitin taajuutta, mikä puolestaan vaikuttaa optimaaliseen ajotaajuuteen.

Resonanssiajossa AC Stark -siirtymä on tyypillisesti hyvin pieni joskaan ei merkityksetön ajotaajuuden tarkan kalibroinnin kannalta [26]. Epäresonanteissa ajomenetelmissä siirtymä on suurempi, ja transmonilla se skaalautuu ajojännitteen

amplitudin neliöön. Aliharmoniselle ajolle tämä ilmenee yhtälöstä [14]

$$\delta_{\mathrm{sub}} = \frac{2\alpha}{3} \left| \frac{\omega' \Omega_{\mathrm{R}}}{\omega'^2 - \omega_{\mathrm{d}}^2} \right|^2 \tag{18}$$

sekä kahden taajuuden ajolle liitteen A yhtälöstä (A12), joka ajojännitettä (16) käytettäessä saa muodon

$$\delta_{\mathrm{two}} = 2\alpha\omega'^2\Omega_{\mathrm{R}}^2 \left[\frac{1}{\left(\omega'^2 - \omega_1^2\right)^2} + \frac{1}{\left(\omega'^2 - \omega_2^2\right)^2} \right] . \tag{19}$$

3 Tutkimusmenetelmät

Tässä luvussa esitellään tutkimuksessa käytetyt teoreettiset ja numeeriset menetelmät. Ensimmäisessä alaluvussa johdetaan unimonin Lagrangen funktio, kun unimon on kytketty kapasitiivisesti ulkoiseen resonaattoriin. Toisessa alaluvussa unimonin Lagrangen funktiosta johdetaan edelleen Lagrangen mekaniikkaa hyödyntäen Hamiltonin funktio, joka toimii teoreettisena pohjana työn numeerisille menetelmille. Kolmannessa alaluvussa tarkastellaan simulaatioissa käytettyä mallia ja sen toteutusta.

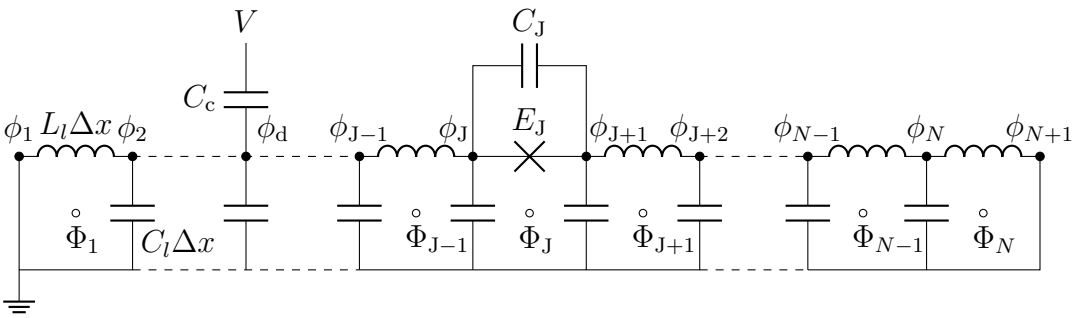
3.1 Unimonin Lagrangen funktio

Unimonin Lagrangen funktio voidaan johtaa lähtemällä liikkeelle piirimallista, jossa unimon esitetään diskreettien piirielementtien avulla. Kyseinen malli sekä tässä ja seuraavassa alaluvussa johdetut matemaattiset esitykset perustuvat artikkeleihin [16, 20, 27]. Kuvan 3 mukaisessa unimonin piirimallissa vuo ϕ on diskretoitu N:ään solmuun. Kubitin perustana toimivaa kaksiulotteista aaltoputkea, pituus l, mallinnetaan sarjana rinnan kytkettyjä kondensaattoreita ja sarjaan kytkettyjä keloja. Kondensaattorien kapasitanssi yksikköpituutta Δx kohden on C_l ja kelojen induktanssi vastaavasti L_l. Aaltoputken puoleenväliin on kytketty Joshepsonin liitos, jota kuvaa sen kapasitanssi C_J sekä Josephsonin energia E_J. Symboli ϕ_i kuvaa vuota i:nnessä solmussa, kun taas ulkoista magneettivuota kyseisessä solmussa merkitään symbolilla Φ_i. Solmun d kohdalla unimon on kytketty ulkoiseen ajojännitteeseen V. Kapasitiiviseen kytkentään liittyy kapasitanssi C_c.

Kuvassa 3 esitetyn piirimallin mukainen unimonin Lagrangen funktio on

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\sum_{i=2}^{N} \frac{C_l \Delta x}{2} \dot{\phi}_i^2 - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq \mathrm{J}}}^{N} \frac{1}{2L_l\Delta x} \left(\phi_{i+1} - \phi_i + \Phi_i\right)^2 + \frac{C_\mathrm{J}}{2}\left(\dot{\phi}_{\mathrm{J}+1} - \dot{\phi}_\mathrm{J}\right)^2 \\ &+ E_\mathrm{J} \cos\left[\frac{2\pi\left(\phi_{\mathrm{J}+1} - \phi_\mathrm{J}\right)}{\Phi_0}\right] + \frac{C_\mathrm{c}}{2}\left(\dot{\phi}_\mathrm{d} - 2V(t)\right)^2 ,\end{aligned} \tag{20}$$

missä Φ_0 on magneettivuon kvantti. Vuota ϕ_i jokaisessa solmussa voidaan käyttää toisistaan riippumattomina yleistettyinä koordinaatteina, jolloin niille pätee Eulerin–



Kuva 3. Piirimalli unimonille, johon on kytketty kapasitiivisesti ulkoinen ajolinja.

Lagrangen yhtälö

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0\,. \tag{21}$$

Määrittelemällä Josephsonin liitoksen kriittinen virta $I_\mathrm{c} = 2\pi E_\mathrm{J}/\Phi_0$ saadaan yhtälö (21) eri solmuissa muotoon

$i \notin \{\mathrm{J}, \mathrm{J}+1, \mathrm{d}\}$:

$$C_l \Delta x \ddot{\phi}_i - \frac{1}{L_l \Delta x}\left[(\phi_{i+1} - \phi_i) - (\phi_i - \phi_{i-1})\right] = 0\,, \tag{22}$$

$i = \mathrm{J}$:

$$\begin{aligned} C_l \Delta x \ddot{\phi}_\mathrm{J} + \frac{1}{L_l \Delta x}\left(\phi_\mathrm{J} - \phi_{\mathrm{J}-1}\right) - C_\mathrm{J}\left(\ddot{\phi}_{\mathrm{J}+1} - \ddot{\phi}_\mathrm{J}\right) \\ - I_\mathrm{c} \sin\left[\frac{2\pi\left(\phi_{\mathrm{J}+1} - \phi_\mathrm{J} - \Phi_\mathrm{J}\right)}{\Phi_0}\right] = 0\,, \end{aligned} \tag{23}$$

$i = \mathrm{d}$:

$$C_l \Delta x \ddot{\phi}_\mathrm{d} - \frac{1}{L_l \Delta x}\left[(\phi_{\mathrm{d}+1} - \phi_\mathrm{d}) - (\phi_\mathrm{d} - \phi_{\mathrm{d}-1})\right] + C_\mathrm{c}\left(\ddot{\phi}_\mathrm{d} - 2\dot{V}(t)\right) = 0\,, \tag{24}$$

missä yhtälöiden yksinkertaistamiseksi yleistetyille koordinaateille ϕ_i on tehty lisäksi mittamuunnos

$$\phi_i \longmapsto \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j\,.$$

Tämä antaa halutun tuloksen, kun ulkoinen magneettivuo Φ_i i:nnessä solmussa oletetaan vakioksi. Solmua $i = \mathrm{J}+1$ ei käsitellä erikseen, koska sen yhtälö ei olennaisesti eroa yhtälöstä (23), ja nämä voidaan yhdistää yhtälössä (26).

Diskretoitu piirimalli ainoastaan approksimoi jatkuvaa vuomuuttujaa $\phi(t,x)$, joten tarkan esityksen saamiseksi viedään yhtälöt (22)–(24) jatkuvalle rajalle, jossa $N \to \infty$ ja $\Delta x \to 0$. Tällöin yhtälöitä (22)–(24) vastaavat differentiaaliyhtälöt

$$\ddot{\phi}(t,x) = \frac{1}{L_l C_l}\partial_{xx}\phi(t,x)\,, \tag{25}$$

$$\frac{1}{L_l}\partial_x \phi(t, x_\mathrm{J}) = I_\mathrm{c} \sin\left[\frac{2\pi\left(\phi_-(t) - \Phi_\mathrm{J}\right)}{\Phi_0}\right] + C_\mathrm{J}\ddot{\phi}_-(t)\,, \tag{26}$$

$$\ddot{\phi}(t, x_\mathrm{d}) - 2\dot{V}(t) = \frac{1}{L_l C_\mathrm{c}}\left(\partial_x \phi(t, x_\mathrm{d}^+) - \partial_x \phi(t, x_\mathrm{d}^-)\right)\,, \tag{27}$$

missä $\phi_-(t) = \lim_{N\to\infty}\left(\phi_{\mathrm{J}+1} - \phi_\mathrm{J}\right) = \lim_{x\to x_\mathrm{J}^+}\phi(t,x) - \lim_{x\to x_\mathrm{J}^-}\phi(t,x)$ on vuon erotus Josephsonin liitoksen eri puolilla ja $\partial_x\phi(t, x_\mathrm{d}^\pm)$ kuvaa paikan toispuoleisia derivaattoja.

Yhtälöiden (25)–(27) perusteella vuon on oltava paloittain kahdesti derivoituva funktio. Määritellään vuo paloittain ajolinjan ja Josephsonin liitoksen sijaintien mukaan:

$$\phi(t,x) = \begin{cases} \phi_{\mathrm{a}}(t,x)\,, & x \in [0, x_{\mathrm{d}}[\\ \phi_{\mathrm{b}}(t,x)\,, & x \in [x_{\mathrm{d}}, x_{\mathrm{J}}[\\ \phi_{\mathrm{c}}(t,x)\,, & x \in]x_{\mathrm{J}}, l] \end{cases} . \tag{28}$$

Systeemin fysikaalisten ominaisuuksien perusteella vuolle pätee reunaehdot

$$\phi(t,0) = 0 = \phi(t,l)\,, \qquad \phi(t,x_{\mathrm{d}}^-) = \phi(t,x_{\mathrm{d}}^+)\,, \qquad \partial_x\phi(t,x_{\mathrm{J}}^-) = \partial_x\phi(t,x_{\mathrm{J}}^+)\,, \tag{29}$$

jotka johtuvat maadoituksesta resonaattorin molemmissa päissä, vuon jatkuvuudesta ajolinjan kohdalla sekä virran jatkuvuudesta Josephsonin liitoksessa.

