

Tommi Rimpiläinen

Anisotrooppisen pallon sähköinen vaste

Sähkötekniikan korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi
diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 8.8.2011.

Työn valvoja:

Prof. Ari Sihvola

Työn ohjaaja:

TkT Henrik Wallén



Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu

Tekijä: Tommi Rimpiläinen

Työn nimi: Anisotrooppisen pallon sähköinen vaste

Päivämäärä: 8.8.2011

Kieli: Suomi

Sivumäärä:9+76

Sähkötekniikan korkeakoulu

Radiotieteen ja -tekniikan laitos

Professuuri: Sähkömagnetiikka

Koodi: S-96

Valvoja: Prof. Ari Sihvola

Ohjaaja: TkT Henrik Wallén

Työ käsittelee anisotrooppisten pallojen sähköistä vastetta staattisessa sähkökentässä. Tarkasteltavat pallot ovat anisotrooppisia siten, että väliaineen permittivisyys pallon sisällä on dyadi, jonka komponentit ovat vakioita pallokoordinaatistossa. Kuvatunlaisia palloja kutsutaan työssä systrooppisiksi. Tilanteessa, jossa systrooppinen pallo on homogeenisessa väliaineessa, esitetään kenttäratkaisu. Ratkaisun etsimiseen käytetään menetelmää, joka on osin analyttinen ja osin numeerinen. Kenttäratkaisua käytetään polarisoituvuusdyadin muodostamiseen.

Avainsanat: Pallo, Anisotropia, Dyadi, Polarisoituvuus, Systropia

Author: Tommi Rimpiläinen

Title: Electric response of an anisotropic sphere

Date: 8.8.2011

Language: Finnish

Number of pages:9+76

School of Electrical Engineering

Department of Radio Science and Technology

Professorship: Electromagnetics

Code: S-96

Supervisor: Prof. Ari Sihvola

Instructor: D.Sc. (Tech.) Henrik Wallén

The document is about the electric response of anisotropic spheres. The anisotropy is defined by a permittivity dyadic in spherical coordinates. The components of the permittivity dyadics are assumed to be constant in this coordinate system. A sphere with such anisotropy is called systropic in this document. It is shown that when the systropic sphere is in a homogeneous medium, a field solution can be found with a method that is in part analytical and in part numerical. A polarizability dyadic is constructed using the field solution.

Keywords: Sphere, Anisotropy, Dyad, Polarizability, Systropy

Esipuhe

Käsillä oleva diplomityö sai alkunsa kesällä 2010 tehdystä tutkimuksesta Aalto-yliopiston Radiotieteen ja -tekniikan laitoksella. Hofstadterin lain mukaisesti työhön käytetty aika odotetusti ylitti odotukset. Työssä saatu apu ja henkinen tuki olivat kuitenkin Radiotieteen ja -tekniikan laitoksen henkeväen ilmapiirin huomioon ottaen odotusten mukaiset.

Eriytinen kiitos kuuluu työn valvojalle, professori Ari Sihvolalle. Työn mielenkiintoinen ja haastava tutkimusaihe oli professori Sihvolan suosittelema. Suuret kiitokset kuuluvat myös työn ohjaajalle, TkT Henrik Wallénille, jonka julkaisemattomasta artikkelista ”Electrostatic Response of a Radially Uniaxial Sphere” oli huomattava apu kirjoitettaessa RU-palloja käsittelevää lukua. Kiitosta ansaitsee myös Henrik Kettunen, joka yhdessä Henrik Wallénin kanssa auttoi tarkasteltavan sähkömagneettisen ongelman ratkaisemisessa numeerisesti COMSOL Multiphysics -ohjelman avulla. Kaikille kolmelle kuuluu lämmin kiitos työn kirjallista osuutta koskevasta rakentavasta palautteesta, jonka määrä oli huomattava.

Kirjallisen dokumentin laatiminen \LaTeX -ympäristössä oli suoraviivaista – ainakin runsaan avun jälkeen. Kiitos kuuluu siis Luis Costalle ja Perttu Puskalle, joitten opinnäytetyöpohja \LaTeX -ympäristöä varten oli työtä laadittaessa korvaamattomaksi avuksi. Kiitosta ansaitsevat myös Matti Taskinen ja Henrik Wallén, joitten vankkumaton kokemus dokumenttien laatimisesta \LaTeX -ympäristössä auttoi ratkaisemaan eteen nousevia ongelmia yksi kerrallaan.

Lopulta haluan kiittää kaikkia niitä ystäviä, sukulaisia ja tuttaviam, jotka ovat osoittaneet kiinnostustaan työtäni kohtaan kysymällä: ”Mitä ne sellaiset systrooppiset pallot ovat?”

Otaniemi, 8.6.2011

Tommi Rimpiläinen

Sisältö

Tiivistelmä	ii
Tiivistelmä (englanniksi)	iii
Esipuhe	iv
Sisällysluettelo	v
Symbolit ja lyhenteet	vii
1 Johdanto	1
2 Teoria	5
2.1 Dyadialgebran perusteet	5
2.2 Sähkökenttä väliaineessa	7
2.2.1 Väliaineen vaikutus	7
2.2.2 Maxwellin yhtälöitten tasoalgoritkaisu	8
2.2.3 Laplacen yhtälö	10
2.3 Reuna- ja rajapintaehdot	10
2.3.1 Reunaehdot	10
2.3.2 Matemaattiset rajapintaehdot	11
2.3.3 Sähköstatiikan sirontaongelma	15
2.4 Yleistetty Laplacen yhtälö pallokoordinaatistossa	17
2.4.1 Yhtälön muodostaminen	17
2.4.2 Muuttujien separoiminen	18
2.4.3 Legendren yhtälön ratkaiseminen	19
2.4.4 Laplacen yhtälön ratkaisu	22
2.5 Mie-sironta	22
3 Polarisoituvuuden laskeminen	34
3.1 PU-ympyrälieriö	34
3.2 RU-pallo	39
3.2.1 Yleinen RU-pallo	39
3.2.2 Isotrooppinen pallo	43
3.3 Säännöllisesti systrooppinen pallo	44
3.3.1 Säännöllinen systropia	44

3.3.2	Fourier'n menetelmä	48
3.3.3	Matriisiyhtälöt	48
3.4	Yleisesti systrooppinen pallo	53
3.5	Valmisohjelmalla lasketut tulokset	54
3.5.1	Momenttimenetelmä ja elementtimenetelmä	54
3.5.2	COMSOL Multiphysics	57
3.5.3	Numeeristen tulosten tarkkuus	62
3.6	Reunaehtojen soveltaminen	63
4	Yhteenveto	66
A	Ohjelmalistaukset	72

Symbolit ja lyhenteet

Symbolit

a	pallon säde
\mathbb{N}	luonnolliset luvut, 1, 2, 3, 4, ...
\mathbb{R}	reaaliluvut
\mathbb{E}^3	kolmiulotteinen euklidinen avaruus
$\Re\{\cdot\}$	kompleksiluvun reaaliosa
$\Im\{\cdot\}$	kompleksiluvun imaginaariosa
\mathbf{E}	sähkökentän voimakkuus [V/m]
\mathbf{H}	magneettikentän voimakkuus [A/m]
\mathbf{D}	sähkövuon tiheys [As/m ²]
\mathbf{B}	magneettivuon tiheys [Vs/m ²]
\mathbf{J}	virrantiheys [A/m ²]
ρ	varaustiheys [As/m ³]
\mathbf{K}	pintavirran tiheys [A/m]
ρ	pintavarauksen tiheys [As/m ²]
ϕ	sähköstaattinen potentiaali
ϵ_0	tyhjiön permittiivisyys $\approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
μ_0	tyhjiön permeabiilisuus $= 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am ²
ϵ_{rr}	suhteellisen permittiivisyyden radiaalikomponentti
$\epsilon_{\theta\theta}$	suhteellisen permittiivisyyden θ -komponentti
$\epsilon_{\phi\phi}$	suhteellisen permittiivisyyden ϕ -komponentti
$\bar{\epsilon}$	permittiivisyysdyadi
$\bar{\mu}$	permeabiilisuusdyadi
m	taitekerroin
\mathbf{P}	polarisaatio [As/m ²]
\mathbf{p}	dipolimomentti [Asm]
p_{\parallel}	dipolimomentin amplitudi, kun heräte on yhdensuuntainen z -akseliin nähden
p_{\perp}	dipolimomentti, kun heräte on kohtisuora z -akseliin nähden