Ensimmäinen differentiaaliyhtälö (25) on yksidimensioinen aaltoyhtälö aallon nopeudella $v = 1/(L_l C_l)$, joten Fourier-muunnettuna funktio (28) voidaan ilmoittaa jokaisella välillä erikseen muodossa

$$\tilde{\phi}_i(\omega,x) = A_i(\omega)\cos\left(\frac{\omega}{v}x\right) + B_i(\omega)\sin\left(\frac{\omega}{v}x\right) \tag{30}$$

kaikille $i = \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$. Tässä A_i ja B_i ovat mielivaltaisia kompleksifunktioita, joiden Fourier-käänteismuunnokset ovat kahdesti derivoituvia. Nämä voidaan ratkaista muuttujan $\tilde{\phi}_-$ suhteen analyyttisesti käyttämällä reunaehtoja (29) sekä yhtälön (27) Fourier-muunnosta

$$-\omega^2\tilde{\phi}\left(\omega, x_{\mathrm{d}}\right) - 2\mathrm{i}\omega\tilde{V}(\omega) = \frac{1}{L_l C_{\mathrm{c}}}\left(\partial_x\tilde{\phi}(\omega,x_{\mathrm{d}}^+) - \partial_x\tilde{\phi}(\omega,x_{\mathrm{d}}^-)\right) . \tag{31}$$

Sijoittamalla saatu ratkaisu $\tilde{\phi}(\omega,x)$ yhtälön (26) vasemmalle puolelle huomataan yhtälön olevan lineaarinen muuttujien $\tilde{\phi}_-(\omega)$ ja $\tilde{V}(\omega)$ suhteen. Kun kytkentäkapasitanssi C_{c} oletetaan pieneksi ja approksimoidaan lineaarisia osia niiden Taylorin kehitelmien johtavilla termeillä, yhtälön vasen puoli voidaan ilmaista muodossa

$$\frac{1}{L_l}\partial_x\tilde{\phi}(\omega,x_{\mathrm{J}}) \approx -\tilde{K}(\omega)\tilde{\phi}_-(\omega) + \tilde{G}(\omega)\tilde{V}(\omega)\,, \tag{32}$$

missä funktiot $\tilde{K}$ ja $\tilde{G}$ ovat

$$\tilde{K}(\omega) = \frac{\omega}{L_l v}\cos\left(\frac{\omega}{v}x_{\mathrm{J}}\right)\cos\left[\frac{\omega}{v}(l - x_{\mathrm{J}})\right]\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{v}l\right)}\,, \tag{33}$$

$$\tilde{G}(\omega) = -2\mathrm{i}C_{\mathrm{c}}\omega\sin\left(\frac{\omega}{v}x_{\mathrm{d}}\right)\cos\left[\frac{\omega}{v}(l - x_{\mathrm{J}})\right]\frac{1}{\sin\left(\frac{\omega}{v}l\right)}\,. \tag{34}$$

Näillä kompleksifunktioilla on ensimmäisen kertaluvun navat $\Omega_n = \pi n v/l$, joten niille voidaan kehittää Mittag-Lefflerin napahajotelma [28]. Tällöin funktiot saadaan muotoon

$$\tilde{K}(\omega) \approx \tilde{K}(0) + \frac{\tilde{K}''(0)}{2}\omega^2 + \sum_{n=1}^{M} 2k_n\left(\frac{\Omega_n}{\omega^2 - \Omega_n^2} + \frac{1}{\Omega_n} + \frac{\omega^2}{\Omega_n^3}\right)\,, \tag{35}$$

$$\tilde{G}(\omega) \approx \tilde{G}'(0)\omega + \sum_{n=1}^{M} 2\gamma_n\left(\frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_n^2} + \frac{\omega}{\Omega_n^2}\right)\,, \tag{36}$$

jotka lähestyvät tarkkaa arvoa, kun M lähestyy ääretöntä. Funktioiden ja niiden derivaattojen arvot nollassa tulkitaan raja-arvoina, jolloin

$$\tilde{K}(0) = \frac{1}{L_l l}\,, \qquad \tilde{K}''(0) = -\frac{2(l^2 - 3lx_\mathrm{J} + 3x_\mathrm{J}^2)}{3L_l l v^2}\,, \qquad \tilde{G}'(0) = -\frac{2\mathrm{i}C_\mathrm{c}x_\mathrm{d}}{l}\,, \tag{37}$$

ja kertoimet k_n ja γ_n ovat

$$k_n = \mathrm{Res}\left(\tilde{K}(\omega), \omega = \Omega_n\right) = \frac{\pi n v}{L_l l^2}\cos^2\left(\frac{\pi n}{l}x_\mathrm{J}\right)\,, \tag{38}$$

$$\gamma_n = \mathrm{Res}\left(\tilde{G}(\omega), \omega = \Omega_n\right) = -\frac{2\mathrm{i}C_\mathrm{c}\pi n v^2}{l^2}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x_\mathrm{J}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x_\mathrm{d}\right)\,. \tag{39}$$

Sijoittamalla funktiot (35) ja (36) yhtälöön (32) saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_l}\partial_x\tilde{\phi}(\omega, x_\mathrm{J}) = &-\left(\tilde{K}(0) + \sum_{n=1}^{M}\frac{2k_n}{\Omega_n}\right)\tilde{\phi}_-(\omega) - \left(\frac{\tilde{K}''(0)}{2} + \sum_{n=1}^{M}\frac{2k_n}{\Omega_n^3}\right)\omega^2\tilde{\phi}_-(\omega)\\ &+\left(\tilde{G}'(0) + \sum_{n=1}^{M}\frac{2\gamma_n}{\Omega_n^2}\right)\omega\tilde{V}(\omega) - \sum_{n=1}^{M}\frac{2\Omega_n k_n\tilde{\phi}_-(\omega) - 2\gamma_n\omega\tilde{V}(\omega)}{\omega^2 - \Omega_n^2}\,,\end{aligned} \tag{40}$$

josta Fourier-käänteismuuntamalla päästään muotoon

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_l}\partial_x\phi(t, x_\mathrm{J}) = &-\left(\tilde{K}(0) + \sum_{n=1}^{M}\frac{2k_n}{\Omega_n}\right)\phi_-(t) + \left(\frac{\tilde{K}''(0)}{2} + \sum_{n=1}^{M}\frac{2k_n}{\Omega_n^3}\right)\ddot{\phi}_-(t)\\ &-\mathrm{i}\left(\tilde{G}'(0) + \sum_{n=1}^{M}\frac{2\gamma_n}{\Omega_n^2}\right)\dot{V}(t) - \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{n=1}^{M}\frac{2\Omega_n k_n\tilde{\phi}_-(\omega) - 2\gamma_n\omega\tilde{V}(\omega)}{\omega^2 - \Omega_n^2}\right\}\,.\end{aligned} \tag{41}$$

Lauseketta voidaan yksinkertaistaa määrittelemällä efektiivinen kapasitanssi C_eff ja induktanssi L_eff sekä kytkentävakio Γ seuraavasti:

$$C_\mathrm{eff} = C_\mathrm{J} - \frac{\tilde{K}''(0)}{2} - \sum_{n=1}^{M}\frac{2k_n}{\Omega_n^3}\,, \tag{42}$$

$$L_\mathrm{eff} = \left(\tilde{K}(0) + \sum_{n=1}^{M}\frac{2k_n}{\Omega_n}\right)^{-1}\,, \tag{43}$$

$$\Gamma = \mathrm{i}\left(\tilde{G}'(0) + \sum_{n=1}^{M}\frac{2\gamma_n}{\Omega_n^2}\right)\,. \tag{44}$$

Kun määritellään lisäksi apukoordinaatiksi kutsuttu muuttuja

$$\chi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_n k_n}}\mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{n=1}^{M}\frac{2\Omega_n k_n\tilde{\phi}_-(\omega) - 2\gamma_n\omega\tilde{V}(\omega)}{\omega^2 - \Omega_n^2}\right\}\,, \tag{45}$$

lauseke (41) sievenee muotoon

$$\frac{1}{L_l}\partial_x\phi(t, x_\mathrm{J}) = -\frac{1}{L_\mathrm{eff}}\phi_-(t) + (C_\mathrm{J} - C_\mathrm{eff})\,\ddot{\phi}_-(t) - \Gamma\dot{V}(t) - \sqrt{2\Omega_n k_n}\chi_n(t)\,. \tag{46}$$

Sijoittamalla saatu tulos yhtälön (26) vasemmalle puolelle muodostuu yhtälö

$$C_{\text{eff}}\ddot{\phi}_-(t) + \frac{1}{L_{\text{eff}}}\phi_-(t) + \Gamma\dot{V}(t) + I_{\text{c}}\sin\left[\frac{2\pi\left(\phi_-(t) - \Phi_{\text{J}}\right)}{\Phi_0}\right] + \sum_{n=1}^{M} a_n\chi_n(t) = 0\,, \quad (47)$$

missä $a_n = \sqrt{2\Omega_n k_n}$.

Apukoordinaatti $\chi_n(t)$ ratkaisee differentiaaliyhtälön

$$\ddot{\chi}_n(t) + \Omega_n^2\chi_n(t) + a_n\phi_-(t) + b_n\dot{V}(t) = 0\,, \quad (48)$$

missä $a_n = \sqrt{2\Omega_n k_n}$ ja $b_n = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{\Omega_n k_n}}\gamma_n$. Yhtälöt (47) ja (48) ovat Lagrangen funktiota

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & C_{\text{eff}}\frac{\dot{\phi}_-^2(t)}{2} - \frac{\phi_-^2(t)}{2L_{\text{eff}}} + E_{\text{J}}\cos\left[\frac{2\pi\left(\phi_-(t) - \Phi_{\text{J}}\right)}{\Phi_0}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(\dot{\chi}_n^2(t) - \Omega_n^2\chi_n^2(t)\right) \\ & - \sum_{n=1}^{M}\left(a_n\phi_-(t) + b_n\dot{V}(t)\right)\chi_n(t) - \Gamma\dot{V}(t)\phi_-(t)\end{aligned} \quad (49)$$

vastaavat Eulerin–Lagrangen yhtälöt, kun Lagrangen funktio ilmaistaan yleistettyjen koordinaattien $\phi_-(t)$ ja $\chi_n(t)$ sekä niiden aikaderivaattojen $\dot{\phi}_-(t)$ ja $\dot{\chi}_n(t)$ avulla. Yllä johdettu funktio (49) on unimonin täydellinen Lagrangen funktio, josta systeemin Hamiltonin funktio johdetaan.