$\bar{\alpha}$	polarisoituvuus [Asm^2/V]
$\bar{\alpha}_n$	normalisoitu polarisoituvuus
$\alpha_{n,\parallel}$	normalisoitu polarisoituvuus, kun heräte on yhdensuuntainen z -akseliin nähden
$\alpha_{n,\perp}$	normalisoitu polarisoituvuus, kun heräte on kohtisuora z -akseliin nähden
\bar{I}	yksikködyadi
\bar{I}_t	tangentiaalinen yksikködyadi
r	pallokoordinaatiston radiaalikoordinaatti
θ	pallokoordinaatiston inkliinaatiokulma
φ	pallokoordinaatiston atsimuuttikulma
$\mathbf{u}_{r/\theta/\varphi}$	pallokoordinaatiston yksikkövektori
$\mathbf{u}_{x/y/z}$	kartesisen koordinaatiston yksikkövektori
\mathbf{n}	yksikkönormaalivektori
∂V	alueen V reuna
\mathbf{E}^p	statiikan herätekenttä
\mathbf{E}^s	statiikan vastekenttä
\mathbf{E}_i	dynamiikan herätekenttä
\mathbf{E}_s	dynamiikan sirontakenttä
\mathbf{X}	sironta-amplitudivektori
\mathbf{S}	Poyntingin vektori [W/m^2]
G	sirottajan geometrinen poikkipinta-ala
I_i	herätekentän irradianssi [W/m^2]
W_a	absorboituva teho [W]
C_a	absorptiopoikkipinta-ala W_a/I_i [m^2]
Q_a	absorptiotehokkuus C_a/G

Operaattorit

$\nabla \times \mathbf{A}$	vektorin \mathbf{A} roottori
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	vektorin \mathbf{A} divergenssi
∇f	skalaarifunktion f gradientti
$\nabla_n f$	skalaarifunktion f normaaliderivaatta
$\frac{d}{dt}$	derivaatta muuttujan t suhteen
$\frac{\partial}{\partial t}$	osittaisderivaatta muuttujan t suhteen
$\sum_i a_i$	Summa indeksin i yli
$\sum_{i l} a_i$	$a_l + a_{2l} + a_{3l} + a_{4l} + \dots$
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	vektorien \mathbf{A} ja \mathbf{B} pistetulo

Lyhenteet

BH	Bohren & Huffman
PU	polaariuniaksaalinen
RU	radiaalisesti uniaksaalinen
DB	reunaehto: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$
FEM	elementtimenetelmä (Finite Element Method)
BEM	reunaelementtimenetelmä (Boundary Element Method)
FDTD	aika-alueen differenssimenetelmä (Finite-Difference Time-Domain)

Luku 1

Johdanto

Sähkömagnetiikka kukoistaa kaikkialla, missä on valoa. Silmäys punertavalle iltataivaalle antaa välittömän esimerkin sähkömagneettisen aallon sironnasta. Kun aurinko on lähellä horisonttia, valonsäteet kulkevat maapallon ilmakehässä pitemmän matkan tarkkailijan luo kuin auringon ollessa korkealla horisontin yläpuolella. Ilmakehässä osa auringon valosta absorboituu ilmakehän hiukkasiin ja osa siroaa. Ilmakehän vaikutus auringon valon spektriin riippuu pitkälti ilmakehän hiukkasten ominaisuuksista. Jos hiukkasten koko on pieni näkyvän valon aallonpituuksiin nähden, käy kuten kuvassa 1.1a. Rayleigh-sironta aiheuttaa sen, että pienet aallonpituudet jäävät pois läheltä taivaan rantaa tulevista valonsäteistä, mutta taivas on muilta osin tavallisen sininen. Toisaalta, jos ilmassa on tätä kookkaampia hiukkasia esimerkiksi teollisuuden päästöjen vuoksi, Mie-sironta vaikuttaa valon spektriin



(a) Pohjois-Norja, 2008



(b) Ganzhou, 2009

Kuva 1.1: Arkielämän esimerkki sähkömagneettisen kentän sironnasta. Taivaan väri auringon laskiessa riippuu ilmakehän hiukkasten mittasuhteista. Rayleigh-sironta on hallitseva silloin, kun sirottajat ovat halkaisijaltaan alle 50 nm. Silloin ainostaan taivaanranta on punertava. Jos sirottajien koko on näkyvän valon aallonpituuksien suuruusluokassa, eli noin 600 nm, Mie-sironta on voimakasta. Silloin koko taivas muuttuu punertavaksi. Kuvat julkaistaan valokuvaajien Thomas Laupstad ja Markus Bahlmann suosiollisella luvalla.

olennaisesti (Bohren & Huffman, 1983). Mie-sironta aiheuttaa sen, että taivaasta tulee kauttaaltaan punainen, kuten kuvassa 1.1b. Aihetta tarkastellaan lähemmin luvussa 2.5.

Sähköstatiikan sirontaongelma on erikoistapaus, jossa aallonpituus on sirottajan kokoon nähden ääretön. Luonnossa ei esiinny täysin staattisia sähkökenttiä, mutta riittävän hitaasti muuttuva sähkökenttä on olennaisesti staattisen kaltainen. Sähköstatiikka on sähkömagneettisen teorian osa-alue, jossa aikaderivaattojen oletetaan menevän nolleen. Statiikassa kytkeytyminen sähkökenttien ja magneettikenttien välillä katoaa. Sähkö- ja magneettikenttien välisen kytköksen katoaminen helpottaa merkittävästi laskutoimituksia, sillä ratkaistavaksi jää pienempi määrä tuntemattomia, kuin mikä dynamiikassa olisi tarpeen. Erona dynamiikkaan nähden on se, että statiikassa riittää usein ratkaista skalaariarvoinen potentiaalifunktio, kun dynamiikassa tarvittaisiin lisäksi vektoriarvoinen potentiaalifunktio.

Tarkasteltaessa sähköstaattista sirontaa tarvitaan käyttökelpoinen mittari kuvaamaan sironnan voimakkuutta. Kaukana sirottajasta, niin kutsutussa kaukokentässä, kappaleen vastakenttä muistuttaa likimain dipolin, eli kahden hyvin lähelle toisiaan tuodun sähkövarauksen, aiheuttamaa kenttää. Sirottajan voi siis korvata dipolilla siten, että sähkökenttä säilyy likimain muuttumattomana. Sirottajan korvaamaan tarvittavan dipolin voimakkuutta suhteessa herätekentän voimakkuuteen kutsutaan polarisoituvuudeksi. Kaukokentässä polarisoituvuus kertoo sirottajan ominaisuuksista kaiken olennaisen.

Aineen käyttäytymistä sähkömagneettisessa kentässä pystytään tarkastelemaan kahdesta eri näkökulmasta. Joskus tavoitteena on tutkia sitä, kuinka väliaine reagoi mikroskooppisella tasolla, kun siihen kohdistuu sähkömagneettinen voima. Aineen mikroskooppisen rakenteen ja käyttäytymisen tunteminen ei kuitenkaan ole tarpeen tutkittaessa väliaineen vaikutusta sähkömagneettiseen kenttään, kun käytetty aallonpituus on riittävän suuri. Käytettäessä pieniä aallonpituuksia väliaineen yksityiskohdat alkavat vaikuttaa sähkömagneettiseen kenttään, jolloin väliaineen mallintaminen monimutkaistuu huomattavasti. (Lindell, 1992.)

Aineen vaikutus sähkömagneettiseen kenttään voi riippua kentän polarisaatiosta. Silloin ainetta kutsutaan anisotrooppiseksi. Anisotrooppisen käyttäytymisen aiheuttaa tavallisesti epäsymmetrisyys aineen mikroskooppisessa rakenteessa. Esimerkiksi puun runko on anisotrooppinen, koska puun syyt ovat voimakkaasti suuntautuneita. Luonnossa on myös kiteitä, jotka ovat muodostuneet suuntautuneista molekyyleistä (Qiu et al., 2010). Suuntautunut kide, kuten puunrunkokin, on anisotrooppinen.

Dyadilaskenta on matemaattinen työkalu, joka soveltuu anisotrooppisen materiaalin tarkastelemiseen erityisen hyvin. Dyadit ovat matriisien ohella yksi tapa esittää lineaarinen kuvaus kolmiulotteisesta vektoriavaruudesta itseensä. Avaruudesta otetaan kaksi vektoria, jotka yhdistetään toisiinsa ilman operaatiota. Näin muodostettu pari on uusi matemaattinen konstruktio, jota kutsutaan dyadituloksi. Laskemalla dyadituloja keskenään yhteen pystytään muodostamaan lineaarisia kuvauksia, joita kutsutaan dyadeiksi. Sähkömagneetiikassa näin muodostettuja lineaarisia kuvauksia käytetään mallintamaan väliaineen ominaisuuksia.

Tavallisesti väliaineen voi mallintaa käyttämällä neljää eri dyadimuotoista väliaineparametria. Nämä neljä dyadia eivät kerro, mitä aineessa tapahtuu kentän

kohdistuessa siihen, mutta ne kuvaavat väliaineen vaikutusta kenttään. Statiikassa materiaalin kuvaaminen väliaineparametrien avulla yksinkertaistuu. Koska magneettikenttään ei tarvitse kiinnittää huomiota, dyadimuotoisista väliaineparametreista voidaan jättää huomiotta sähkö- ja magneettikenttien keskinäistä kytkentää kuvaavat kaksi parametria. Lisäksi magneettikenttää kuvaavan väliaineparametrin voi jättää huomiotta. Jäljelle jää yksi ainut dyadimuotoinen väliaine parametri, joka on väliaineen permittiivisyys. Luonnossa esiintyvillä aineilla permittiivisyysdyadin komponentit ovat reaalisia ja ne ovat lukuarvoltaan suurempia kuin yksi. Toisaalta, jos tarkastellaan aikaharmonisia kenttiä häviöllisessä väliaineessa, permittiivisyyden arvo on tavallisesti kompleksinen.