3.2 Unimonin Hamiltonin funktio

Edellisessä alaluvussa unimonille johdettiin Lagrangen funktio (49). Hamiltonin formalismissa systeemiä kuvataan Hamiltonin funktiolla, joka saadaan Lagrangen funktiosta Legendren muunnoksella [29]

$$H = \sum_{n=1}^{M}\dot{\chi}_n\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\chi}_n} + \dot{\phi}_-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_-} - \mathcal{L}\,. \quad (50)$$

Näin ollen unimonia vastaa Hamiltonin funktio

$$\begin{aligned}H = {} & C_{\text{eff}}\frac{\dot{\phi}_-^2(t)}{2} + \frac{\phi_-^2(t)}{2L_{\text{eff}}} - E_{\text{J}}\cos\left[\frac{2\pi\left(\phi_-(t) - \Phi_{\text{J}}\right)}{\Phi_0}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(\dot{\chi}_n^2(t) + \Omega_n^2\chi_n^2(t)\right) \\ & + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n\phi_-(t) + b_n\dot{V}(t)\right)\chi_n(t) + \Gamma\dot{V}(t)\phi_-(t)\,.\end{aligned} \quad (51)$$

Hamiltonin formalismissa toisistaan riippumattomina muuttujina käytetään niin kutsuttuja kanonisia konjugaattipareja (q, p), joissa paikan kaltainen muuttuja q vastaa yleistettyjä koordinaatteja $\phi_-(t)$ ja $\chi_n(t)$, kun taas liikemäärän kaltainen muuttuja p vastaa Lagrangen funktion derivaattoina määriteltyjä yleistettyjä liikemääriä

$$Q(t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_-} = C_{\text{eff}}\dot{\phi}_-(t) \qquad \text{ja} \qquad \Xi_n(t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\chi}_n} = \dot{\chi}_n(t)\,. \quad (52)$$

Systeemin kvanttimekaanisen luonteen vuoksi jatkuvat kanoniset muuttujat on tarkoituksenmukaista ilmaista kvantittuneina operaattoreina, jotka toteuttavat kanonisen kommutaatiorelaation (7). Tämä vastaa relaatioita

$$[\hat{\phi}_-, \hat{Q}] = \mathrm{i}\hbar \qquad \text{ja} \qquad [\hat{\chi}_i, \hat{\Xi}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\,, \tag{53}$$

kun muut kommutaattorit saavat arvokseen nollan. Sijoittamalla kanoniset operaattorit Hamiltonin funktioon (51) unimonin kvantittuneeksi Hamiltonin funktioksi saadaan

$$\begin{aligned}\hat{H} = {} & \frac{\hat{Q}^2(t)}{2C_{\text{eff}}} + \frac{\hat{\phi}_-^2(t)}{2L_{\text{eff}}} - E_{\text{J}}\cos\left[\frac{2\pi\left(\hat{\phi}_-(t) - \Phi_{\text{J}}\right)}{\Phi_0}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(\hat{\Xi}_n^2(t) + \Omega_n^2\hat{\chi}_n^2(t)\right) \\ & + \sum_{n=1}^{M}\left(a_n\hat{\phi}_-(t) + b_n\dot{V}(t)\right)\hat{\chi}_n(t) + \Gamma\dot{V}(t)\hat{\phi}_-(t)\,.\end{aligned} \tag{54}$$

Yllä oleva lauseke on ajojännitteen $V(t)$ sijaan suoraan verrannollinen ajojännitteen derivaattaan $\dot{V}(t)$, mikä hankaloittaa numeerista analyysia. Tästä syystä tehdään Hamiltonin funktiolle vielä energiatilat säilyttävä unitaarinen muunnos $\hat{H}_U = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + \mathrm{i}\hbar\dot{\hat{U}}\hat{U}^\dagger$ unitaarisella operaattorilla

$$\hat{U} = \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(\Gamma\hat{\phi}_-(t)V(t) + \sum_{n=1}^{M} b_n\hat{\chi}_n(t)V(t)\right)\right]\,. \tag{55}$$

Muunnettu Hamiltonin funktio on muotoa

$$\hat{H}_U = \hat{H}_0 + \hat{H}'(t)\,, \tag{56}$$

missä aikariippumaton termi

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 = {} & \frac{\hat{Q}^2(t)}{2C_{\text{eff}}} + \frac{\hat{\phi}_-^2(t)}{2L_{\text{eff}}} - E_{\text{J}}\cos\left[\frac{2\pi\left(\hat{\phi}_-(t) - \Phi_{\text{J}}\right)}{\Phi_0}\right] \\ & + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(\hat{\Xi}_n^2(t) + \Omega_n^2\hat{\chi}_n^2(t)\right) + \sum_{n=1}^{M} a_n\hat{\phi}_-(t)\hat{\chi}_n(t)\end{aligned} \tag{57}$$

vastaa itse unimonia ilman ulkoista ajolinjaa ja aikariippuva termi

$$\hat{H}'(t) = -\left(\sum_{n=1}^{M} b_n\hat{\Xi}_n(t) + \frac{\Gamma\hat{Q}(t)}{C_{\text{eff}}}\right)V(t) \tag{58}$$

kytkee systeemin moodit suoraan verrannollisesti ajojännitteeseen. Johdettu aikariippumaton Hamiltonin funktio (57) riippuu kubitin epälineaarisuuden aiheuttavasta operaattorista $\hat{\phi}_-$ sekä lineaarisista apumoodeista $\hat{\chi}_n$ ja on artikkelissa [16] kuvatun mallin 2 mukainen.

3.3 Numeeriset menetelmät

Kvanttimekaanisen systeemin energiatilat ja vastaavat ominaisarvot voidaan ratkaista diagonalisoimalla systeemin Hamiltonin funktio. Koska unimonin aikariippumaton Hamiltonin funktio (57) on epälineaarinen, funktiota ei voi diagonalisoida analyyttisesti. Systeemin aikakehityksen simuloimiseksi energiatilat on kuitenkin tunnettava, joten diagonalisointi tehdään numeerisilla menetelmillä.

Edellisessä alaluvussa johdettu Hamiltonin funktio (57)–(58) lähestyy tarkkaa arvoa, kun M kasvaa rajatta. Suuren määrän huomioiminen apumoodeista $\hat{\chi}_n$ kasvattaa diagonalisoitavan matriisin dimensiota ja vaikeuttaa laskentaa, joten valitaan ylärajaksi arvo $M = 6$. Tämä takaa riittävän hyvän approksimaation Hamiltonin funktiolle [30]. Apumoodien lineaarisuudesta johtuen operaattorit $\hat{\chi}_n$ ja $\hat{\Xi}_n$ voidaan ilmaista muodossa

$$\hat{\chi}_n = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega_n}}\left(\hat{a}_n^\dagger + \hat{a}_n\right) \qquad \text{ja} \qquad \hat{\Xi}_n = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\Omega_n}{2}}\left(\hat{a}_n^\dagger - \hat{a}_n\right) , \tag{59}$$

missä $\hat{a}_n^\dagger$ ja $\hat{a}_n$ ovat n:ttä apumoodia vastaavan aliavaruuden luomis- ja hävitysoperaattorit

$$\hat{a}_n^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \hat{a}_n = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} . \tag{60}$$

Koska alimmat apumoodit vaikuttavat eniten matalimpiin energiatiloihin, käytetään dimensioltaan suurempia matriiseja apumoodeille 1–4 ja pienempiä apumoodeille 5 ja 6. Fysikaalisista parametreista riippuen kaikki apumoodit eivät aina ole lomittuneina epälineaarisen moodin $\hat{\phi}_-$ kanssa, jolloin kyseisillä apumoodeilla ei ole merkitystä systeemin energiatilojen kannalta. Taulukon 1 mukaisesti tämän työn simulaatioissa Josephsonin liitos on sijoitettu CPW-resonaattorin puoleenväliin, jolloin Hamiltonin funktion (57) ristitermin kerroin a_n katoaa parittomilla n:n arvoilla purkaen parittomien apumoodien kytkennän. Tästä syystä laskuissa käytetyt dimensiot apumoodeja kuvaaville matriiseille ovat kasvavassa järjestyksessä 1×1, 20×20, 1×1, 20×20, 1×1 ja 10×10.

Tässä työssä vuo-operaattori $\hat{\phi}_-$ esitetään differenssimenetelmää käyttäen diskretoimalla se 1000 pisteeseen tasavälein välillä $[-\Phi_0/2, \Phi_0/2]$ ja muodostamalla näistä diagonaalimatriisi ϕ_-. Varausoperaattori $\hat{Q}$ on vuokannassa derivaattaoperaattori $-\mathrm{i}\hbar\,\partial/\partial\phi_-$, jota voidaan approksimoida matriisilla [31]

$$Q_{i,j} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}}{2\Delta\phi_-} . \tag{61}$$

Tässä $\delta_{i,j}$ on Kroneckerin delta ja $\Delta\phi_- = \Phi_0/1000$ on diskretoitujen vuopisteiden etäisyys. Differenssimenetelmän mukainen operaattorin $\hat{Q}$ neliö on [31]

$$Q_{i,j}^2 = -\hbar^2\frac{\delta_{i,j+1} - 2\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1}}{\Delta\phi_-^2} . \tag{62}$$

Taulukko 1. Simulaatioissa käytetyt parametrit. Tässä l on CPW-resonaattorin pituus, x_J on Josephsonin liitoksen sijainti ja x_d on ulkoisen ajolinjan sijainti. L_l kuvaa resonaattorin induktanssia yksikköpituutta kohden ja C_l vastaavaa kapasitanssia. C_c on ajolinjan kytkentään liittyvä kapasitanssi, E_J Josepshonin energia ja C_J Josephsonin liitoksen kapasitanssi. Φ_J kuvaa ulkoista vuota.

Parametri	Arvo	Parametri	Arvo	Parametri	Arvo
l	8,0 mm	L_l	0,893 µH/m	E_J/h	19,0 GHz
x_J	4,0 mm	C_l	79,8 pF/m	C_J	2,0 fF
x_d	2,0 mm	C_c	1,0 fF	Φ_J	$0{,}5\Phi_0$

Tällöin ainoastaan moodista $\hat{\phi}_-$ riippuvaksi Hamiltonin funktion osaksi $\hat{H}_{\phi_-}$ saadaan elementeittäin ilmaistuna

$$\left(H_{\phi_-}\right)_{i,j} = \frac{Q_{i,j}^2}{2C_\mathrm{eff}} + \frac{(\phi_-)_{i,j}^2}{2L_\mathrm{eff}} - E_\mathrm{J}\cos\left[\frac{2\pi\left((\phi_-)_{i,j} - \Phi_\mathrm{J}\right)}{\Phi_0}\right]. \tag{63}$$

Diagonalisoimalla tämä kolmidiagonaalimatriisi ja rajoittamalla tarkastelu sen 20 alimpaan ominaistilaan voidaan vuo- ja varausmatriisien dimensiota pienentää muunnoksilla $\phi_- \mapsto \varphi^\dagger\phi_-\varphi$ ja $Q \mapsto \varphi^\dagger Q\varphi$, missä φ on matriisin (63) ominaiskannan sisältävä unitaarinen 1000×20-dimensioinen matriisi [27]. Aikariippumaton Hamiltonin funktio (57) muodostetaan muunnetuista vuo- ja varausmatriiseista sekä apumoodeista (59) Kroneckerin tuloa käyttäen, jolloin sen dimensioksi tulee $80\,000 \times 80\,000$. Tämän matriisin diagonalisoiminen vie aikariippumattoman Hamiltonin funktion energiakantaan määrittäen unimonin energiatilat, joista kymmenen alinta on esitetty taulukossa 2. Taulukon perusteella kubitin taajuudeksi saadaan

$$\omega_\mathrm{q}/(2\pi) = (E_1 - E_0)/h \approx 4{,}40\,\mathrm{GHz} \tag{64}$$

ja epäharmonisuudeksi

$$\alpha/(2\pi) = \left[(E_2 - E_1) - (E_1 - E_0)\right]/h \approx 479\,\mathrm{MHz}\,. \tag{65}$$

Unimonin Hamiltonin funktion aikariippuva termi (58) on muotoa $\hat{H}'(t) = \hat{M}V(t)$, missä aikariippuvuus sisältyy ajojännitteeseen. Operaattori $\hat{M}$ riippuu muuttujista $\hat{\Xi}_n$ ja $\hat{Q}$, joten se voidaan laskea numeerisesti edellä kuvatulla menetelmällä.