Vaikka Maxwellin yhtälöt on tunnettu vuodesta 1864, yhtälöitten ratkaiseminen on yhä haastavaa. Edes geometrialtaan yksinkertaisen kappaleen sähkökentän ratkaiseminen suljetussa muodossa ei aina ole mahdollista. Sähköstatiikassa on kuitenkin muutamia erikoistapauksia, joissa kappaleen sähkökenttä pystytään laskemaan tarkasti. Tällaisia erikoistapauksia ovat esimerkiksi suora ympyrälieriö, pallo ja kaksoispallo. Kentän ratkaiseminen edellyttää tavallisesti, että kappaleen rajapinta on jonkin sellaisen koordinaatiston tasa-arvopinta, jossa Laplacen yhtälö on separoituva. Pallon tapauksessa sellainen koordinaatisto on pallokoordinaatisto. Lieriön tapauksessa käy sylinterikoordinaatisto. (Lebedev & Silverman, 1972.)

Koska sähkömagneettisen ongelman tarkka ratkaisu on käytettävissä vain harvoin, tarvitaan numeerisia menetelmiä. Yleisesti käytettyjä numeerisia ratkaisumenetelmiä ovat esimerkiksi elementtimenetelmä (FEM), reunaelementtimenetelmä (BEM) ja aika-alueen differenssimenetelmä (FDTD). Laskujen nopeuttamiseksi sähkömagneettinen ongelma muotoillaan välillä ensin analyttisesti muotoon, jossa numeerisesti ratkaistavat differentiaaliyhtälöt ovat alkuperäisiä yksinkertaisempia. Jos yhtälöt yksinkertaistuvat merkittävästi, käytettyä menetelmää voi kutsua puolianalyttiseksi. Koska kaikissa menetelmissä pyritään mahdollisimman suureen tehokkuuteen, ero tavallisen numeerisen menetelmän ja puolianalyttisen menetelmän välillä on häilyvä.

Työssä etsitään sähköstaattisen kentän ratkaisu tapauksessa, jossa anisotrooppinen pallo on homogeenisessa väliaineessa. Pallon anisotropiaa kuvataan pallokoordinaatistossa määriteltävän dyadin avulla. Permittiivisyydellä on siis pallon säteen-suuntainen komponentti ja vähintään yksi tangentinsuuntainen komponentti. Pallon permittiivisyys on silloin tavallisesti paikkariippuva, eli pallo on epähomogeeninen.

Valmiiksi käytössä oleva termi ”RU-pallo” tarkoittaa palloa, jonka permittiivisyyden tangenttikomponentit ovat samat. Selkeyden vuoksi on kuitenkin tarpeen ottaa käyttöön uusi termi tarkoittamaan yleistä palloa, jonka permittiivisyyden määrittelee pallokoordinaatistossa esitetty diagonaalinen dyadi. Permittiivisyyden määrittelevän diagonaalisen dyadin kaikki komponentit voivat poiketa toisistaan. Kun pallon permittiivisyys on määritelty tällä tavalla, palloa päätetään kutsua tässä työssä systrooppiseksi. Sana ”systrooppinen” tulee kreikan kielen sanasta ”συστροπή”, joka tarkoittaa kiertymistä. Väliaine, jonka permittiivisyys on määritelty pallokoordinaatistossa diagonaalisen dyadin avulla, ei varsinaisesti aiheuta kiertymistä sähkömagneettisessa kentässä, kuten kiraaliset aineet, mutta väliainetta voi kuvitella valmistettavan kiertämällä homogeenista väliainetta z -akselin ympäri. Termi ”sys-

trooppinen” viittaa siis pallon kuvitteelliseen valmistustapaan eikä niinkään sähkö- ja magneettikenttiin kohdistuvaan vaikutukseen.

Pallon materiaalin anisotrooppisuus ei johda välttämättä siihen, että pallon vaste on anisotrooppinen. Mikäli tangentiaalinen permittiivisyys on aina vakio riippumatta tarkasteltavasta tangentiaalisesta suunnasta, kappaleen pallosymmetria johtaa siihen, että pallo näyttää sähkömagneetiikan kannalta samalta joka suunnasta katsottuna. Jos toisaalta permittiivisyysdyadissa on kaksi toisistaan poikkeavaa tangenttikomponenttia, kappale on ulkoapäin tarkasteltuna anisotrooppinen. Kappale on silti yhä pyörähdyssymmetrinen z -akselin suhteen, joten kappaleen sähköstaattista käyttäytymistä riittää kuvaamaan kaksi eri polarisoituvuuden arvoa. Poikittainen polarisoituvuus kertoo kappaleen vasteen tilanteessa, jossa herättävä kenttä on z -akseliin nähden kohtisuorassa kulmassa. Pitkittäinen polarisoituvuus kertoo kappaleen vasteen, kun herättävä kenttä on z -akselin suuntainen.

Työssä käsitellään ensin yleistä sähköstatiikan sirontaongelmaa, sekä aiheeseen liittyviä peruskäsitteitä. Sähköstatiikan sirontaongelman käsitteisiin paneudutaan luvussa 2.3.3. Sirontaongelman ratkaisemisesta annetaan kaksi esimerkkiä, joista ensimmäinen on sironta PU-ympyrälieriöstä luvussa 3.1, ja toinen sironta RU-pallosta luvussa 3.2. Uutta tutkimusta työssä on sironta säännöllisesti systrooppisesta pallostaluvussa 3.3. Analyyttisiä tuloksia verrataan numeerisesti laskettuihin tuloksiin. Menetelmä, jolla numeeriset tulokset lasketaan valmisohjelman avulla esitetään luvussa 3.5.

Luku 2

Teoria

Systrooppisen pallon sähköisen vasteen tunteminen edellyttää Maxwellin yhtälöitten ratkaisemista kompleksista väliainetta sisältävässä alueessa ja sen ulkopuolella sekä tulosten yhdistämistä käyttämällä sopivia rajapintaehtoja. Väliaineen käyttäytymistä pystytään kuvaamaan havainnollisesti dyadien avulla. Dyadit ovat sähkömagneetikassa käytetty matemaattinen työkalu, jonka tuntemista ei tavallisesti edellytetä perusopinnoissa. Sen vuoksi dyadit esitellään kappaleessa 2.1. Dyadeja käsitellään tarkemmin Ismo Lindellin kirjassa *Methods for Electromagnetic Field Analysis* (1992). Väliaineen mallintamista dyadien avulla käsitellään kappaleessa 2.2. Tavoitteena on pohjustaa sirontaongelmien ratkaisemista. Sähköstatiikan sirontaongelmaa tarkastellaan luvussa 2.3.3 ja dynamiikan sirontaongelmaa luvussa 2.5. Luvun 2.5 aihepiiri on olennaisesti sama kuin Bohrenin ja Huffmanin kirjassa *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (1983). Poikkeuksena on se, että luvussa 2.5 tarkastellaan sirontaa myös RU-pallosta.

2.1 Dyadialgebran perusteet

Dyadit ovat eräs tapa esittää yleinen lineaarinen kuvaus reaalissa kolmiulotteissa vektoriarvaruudessa \mathbb{E}^3 . Lineaariset kuvaukset avaruudessa \mathbb{E}^3 venyttävät ja kääntävät vektoreita. Lineaaristen kuvausten esittämiseen voi käyttää matriiseja, mutta dyadien etu matriiseihin nähden on se, että lineaarikuvauksen matriisiesitys muuttuu vaihdettaessa avaruuden kantaa, mutta dyadit ovat kannasta riippumattomia. Tämän lisäksi dyadeille pystytään laatimaan joukko helposti muistettavia laskusääntöjä. Dyadilaskennassa käytetyt laskusäännöt antavat teorialle sen selitysvoiman.

Jos \mathbf{a} ja \mathbf{b} ovat kaksi avaruuden \mathbb{E}^3 vektoria, niiden välille voidaan määrittää tutut operaatiot, jotka ovat pistetulo ja ristitulo. Karteesisessa koordinaatistossa pistetulo määritellään

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z) \cdot (b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.1)$$

ja ristitulo määritellään

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.2)$$

Kun vektorit \mathbf{a} ja \mathbf{b} yhdistetään keskenään ilman välissä olevaa operaatiota, kutsutaan tulokseksi saatua vektoriparia \mathbf{ab} dyadituloksi. Dyaditulon voi esittää karteesisessa koordinaatistossa muodossa