Taulukko 2. Unimonin energiatilat, kun alin energia on asetettu nollaksi.

n	E_n/h (GHz)	n	E_n/h (GHz)
0	0,0	5	21,33
1	4,403	6	25,77
2	9,285	7	25,91
3	14,50	8	30,94
4	20,01	9	31,78

Systeemin aikakehitystä simuloidessa Hamiltonin funktio (56) on järkevää esittää sen aikariippumattoman termin määrittelemässä energiakannassa. Tällöin simulaatiot voidaan hyvällä tarkkuudella rajoittaa vain osaan energiatiloista. Tässä työssä keskitytään unimonin kymmeneen alimpaan energiatilaan, ja alin tila $|0\rangle$ toimii systeemin alkutilana kaikissa simulaatioissa.

Systeemin aikakehitys lasketaan numeerisesti luvussa 2.2 kuvatulla Floquet'n teoriaa hyödyntävällä menetelmällä. Systeemiä simuloidaan luvussa 2.3 esitellyissä kolmessa eri ajotaajuusalueessa. Resonanssiajossa ja aliharmonisessa ajossa Hamiltonin funktion jaksonaika eli Floquet-jakson pituus on $2\pi/\omega_\mathrm{d}$, missä ω_d on yhtälön (13) mukainen ajava taajuus. Kolmannessa ajoalueessa, jossa systeemiä ajetaan kahdella erisuurella taajuudella ω_1 ja ω_2 yhtälön (16) mukaisesti, Floquet-jakson pituus riippuu käytetyistä ajotaajuuksista. Tässä työssä systeemiä simuloidaan kahdella eri taajuusparilla:

$$\text{pari 1: } \omega_1 = 0{,}9\omega_\mathrm{ref}\ ,\ \ \omega_2 = 0{,}8\omega_\mathrm{ref}\ , \tag{66}$$

$$\text{pari 2: } \omega_1 = 0{,}95\omega_\mathrm{ref}\ ,\ \ \omega_2 = 0{,}9\omega_\mathrm{ref}\ , \tag{67}$$

missä $\omega_\mathrm{ref} \approx \omega_\mathrm{q}$ on simulaatioissa muunneltava referenssitaajuus. Tällöin ajotaajuusparit toteuttavat ehdon $2\omega_1 - \omega_2 \approx \omega_\mathrm{q}$. Koska unimonin epäharmonisuus on positiivinen, ajotaajuudet on valittu kubitin taajuuden alapuolelta. Näin estetään pulssia ajamasta niin kutsuttua ef-siirtymää systeemin tilalta $|1\rangle$ tilalle $|2\rangle$. Floquet-jakson pituus on $2\pi/(0{,}1\omega_\mathrm{ref})$ parille 1 ja $2\pi/(0{,}05\omega_\mathrm{ref})$ parille 2. Kaikissa ajoalueissa yhden Floquet-jakson simuloimiseen käytetään 1000 aika-askelta.

Koska oskilloivien pulssien muotoa ei optimoida verhokäyrällä vaan simulaatiot toteutetaan kanttipulssilla, ajotermeissä käytetään sinifunktiota, joka takaa jännitekäyrän $V(t)$ jatkuvuuden pulssin alussa. Kahden taajuuden ajossa ajojännite on muotoa

$$V(t) = V_\mathrm{max}\left[\sin(\omega_1 t) - \sin(\omega_2 t)\right]\ , \tag{68}$$

missä V_max on jännitteen amplitudi ja siniaallot yhteenlaskun sijaan vähennetään toisistaan hitaammin kasvavan ajojännitteen saavuttamiseksi. Toteutetut simulaatiot vastaavat näin paremmin sopivalla verhokäyrällä optimoituja pulsseja sekä simulaatioissa että kokeellisessa tilanteessa, ja saatavat tulokset ovat selkeämpiä.

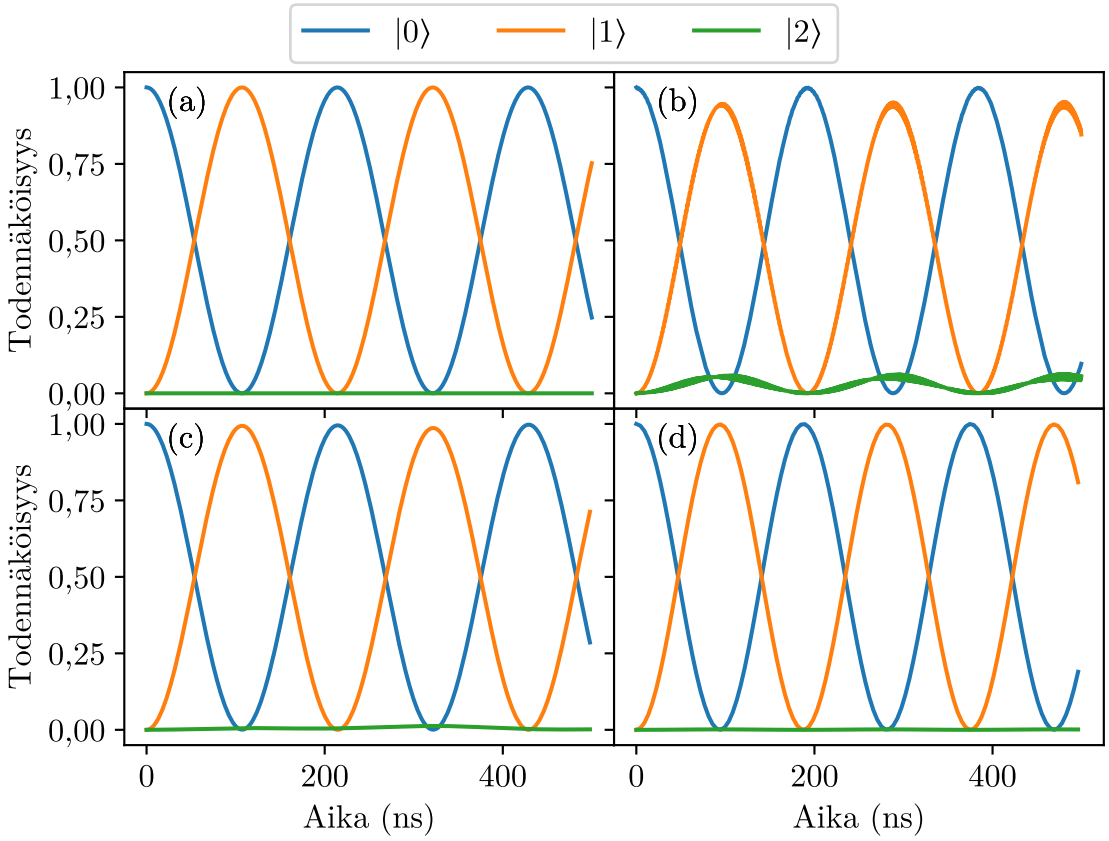
4 Tulokset

Tässä luvussa esitetään simulaatioista saadut tulokset ja tarkastellaan niiden merkitystä. Koska kubitin perustila toimii systeemin alkutilana ja ajotaajuudet on valittu luvussa 3.3 kuvatulla tavalla, simulaatiot kuvaavat kubitin kvanttitilan oskillaatiota perustilan ja viritystilan välillä. Ajavan pulssin keston ollessa oskillaation jaksonajan puolikas kyseessä on yhden kubitin kvanttiportti X, joka on kvanttilaskennan vastine klassiselle NOT-portille [9]. Tämän työn simulaatioissa kubitin tilan aikakehitystä tarkastellaan kuitenkin tätä pidemmällä aikavälillä. Kahdessa ensimmäisessä alaluvussa käsitellään simuloitujen ajoalueiden ominaisuuksia, kuten Rabi-taajuutta ja AC Stark -siirtymää. Kolmannessa alaluvussa vertaillaan eri ajomenetelmillä saavutettua ge-siirtymän tarkkuutta.

4.1 Rabi-taajuus

Tässä työssä unimonin dynamiikkaa tutkitaan kolmessa erityyppisessä ajoalueessa luvussa 3.3 kuvatulla menetelmällä. Simulaatioiden tuloksena saatavaa kubitin tilojen aikakehitystä havainnollistaa kuva 4, johon on valittu likimain samalla taajuudella värähtelevät esimerkit eri ajoalueista. Nämä ajoalueet ovat luvussa 2.3 esitellyt resonanssiajo, aliharmoninen ajo sekä kahden taajuuden ajo, jota tutkitaan kahdella eri taajuusparilla (66)–(67). Taajuusparin 1 ajotaajuudet ovat yleisesti parin 2 ajotaajuuksia kauempana kubitin taajuudesta. Toisistaan poikkeavien ajotaajuuksien lisäksi kussakin ajomenetelmässä käytetään ajojännitteen amplitudille sellaista väliä, että tuloksena saadaan vertailukelpoiset Rabi-oskillaatiot. Kvanttilaskennassa yhden kubitin porteille tavoitellaan kestoa yli viidestä nanosekunnista noin sataan nanosekuntiin, mikä vastaa likimain Rabi-taajuuksia 5–100 MHz. Numeerisessa laskennassa käytetty Floquet'n menetelmä kuitenkin rajoittaa Rabi-taajuuden kasvattamista useisiin kymmeniin megahertseihin erityisesti kahden taajuuden ajossa, jossa datapisteiden etäisyyden määrittävä Floquet-jakson pituus on parin nanosekunnin luokkaa. Näistä syistä ajojännitteen amplitudille $V_{\max}$ käytetään resonanssiajossa väliä 0,2–20 µV, aliharmonisessa ajossa väliä 430–780 µV sekä kahden taajuuden ajossa taajuusparilla 1 väliä 20–130 µV ja taajuusparilla 2 väliä 20–70 µV. Kahden taajuuden ajossa ajojännitteen todellinen amplitudi on tosin kaksinkertainen, sillä ajotermi (68) on summa kahdesta sinimuotoisesta termistä, joiden molempien amplitudi on $V_{\max}$.