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} &= (a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z)(b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z) \\ &= a_x b_x \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + a_x b_y \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + a_x b_z \mathbf{u}_x \mathbf{u}_z \\ &\quad + a_y b_x \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + a_y b_y \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y + a_y b_z \mathbf{u}_y \mathbf{u}_z \\ &\quad + a_z b_x \mathbf{u}_z \mathbf{u}_x + a_z b_y \mathbf{u}_z \mathbf{u}_y + a_z b_z \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z\end{aligned}\tag{2.3}$$

Dyaditulo on bilineaarinen:

$$(\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2) \mathbf{b} = \alpha_1 (\mathbf{a}_1 \mathbf{b}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2 \mathbf{b})\tag{2.4}$$

$$\mathbf{a}(\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2) = \beta_1 (\mathbf{a} \mathbf{b}_1) + \beta_2 (\mathbf{a} \mathbf{b}_2)\tag{2.5}$$

Yleiset dyadit määritellään dyaditulojen avulla. Dyadit ovat dyadituloista muodostettuja polynomeja:

$$\bar{\bar{A}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i\tag{2.6}$$

Dyadin voi esittää karteesisessa koordinaatistossa muodossa

$$\begin{aligned}\bar{\bar{A}} &= D_{xx} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + D_{xy} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + D_{xz} \mathbf{u}_x \mathbf{u}_z \\ &\quad + D_{yx} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x + D_{yy} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y + D_{yz} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_z \\ &\quad + D_{zx} \mathbf{u}_z \mathbf{u}_x + D_{zy} \mathbf{u}_z \mathbf{u}_y + D_{zz} \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z\end{aligned}\tag{2.7}$$

Yllä oleva dyadin esitystapa vahvistaa sen, että dyadit ja 3×3 matriisit ovat \mathbb{E}^3 :ssa vaihtoehtoisia tapoja esittää lineaarikuvaukset. Erona on se, että dyadi säilyy ennallaan, vaikka koordinaatiston kantaa muutettaisiin, mutta matriisi muuttuu toiseksi. Dyadi voi operoida vektoriin sekä ristitulon että pistetulon kautta. Jos operaatio on pistetulo, lopputulos on vektori. Jos operaatio on puolestaan ristitulo, lopputulos on dyadi. Dyadien piste- ja ristitulot vektorien kanssa lasketaan seuraavasti:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b}\tag{2.8}$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \mathbf{b}\tag{2.9}$$

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\tag{2.10}$$

$$(\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})\tag{2.11}$$

Sovellettaessa pistetulon avulla määriteltyä vastaavuutta dyadien ja lineaarikuvausten välillä identtistä lineaarikuvausta vastaa yksikködyadi $\bar{\bar{I}}$. Yksikködyadi määritellään siten, että

$$\bar{\bar{I}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \bar{\bar{I}} = \mathbf{a}\tag{2.12}$$

Yksikködyadin $\bar{\bar{I}}$ voi esittää karteesisen koordinaatiston kantavektorien avulla seuraavasti:

$$\bar{\bar{I}} = \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z\tag{2.13}$$

Tarkasteltaessa rajapintoja on hyödyllistä määritellä tangentialinen yksikködyadi

$$\bar{\bar{I}}_t = \bar{\bar{I}} - \mathbf{n}\mathbf{n} \quad (2.14)$$

Tangentialinen yksikködyadi $\bar{\bar{I}}_t$ on määritelty pinnalla S . Jos pinta ei ole tasomainen, yksikkönormaalivektorin \mathbf{n} suunta vaihtuu, jolloin $\bar{\bar{I}}_t$ on paikan funktio. Vektorin pistetulo tangentialisen yksikködyadin kanssa $\bar{\bar{I}}_t \cdot \mathbf{a}$ kanssa projisoi vektorin rajapinnalle siten, että vektorin normaalisuuntainen komponentti katoaa ja rajapinnan suuntainen komponentti säilyy ennallaan.

2.2 Sähkökenttä väliaineessa

2.2.1 Väliaineen vaikutus

Maxwellin yhtälöt

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.18)$$

yhdessä väliaineiyhtälöitten

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (2.19)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \quad (2.20)$$

kanssa ovat sähkömagneetiikan perusta. Maxwellin yhtälöissä (2.15)–(2.18) ainoastaan sähkökentän voimakkuus \mathbf{E} ja magneettivuon tiheys \mathbf{B} ovat fysikaalisia perusvoimia. Sähkövuon tiheys \mathbf{D} ja magneettikentän voimakkuus \mathbf{H} sitävastoin kuvaavat väliaineen vaikutusta kenttiin. Väliaineiyhtälöt (2.19)–(2.20) kytkevät kentät ja vuontiheydet toisiinsa. Maxwellin yhtälöt yksin eivät olisi ratkaistavissa yksikäsitteisesti, koska niissä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä, mutta väliaineiyhtälöitten kanssa Maxwellin yhtälöihin on usein olemassa ratkaisu.