Kuvan 4 mukaisista aikasarjoista voidaan laskea kubitin tilojen oskillaation taajuus eli Rabi-taajuus. Tulokset on esitetty ajojännitteen amplitudin $V_{\max}$ funktiona kuvassa 5 logaritmisella asteikolla. On huomioitava, että tarvittavien ajojännitteiden absoluuttinen arvo riippuu simulaatioparametreista kuten ajolinjan sijainnista, joten on mielekästä tarkastella lähinnä ajojännitteen suuruusluokkaa sekä vertailla eri ajoalueiden tuloksia toisiinsa. Kuvasta havaitaan, että resonanssiajossa sama Rabi-taajuus saavutetaan pienimmällä ajojännitteellä muihin ajomenetelmiin verrattuna, ja että aliharmoninen ajo vaatii suurimman ajojännitteen. Kahden taajuuden ajossa käytettävä jännite osuu näiden kahden välille myös, kun huomioidaan tässä ajotermin todellisen amplitudin olevan kaksinkertainen kuvan vaaka-akselissa käytettyyn

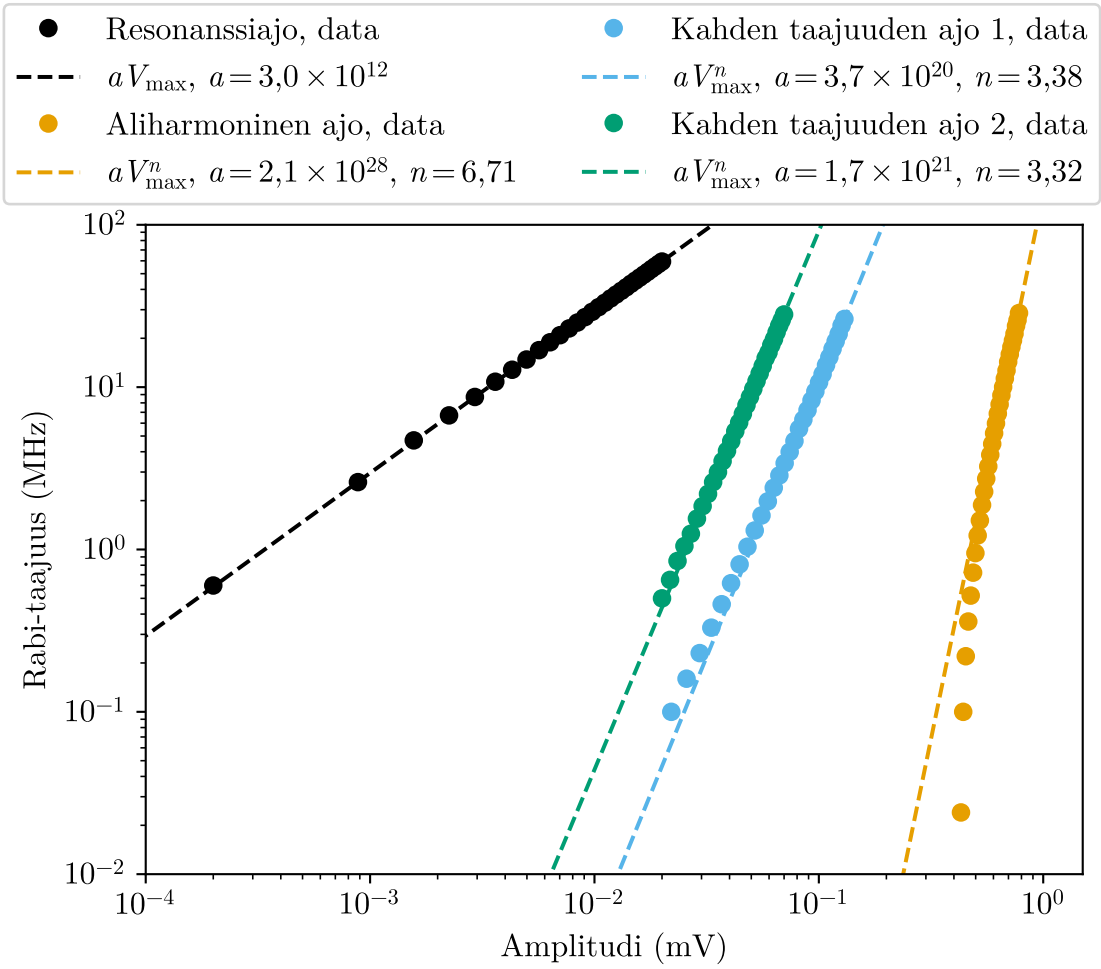


Kuva 4. Havainnollistus kubitin tilojen $|0\rangle$, $|1\rangle$ ja $|2\rangle$ simuloidusta aikakehityksestä tilojen todennäköisyyden avulla ilmaistuna (a) resonanssiajossa, (b) aliharmonisessa ajossa sekä (c) kahden taajuuden ajossa taajuusparilla 1 (66) ja (d) taajuusparilla 2 (67). Kussakin tapauksessa ajava taajuus tai taajuudet sekä ajojännitteen amplitudi on valittu siten, että tilat värähtelevät likimain taajuudella 5 MHz.

nähden. Lisäksi taajuusparilla 2 samaan Rabi-taajuuteen vaaditaan pienempi ajojännite kuin taajuusparilla 1. Koska parin 2 ajotaajuudet ovat lähempänä kubitin taajuutta kuin parilla 1, tulos viittaa siihen, että kahden taajuuden ajossa käytettyjen ajotaajuuksien lähestyessä kubitin taajuutta tarvittava ajojännite pienenee.

Kuvan 5 perusteella resonanssiajon Rabi-taajuus kasvaa lineaarisesti ajojännitteen amplitudin funktiona luvun 2.3 teoreettisen mallin mukaisesti. Suoran teoreettinen kulmakerroin on yhtälön (14) perusteella $|M_{0,1}|/(2\pi\hbar) \approx 2{,}983 \times 10^{12}\,(\mathrm{Vs})^{-1}$, joka vastaa sovituksen kulmakerrointa $a \approx 2{,}975 \times 10^{12}\,(\mathrm{Vs})^{-1}$ kahden numeron tarkkuudella.

Aliharmonisen ja kahden taajuuden ajon datapisteisiin on kuvassa 5 sovitettu potenssilain $\Omega_\mathrm{R}/(2\pi) = aV_\mathrm{max}^n$ mukaiset käyrät. Sovituksen perusteella aliharmonisen ajon Rabi-taajuus skaalautuu lähes seitsemänteen potenssiin. Pienimmillä jännitteillä simulaatiopisteet kaartuvat kuitenkin sovitteen alapuolelle, mikä viittaa vielä nopeampaan kasvuun tällä alueella. Sen sijaan molemmat kahden taajuuden ajon datasarjat noudattelevat hyvin hieman yli kuutiollista potenssilakia, mikä sopii lu-

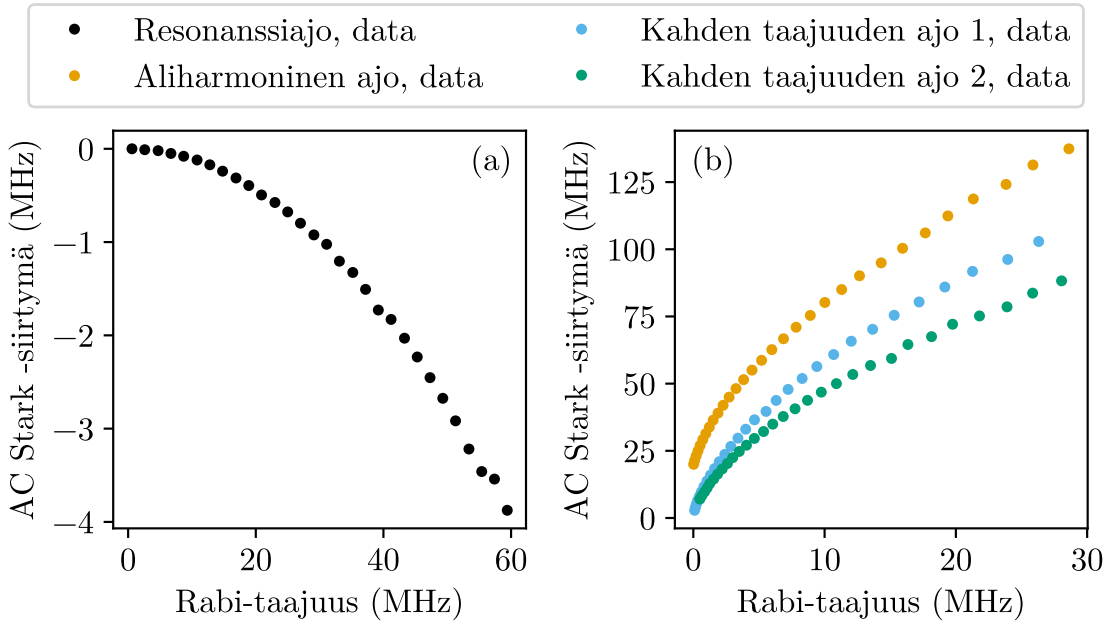


Kuva 5. Rabi-taajuus ajojännitteen amplitudin funktiona eri ajoalueissa. Kuvaaja sisältää simuloidut datapisteet sekä niihin tehdyt sovitteet.

vun 2.3 teoreettiseen malliin. Transmonille johdetut Rabi-taajuuden yhtälöt (15) ja (17) ennustavat kuutiollista skaalautumista ajojännitteen suhteen kuitenkin molemmissa epäresonanteissa ajomenetelmissä, mikä on ristiriidassa aliharmoniselle ajolle saatujen tulosten kanssa. Tämä voi johtua siitä, etteivät kaikki transmonin aliharmoniselle ajolle pätevät oletukset välttämättä pidä paikkaansa unimonin tapauksessa, jolloin kubittien käyttäytyminen saattaa poiketa toisistaan merkittävästikin.

4.2 AC Stark -siirtymä

Kuvissa 6 ja 7 on esitetty AC Stark -siirtymä δ eri ajoalueissa Rabi-taajuuden sekä ajojännitteen amplitudin funktiona. AC Stark -siirtymä resonanssiajossa, aliharmonisessa ajossa sekä kahden taajuuden ajossa lasketaan kaavoilla $\delta_{\text{res}} = \omega_{\text{d}} - \omega_{\text{q}}$, $\delta_{\text{sub}} = 3\omega_{\text{d}} - \omega_{\text{q}}$ ja $\delta_{\text{two}} = (2\omega_1 - \omega_2) - \omega_{\text{q}} = \omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{q}}$, missä ω_{d}, ω_1 ja ω_2 ovat simuloimalla etsityt ge-siirtymän kannalta optimaalisimmat ajotaajuudet kullakin ajojännitteellä eri ajoalueissa. Kuvan 6(a) perusteella AC Stark -siirtymä on reso-

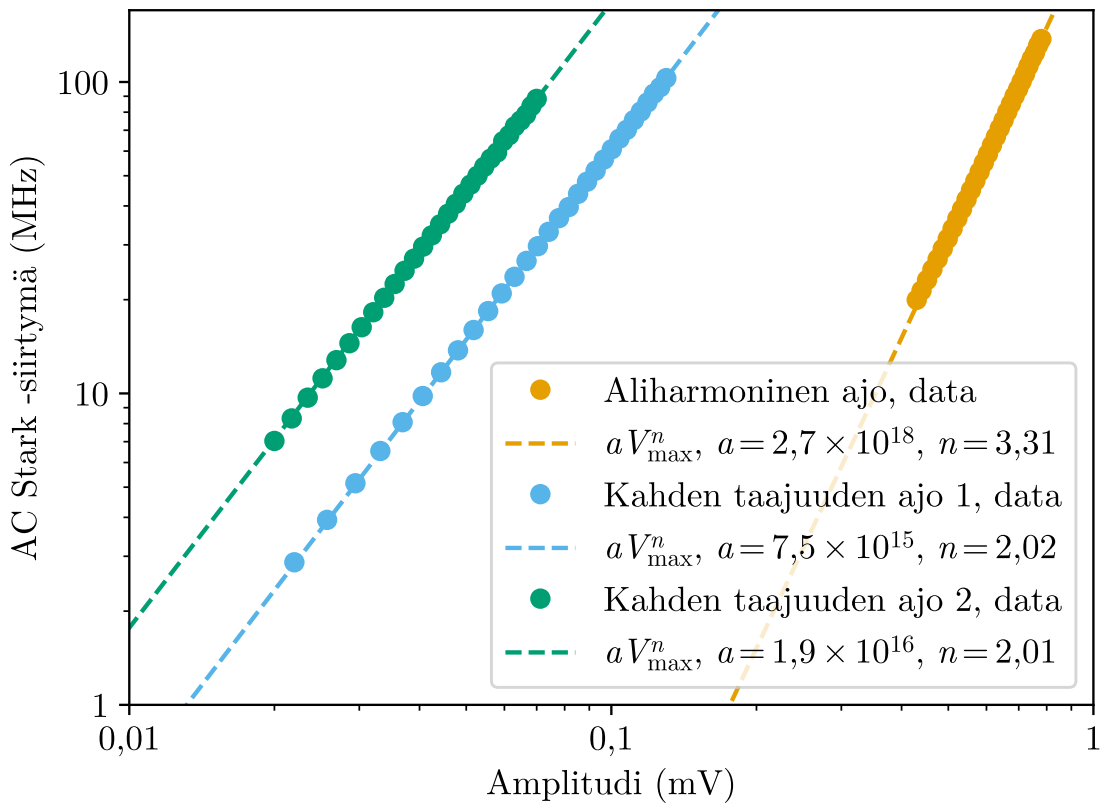


Kuva 6. AC Stark -siirtymä Rabi-taajuuden funktiona (a) resonanssiajossa sekä (b) epäresonanteissa ajoalueissa.

nanssiajossa negatiivinen. Pienimmillä Rabi-taajuuksilla ja siten myös ajojännitteillä AC Stark -siirtymä on lähes olematon, ja kuvan 6(b) epäresonantteihin ajomenetelmiin verrattuna resonanssiajon AC Stark -siirtymä on hyvin pieni myös korkeilla Rabi-taajuuksilla. Tämä täsmää tunnettuihin tuloksiin usean tilan kvanttisysteemin ja sähkömagneettisen kentän vuorovaikutuksesta [24].

Kuvan 6(b) perusteella tutkituissa epäresonanteissa ajoalueissa AC Stark -siirtymä on positiivinen, ja suurimmat arvot havaitaan aliharmonisessa ajossa. Pienimmilläkin simulaatioissa saavutetuilla Rabi-taajuuksilla aliharmonisen ajon AC Stark -siirtymä on selvästi nollaa suurempi, joskin pisteet näyttävät lähestyvän nollaa. Kahden taajuuden ajon taajuuspareja verrattaessa havaitaan, että taajuusparilla 1 on taajuusparia 2 suurempi AC Stark -siirtymä, kun kubitti värähtelee samalla Rabi-taajuudella. Tämä selittyy taajuusparin 1 käyttämällä suuremmalla ajojännitteellä, sillä vahvempi ajava kenttä aiheuttaa suuremman siirtymän unimonin energiatiloissa.

Kuvassa 7 epäresonanttien ajoalueiden simulaatiopisteisiin on sovitettu potenssilain $\delta/(2\pi) = aV_{\max}^n$ mukaiset käyrät, joista selviää AC Stark -siirtymän skaalautuminen suhteessa jännitteeseen. Kaikissa tapauksissa sovitteet osuvat datapisteisiin hyvin. Aliharmonisen ajon AC Stark -siirtymä skaalautuu kuvaajan perusteella likimain jännitteen kolmanteen potenssiin, kun taas molemmat kahden taajuuden ajon sovitteet ovat hyvällä tarkkuudella neliöllisiä. Transmonille johdetun teorian mukaan sekä aliharmonisen että kahden taajuuden ajon AC Stark -siirtymä skaalautuu ajojännitteen amplitudin neliöön, mikä ilmenee yhtälöistä (18) ja (19). Rabi-taajuudelle saatujen tulosten tapaan unimonin aliharmoniselle ajolle simuloidut tulokset poikkeavat tästä teoriasta, mutta kahden taajuuden ajo sen sijaan noudattaa teoriaa hyvin.

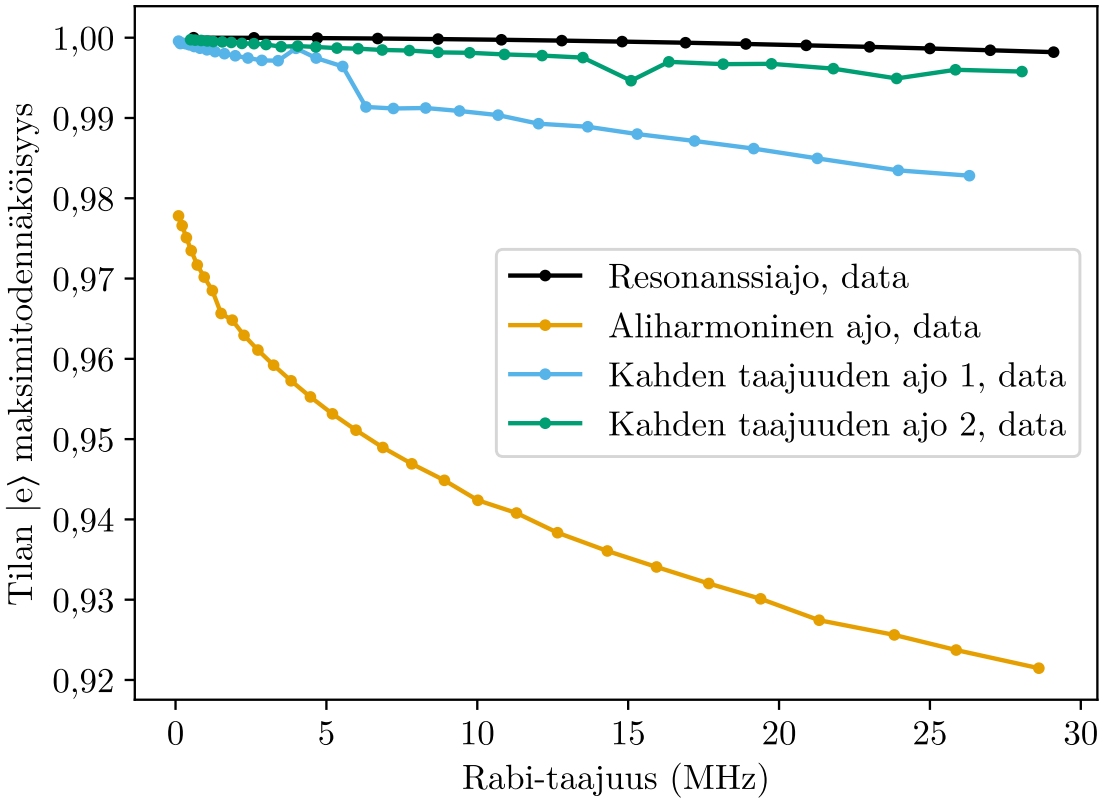


Kuva 7. AC Stark -siirtymä ajojännitteen amplitudin funktiona epäresonanteissa ajoalueissa sekä datapisteisiin tehdyt sovitteet.

4.3 Vuoto laskennallisen avaruuden ulkopuolelle

Koska kvanttimekaaniseen harmoniseen värähtelijään perustuvana kubittina unimonilla on myös korkeampia energiatiloja kubitin tilojen $|g\rangle$ ja $|e\rangle$ lisäksi, kubittia ajaessa myös korkeammat tilat voivat virittyä. Tätä kutsutaan kubitin tilan vuotamiseksi (engl. *leakage*). Ilmiöstä johtuen simulaatioissa tavoiteltu ge-siirtymä ei ole täydellinen, vaan useimmissa tapauksissa viritystilan $|e\rangle$ korkein saavutettu todennäköisyys jää hieman arvon 1 alapuolelle. Tämän voi havaita kuvasta 4, jossa erityisesti aliharmonisessa ajossa systeemin tila vuotaa toiselle viritystilalle $|f\rangle$, eikä ensimmäinen viritystila $|e\rangle$ näin ollen saavuta arvoa 1.

Eri ajomenetelmillä saavutetut tilan $|e\rangle$ maksimitodennäköisyydet ilmenevät kuvasta 8. Kaikissa tapauksissa maksimitodennäköisyys laskee Rabi-taajuuden kasvaessa yksittäisiä arvoja lukuun ottamatta, mikä selittyy pulssin lyhenemisellä. Huomionarvoista on, että aliharmonisella ajolla saavutetut arvot ovat selvästi muita ajomenetelmiä pienempiä ja laskevat nopeammin. Tämä selittyy aliharmonisen ajon vaatimalla muita suuremmalla ajojännitteellä. Kahden taajuuden ajossa taajuusparilla 2 saavutetaan taajuusparia 1 korkeampia arvoja, ja resonanssiajossa maksimitodennäköisyydet ovat vielä näitäkin suurempia. Taajuusparin 2 arvot ovat kuitenkin melko lähellä resonanssiajon arvoja, joten ajotaajuuksien optimoinnilla kahden taajuuden ajossa voitaneen päästä lähes resonanssiajoa vastaaviin tuloksiin.



Kuva 8. Viritystilan |e⟩ saavuttama maksimitodennäköisyys Rabi-taajuuden funktiona eri ajoalueissa. Maksimiarvot on laskettu useita Rabi-syklejä sisältävästä datasta, joten arvot poikkeavat hieman X-porttia vastaavasta ensimmäisen Rabi-jakson huippuarvosta.

Optimaalisten ajotaajuusparien etsintä on kuitenkin rajattu tämän työn ulkopuolelle.

Tuloksista havaitaan myös, että jopa resonanssiajossa korkein saavutettu tilan |e⟩ todennäköisyys laskee nopeasti yli promillen päähän arvosta 1,0 Rabi-taajuuden kasvaessa. Useita peräkkäisiä kvanttiportteja suoritettaessa virheen todennäköisyys on tällöin jo merkittävä. Tässä työssä ei kuitenkaan optimoitu simulaatioparametreja tai ajopulssin muotoa. Pulssin muuttaminen tässä käytetystä kanttipulssista esimerkiksi sileäksi tasakattopulssiksi (engl. *flat-top pulse*) parantaisi ge-siirtymän tarkkuutta, jolloin myös epäresonanteilla menetelmillä päästäisiin esitettyjä korkeampiin maksimitodennäköisyyksiin [15].

5 Johtopäätökset

Tämän tutkielman tavoitteena oli tarkastella kahden erilaisen epäresonanssiajomenetelmän, aliharmonisen ajon sekä niin kutsutun kahden taajuuden ajon, toimivuutta unimon-kubitin kvanttitilan säätelyssä sekä verrata menetelmiä unimonin resonanssiajoon. Näissä menetelmissä unimonia ajetaan kubitin taajuudesta selvästi eroavilla taajuuksilla, kun taas resonanssiajossa ajotaajuutena käytetään likimain kubitin taajuutta. Kahden taajuuden ajomenetelmässä ajava jännite on summa kahdesta sinimuotoisesta termistä, ja ajo voidaan toteuttaa usealla eri ajotaajuuksien yhdistelmällä. Tästä syystä tarkasteluun valittiin kaksi paria ajotaajuuksia. Tutkimus toteutettiin simulaatioilla, joissa ajetun unimonin kvanttitilan aikakehitys laskettiin numeerisesti työssä johdetun Hamiltonin funktion avulla.

Koska kyseisten epäresonanttien ajomenetelmien teoriaa ei ole johdettu unimonille, tuloksia verrattiin transmonin teoreettiseen käyttäytymiseen. Simulaatioiden perusteella aliharmonisessa ajossa unimonin dynamiikka poikkesi transmonin teoriasta, sillä sekä Rabi-taajuus että AC Stark -siirtymä kasvoivat ajojännitteen amplitudin funktiona korkeampaan potenssiin kuin transmonin teoria ennustaa. Kahden taajuuden ajossa Rabi-taajuus kasvoi likimain kuutiollisesti ja AC Stark -siirtymä neliöllisesti ajojännitteen amplitudin funktiona, mikä täsmää trasmonin teoriaan. Kaikissa epäresonanteissa ajomenetelmissä Rabi-taajuus kuitenkin kasvoi selvästi nopeammin kuin resonanssiajossa, jossa kasvu oli lineaarista. Tämä tarkoittaa, että epäresonanssiajossa Rabi-taajuutta voidaan kasvattaa merkittävästi vain pienellä lisäyksellä ajojännitteeseen. Tulokset ovat lupaavia, sillä nopeat kvanttiportit vaativat korkeaa Rabi-taajuutta, mutta ajojännitteen kasvattaminen voi lämmittää kubitin ympäristöä ja siten heikentää siirtymän tarkkuutta tai aiheuttaa vuotoa korkeammille energiatiloille.

Suurinta potentiaalia unimonin epäresonanttina ajomenetelmänä osoitti kahden taajuuden ajo kohtalaisen lähellä kubitin taajuutta olevilla ajotaajuuksilla. Työssä havaittiin, että aliharmonisessa ajossa kubitin tila vuosi korkeammille energiatiloille melko paljon, kun taas kahden taajuuden ajossa vuoto oli vähäisempää. Ajotaajuusparilla, jonka taajuudet olivat lähempänä kubitin taajuutta, vuotoa tapahtui lähes yhtä vähäisessä määrin kuin resonanssiajossa. Kyseinen taajuuspari vaati myös pienimmän ajojännitteen kaikista epäresonanteista ajoalueista. Resonanssiajossa käytetty ajojännite oli kuitenkin vielä tätäkin pienempi, joten suoraa hyötyä kahden taajuuden ajosta ei tässä tutkimuksessa käytetyillä ajotaajuuksilla vielä saatu.

Yksittäisiä merkittäviä virhelähteitä simulaatiotuloksissa ei juuri ollut, vaan mahdollinen virhe kasautui useista approksimatiivisista vaiheista. Unimonin Hamiltonin funktion matemaattiseen johtoon sisältyi linearisointi, ja ääretönulotteinen Hamiltonin funktio diagonalisoitiin numeerisesti käyttämällä vain muutamaa tärkeintä moodia typistetyillä matriisiesityksillä. Kvanttitilan aikakehityksen simuloimisessa huomioitiin vain unimonin kymmenen alinta energiatilaa, sillä korkeampien tilojen vaikutus alimpiin tiloihin on pieni. Suurimmilla Rabi-taajuuksilla Floquet'n menetelmän käyttäminen saattoi vaikuttaa erityisesti kvanttitilan vuodosta saatujen tulosten tarkkuuteen. Ilmeisin virhelähde oli kuitenkin datapisteissä käytettyjen optimaalisten ajotaajuuksien etsintä, sillä se tehtiin enimmäkseen yksitellen ja valittujen

taajuuksien tarkkuus vaihteli. Saatujen tulosten valossa tästä aiheutunut virhe lienee kuitenkin pienehkö.

Tulokset osoittivat, että unimonia voidaan ajaa onnistuneesti epäresonanssissa ja erityisesti kahden taajuuden ajossa. Hyvällä optimoinnilla kahden taajuuden ajomenetelmällä on potentiaalia tuottaa merkittävää hyötyä nopean ja tarkan kvanttiportin toteuttamisessa sekä kubitin korkean elinajan saavuttamisessa verrattuna perinteiseen resonanssiajoon. Tästä syystä tässä työssä aloitettua tutkimusta on kannattavaa jatkaa. Jatkotutkimuksissa unimonin epäresonassiajoa voitaisiin tutkia kokeellisesti, jolloin tuloksia voisi verrata simuloimalla saatuihin. Lisäksi unimonin epäresonanteille ajomenetelmille olisi hyödyllistä kehittää teoreettinen malli. Tässä käytetyn kapasitiivisen kytkennän lisäksi suprajohtavia kubitteja voidaan ajaa induktiivisella kytkennällä, jonka hyödyntämistä unimonin epäresonanssiajossa olisi myös syytä tutkia.

Viitteet

[1] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, nro 6/7, s. 467–488, 1982.

[2] D. Deutsch, “Quantum Theory, the Church–Turing Principle and the Universal Quantum Computer,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 400, nro 1818, s. 97–117, 8. heinäkuuta 1985.

[3] P. Shor, “Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring,” teoksessa *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, marraskuu 1994, s. 124–134.

[4] L. K. Grover, “A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search,” teoksessa *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, sarja STOC ’96, New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1. heinäkuuta 1996, s. 212–219.

[5] P. W. Shor, “Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 26, nro 5, s. 1484–1509, lokakuu 1997.

[6] U. Ullah ja B. Garcia-Zapirain, “Quantum Machine Learning Revolution in Healthcare: A Systematic Review of Emerging Perspectives and Applications,” *IEEE Access*, vol. 12, s. 11 423–11 450, 2024.

[7] S. K. Sahu ja K. Mazumdar, “State-of-the-art analysis of quantum cryptography: Applications and future prospects,” *Frontiers in Physics*, vol. 12, 6. elokuuta 2024.

[8] A. Abbas et al., “Challenges and opportunities in quantum optimization,” *Nature Reviews Physics*, vol. 6, nro 12, s. 718–735, joulukuu 2024.

[9] M. A. Nielsen ja I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 9. joulukuuta 2010, 709 s.

[10] C. D. Bruzewicz, J. Chiaverini, R. McConnell ja J. M. Sage, “Trapped-Ion Quantum Computing: Progress and Challenges,” *Applied Physics Reviews*, vol. 6, nro 2, s. 021 314, 29. toukokuuta 2019.

[11] P. Krantz, M. Kjaergaard, F. Yan, T. Orlando, S. Gustavsson ja W. Oliver, “A Quantum Engineer’s Guide to Superconducting Qubits,” *Applied Physics Reviews*, vol. 6, s. 021 318, 1. kesäkuuta 2019.

[12] G. Ripoll ja J. José, *Quantum Information and Quantum Optics with Superconducting Circuits*, 1. painos. Cambridge University Press, 31. heinäkuuta 2022.

[13] Z. Wang, S. Shankar, Z. Minev, P. Campagne-Ibarcq, A. Narla ja M. Devoret, “Cavity Attenuators for Superconducting Qubits,” *Physical Review Applied*, vol. 11, nro 1, s. 014 031, 16. tammikuuta 2019.

[14] A. Sah, S. Kundu, H. Suominen, Q. Chen ja M. Möttönen, “Decay-protected superconducting qubit with fast control enabled by integrated on-chip filters,” *Communications Physics*, vol. 7, nro 1, s. 227, 12. heinäkuuta 2024.

[15] M. Xia et al. “Fast superconducting qubit control with sub-harmonic drives.” (16. kesäkuuta 2023), esijulkaistu.

[16] E. Hyyppä et al., “Unimon qubit,” *Nature Communications*, vol. 13, nro 1, s. 6895, 12. marraskuuta 2022.

[17] D. Mcintyre, C. A. Manogue ja J. Tate, *Quantum Mechanics*, 1. painos. India: Pearson India, 2016, 615 s.

[18] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin ja A. Wallraff, “Circuit Quantum Electrodynamics,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 93, nro 2, s. 025 005, 19. toukokuuta 2021.

[19] M. Göppl et al., “Coplanar Waveguide Resonators for Circuit Quantum Electrodynamics,” *Journal of Applied Physics*, vol. 104, s. 113904-113904–8, 1. joulukuuta 2008.

[20] S. Tuohino, V. Vadimov, W. Teixeira, T. Malmelin, M. Silveri ja M. Möttönen, “Multimode Physics of the Unimon Circuit,” *Physical Review Research*, vol. 6, nro 3, s. 033 001, 1. heinäkuuta 2024.

[21] S. Coop, S. Palacios, P. Gomez, Y. N. M. de Escobar, T. Vanderbruggen ja M. W. Mitchell, “Floquet theory for atomic light-shift engineering with near-resonant polychromatic fields,” *Optics Express*, vol. 25, nro 26, s. 32 550–32 559, 25. joulukuuta 2017.

[22] K. Viebahn, “Introduction to Floquet theory,” 13. marraskuuta 2020.

[23] M. Kjaergaard et al., “Superconducting qubits: Current state of play,” *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 11, s. 369–395, Volume 11, 2020 10. maaliskuuta 2020.

[24] N. B. Delone ja V. P. Krainov, “AC Stark shift of atomic energy levels,” *Physics-Uspekhi*, vol. 42, nro 7, s. 669, 31. heinäkuuta 1999.

[25] D. I. Schuster et al., “AC Stark Shift and Dephasing of a Superconducting Qubit Strongly Coupled to a Cavity Field,” *Physical Review Letters*, vol. 94, nro 12, s. 123 602, 30. maaliskuuta 2005.

[26] S. H. Autler ja C. H. Townes, “Stark Effect in Rapidly Varying Fields,” *Physical Review*, vol. 100, nro 2, s. 703–722, 15. lokakuuta 1955.

[27] R. Duda, E. Hyyppä, O. Mukkula, V. Vadimov ja M. Möttönen, “Parameter optimization for the unimon qubit,” *Physical Review Research*, vol. 7, nro 3, s. 033 092, 25. heinäkuuta 2025.

[28] H. J. Weber ja G. B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicists.* Amsterdam: Academic Press, 2004, 932 s.

[29] A. L. Fetter ja J. D. Walecka, *Theoretical Mechanics of Particles and Continua.* Mineola, N.Y: Dover Publications, 2003, 570 s.

[30] M. Tuokkola, “Suppression of leakage errors during single-qubit gates by destructive interference in multimode driving,” Maisterintutkielma, Helsingin yliopisto, Helsinki, 5. elokuuta 2024, 48 s.

[31] J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 2. painos, laajennettu ja korjattu. Boca Raton, Florida; London; New York: CRC Press, 2001, 825 s.

A Kahden taajuuden ajon teoria transmonille

Häiriöteoriaa käyttämällä transmonin Hamiltonin funktio voidaan ilmaista luomis- ja hävitysoperaattoreiden $\hat{q}^\dagger$ ja $\hat{q}$ avulla. Kun transmonia ajetaan kahdella eritaajuuksisella sinitermillä, häiriöteorian mukainen Hamiltonin funktio on [11, 12]

$$\frac{\hat{H}}{\hbar} = \omega' \hat{q}^\dagger \hat{q} + \frac{\alpha}{12}\left(\hat{q}+\hat{q}^\dagger\right)^4 + \Omega_1 \sin(\omega_1 t)\left(\hat{q}+\hat{q}^\dagger\right) + \Omega_2 \sin(\omega_2 t)\left(\hat{q}+\hat{q}^\dagger\right) , \tag{A1}$$

missä $\omega' = \omega_\mathrm{q} - \alpha$, kun ω_q on kubitin taajuus ja α on kubitin epäharmonisuus. Ajavat taajuudet ovat ω_1 ja ω_2 ja ajotermien amplitudit ovat Ω_1 ja Ω_2. Siirto-operaattorilla (engl. *displacement operator*) $\hat{D}(t) = \exp\left[z_1(t)\hat{q} + z_2(t)\hat{q}^\dagger\right]$ Hamiltonin funktio muuntuu muotoon

$$\begin{aligned}\frac{\hat{H}_D}{\hbar} &= \hat{D}\frac{\hat{H}}{\hbar}\hat{D}^\dagger + \mathrm{i}\dot{\hat{D}}\hat{D}^\dagger \\ &= \omega'\left(\hat{q}^\dagger\hat{q} + z_1\hat{q} - z_2\hat{q}^\dagger\right) + \frac{\alpha}{12}\left(\hat{q}+\hat{q}^\dagger + z_1 - z_2\right)^4 + \Omega_1\sin(\omega_1 t)\left(\hat{q}+\hat{q}^\dagger\right) \\ &+ \Omega_2\sin(\omega_2 t)\left(\hat{q}+\hat{q}^\dagger\right) + \mathrm{i}\left(\dot{z}_1\hat{q} + \dot{z}_2\hat{q}^\dagger\right) ,\end{aligned} \tag{A2}$$

missä on hyödynnetty relaatioita $\hat{D}\hat{q}\hat{D}^\dagger = \hat{q} - z_2$ ja $\hat{D}\hat{q}^\dagger\hat{D}^\dagger = \hat{q}^\dagger + z_1$ sekä poistettu vakiotermit. Lineaariset termit $\hat{q}$:n ja $\hat{q}^\dagger$:n suhteen kumoutuvat differentiaaliyhtälöiden

$$\omega' z_1 + \Omega_1 \sin(\omega_1 t) + \Omega_2 \sin(\omega_2 t) + \mathrm{i}\dot{z}_1 = 0 , \tag{A3}$$

$$-\omega' z_2 + \Omega_1 \sin(\omega_1 t) + \Omega_2 \sin(\omega_2 t) + \mathrm{i}\dot{z}_2 = 0 \tag{A4}$$

toteutuessa. Yhtälöiden ratkaisut ovat

$$z_1(t) = \Omega_1 \frac{-\omega'\sin(\omega_1 t) + \mathrm{i}\omega_1\cos(\omega_1 t)}{\omega'^2 - \omega_1^2} + \Omega_2 \frac{-\omega'\sin(\omega_2 t) + \mathrm{i}\omega_2\cos(\omega_2 t)}{\omega'^2 - \omega_2^2} , \tag{A5}$$

$$z_2(t) = \Omega_1 \frac{\omega'\sin(\omega_1 t) + \mathrm{i}\omega_1\cos(\omega_1 t)}{\omega'^2 - \omega_1^2} + \Omega_2 \frac{\omega'\sin(\omega_2 t) + \mathrm{i}\omega_2\cos(\omega_2 t)}{\omega'^2 - \omega_2^2} , \tag{A6}$$

jotka sijoittamalla muunnettu Hamiltonin funktio saadaan muotoon

$$\frac{\hat{H}_D}{\hbar} = \omega'\hat{q}^\dagger\hat{q} + \frac{\alpha}{12}\left[\hat{q}+\hat{q}^\dagger - 2\omega'\left(\frac{\Omega_1\sin(\omega_1 t)}{\omega'^2-\omega_1^2} + \frac{\Omega_2\sin(\omega_2 t)}{\omega'^2-\omega_2^2}\right)\right]^4 . \tag{A7}$$

Transmonin Rabi-taajuuden löytämiseksi siirrytään pyörivään koordinaatistoon unitaarisella muunnoksella $\hat{R}(t) = \exp\left[\mathrm{i}(2\omega_1 - \omega_2)t\hat{q}^\dagger\hat{q}\right]$, jota vastaa Hamiltonin funktio

$$\begin{aligned}\frac{\hat{H}_R}{\hbar} &= \hat{R}\frac{\hat{H}_D}{\hbar}\hat{R}^\dagger + \mathrm{i}\dot{\hat{R}}\hat{R}^\dagger = \left(\omega' - 2\omega_1 + \omega_2\right)\hat{q}^\dagger\hat{q} \\ &+ \frac{\alpha}{12}\left[\hat{q}e^{-\mathrm{i}(2\omega_1-\omega_2)} + \hat{q}^\dagger e^{\mathrm{i}(2\omega_1-\omega_2)} + \mathrm{i}\omega'\left(\Omega_1\frac{e^{\mathrm{i}\omega_1 t} - e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}}{\omega'^2-\omega_1^2} + \Omega_2\frac{e^{\mathrm{i}\omega_2 t} - e^{-\mathrm{i}\omega_2 t}}{\omega'^2-\omega_2^2}\right)\right]^4 .\end{aligned} \tag{A8}$$

Avataan neljännen asteen termi ja käytetään pyörivän aallon approksimaatiota (RWA, engl. *rotating wave approximation*), jossa nopeasti pyörivät termit oletetaan merkityksettömiksi ja hylätään [12]. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\hat{H}_R}{\hbar} &= (\omega' - 2\omega_1 + \omega_2)\,\hat{q}^\dagger\hat{q} \\ &+ \frac{\alpha}{12}\left\{6\hat{q}^\dagger\hat{q}^\dagger\hat{q}\hat{q} + 12\hat{q}^\dagger\hat{q} + 24\omega'^2\left[\frac{\Omega_1^2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2} + \frac{\Omega_2^2}{(\omega'^2-\omega_2^2)^2}\right]\hat{q}^\dagger\hat{q}\right. \\ &\left. + 24\mathrm{i}\frac{\omega'^3\Omega_1^2\Omega_2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2(\omega'^2-\omega_2^2)}\hat{q} - 24\mathrm{i}\frac{\omega'^3\Omega_1^2\Omega_2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2(\omega'^2-\omega_2^2)}\hat{q}^\dagger\right\} \\ &= \left\{\omega' - 2\omega_1 + \omega_2 + \alpha + 2\alpha\omega'^2\left[\frac{\Omega_1^2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2} + \frac{\Omega_2^2}{(\omega'^2-\omega_2^2)^2}\right]\right\}\hat{q}^\dagger\hat{q} \\ &+ \frac{\alpha}{2}\hat{q}^\dagger\hat{q}^\dagger\hat{q}\hat{q} + 2\mathrm{i}\frac{\alpha\omega'^3\Omega_1^2\Omega_2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2(\omega'^2-\omega_2^2)}\left(\hat{q} - \hat{q}^\dagger\right)\,,\end{aligned} \tag{A9}$$

missä vakiotermit on jälleen poistettu. Kun termin $\hat{q}^\dagger\hat{q}$ kerroin on nolla, yllä oleva muoto on samankaltainen kuin resonanssiajon Hamiltonin funktion pyörivän aallon approksimaatio [11]. Tästä voidaan päätellä kahden taajuuden ajon Rabi-taajuudeksi

$$\Omega_\mathrm{R}^\mathrm{two} = \frac{4\alpha\omega'^3\Omega_1^2\Omega_2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2(\omega'^2-\omega_2^2)}\,. \tag{A10}$$

Yllä johdetusta Hamiltonin funktiosta (A9) saadaan teoreettinen lauseke myös kahden taajuuden ajon AC Stark -siirtymälle, sillä ajotaajuuksille pätee yhtälö $2\omega_1 - \omega_2 = \omega_\mathrm{q} + \delta_\mathrm{two}$, missä δ_two on AC Stark -siirtymä. Siirtymä saadaan ratkaistua termin $\hat{q}^\dagger\hat{q}$ kertoimesta, joka asetetaan nollaksi:

$$\begin{aligned}0 &= \omega' - 2\omega_1 + \omega_2 + \alpha + 2\alpha\omega'^2\left[\frac{\Omega_1^2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2} + \frac{\Omega_2^2}{(\omega'^2-\omega_2^2)^2}\right] \\ &= \omega_\mathrm{q} - \alpha - \omega_\mathrm{q} - \delta_\mathrm{two} + \alpha + 2\alpha\omega'^2\left[\frac{\Omega_1^2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2} + \frac{\Omega_2^2}{(\omega'^2-\omega_2^2)^2}\right]\,,\end{aligned} \tag{A11}$$

mistä saadaan

$$\delta_\mathrm{two} = 2\alpha\omega'^2\left[\frac{\Omega_1^2}{(\omega'^2-\omega_1^2)^2} + \frac{\Omega_2^2}{(\omega'^2-\omega_2^2)^2}\right]\,. \tag{A12}$$