Jos yhtälöt (2.19)–(2.20) pystytään kirjoittamaan muotoon

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}} \cdot \mathbf{E} + \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \bar{\bar{\xi}} \cdot \mathbf{H} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \bar{\bar{\zeta}} \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \bar{\bar{\mu}} \cdot \mathbf{H} \quad (2.22)$$

väliainetta kutsutaan magnetoelektriseksi tai bianisotrooppiseksi. Jos yhtälöt (2.21)–(2.22) eivät kuvaa väliaineen käyttäytymistä, väliainetta kutsutaan epälineaariseksi. Kerrointa $\epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}}$ kutsutaan väliaineen permittiivisyydeksi ja kerrointa $\mu_0 \bar{\bar{\mu}}$ väliaineen permeabiilisuudeksi. Permittiivisyyden $\bar{\bar{\epsilon}}$ ja permeabiilisuuden $\bar{\bar{\mu}}$ merkinnät tarkoittavat tässä työssä aina suhteellisia permittiivisyyksiä, jos alaindeksissä ei ole numeroa "0", kuten merkinnässä " $\epsilon_{n,0}$ ". Väliaineparametrit saattavat joissakin tapauksissa

sisältää operaattoreita. Lineaarista väliainetta kutsutaan dispersiiviseksi, jos väliaineparametreissa $\bar{\epsilon}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\xi}$ ja $\bar{\zeta}$ esiintyy aikaderivaatta $\partial/\partial t$. Jos väliaineparametreissa esiintyy paikkaderivaatta ∇ , väliainetta kutsutaan epälokaaliksi. Väliainetta, jossa $\bar{\xi} = 0$ ja $\bar{\zeta} = 0$, kutsutaan anisotrooppiseksi. Jos lisäksi permittiivisyys $\bar{\epsilon}$ ja permeabilisuus $\bar{\mu}$ ovat yksikköyadin moninkertoja, eli $\bar{\epsilon} = \epsilon\bar{I}$ ja $\bar{\mu} = \mu\bar{I}$, väliainetta kutsutaan isotrooppiseksi. (Lindell, 1992.)

2.2.2 Maxwellin yhtälöitten tasoaltoratkaisu

Kompleksinen permittiivisyys saa fysikaalisen tulkinnan, kun tarkastellaan tasoaaltoa häviöllisessä väliaineessa. Tasoallot ovat Maxwellin yhtälöitten ratkaisu, jossa sähkömagneettiset kenttäsuureet riippuvat paikasta ainoastaan aallon etenemissuunnassa. Luonnossa ei esiinny puhtaita tasoaltoja, sillä tasoallon sisältämä energia on ääretön, mutta kaukoalueessa antennin säteilemä radioaalto muistuttaa paikallisesti hyvin tarkasti tasoaaltoa. (Sihvola & Lindell, 1996.)

Tarkastellaan ensin yleisen aikaharmonisen sähkömagneettisen aallon etenemistä isotrooppisessa, homogeenisessa väliaineessa, joka ei sisällä sähkömagneettisten kenttien lähteitä. Maxwellin yhtälöissä esiintyy sekä aikaderivaattoja $\partial/\partial t$ että paikkaderivaattoja ∇ . Aikaderivaatoista päästään eroon ottamalla Fourier-muunnos

$$F\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.23)$$

yhtälöitten molemmin puolin.

$$\mathbf{E}(\omega) = F\{\mathbf{E}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.24)$$

$$\mathbf{H}(\omega) = F\{\mathbf{H}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.25)$$

Fourier muunnos toimii Maxwellin yhtälöissä siten, että derivaatat paikan suhteen $\nabla \times$ ja $\nabla \cdot$ säilyvät ennallaan ja aikaderivaatat $\partial/\partial t$ korvautuvat arvolla $j\omega$. Isotrooppisen väliaineen konstitutiiviset yhtälöt säilyvät ennallaan:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \quad (2.27)$$

Maxwellin yhtälöt yksinkertaistuvat muotoon

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \epsilon' \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.31)$$

jossa \mathbf{J} on sähkökentän \mathbf{E} väliaineessa synnyttämä virta, eikä ulkoinen lähdevirta. Sähkökentän aikaansaama virta määräytyy Ohmin laista:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.32)$$

Yllä olevassa yhtälössä σ on niin kutsuttu sähkönjohtavuus, joka kuvaa materiaalin kykyä johtaa sähkövirtaa. Yhtälön (2.29) oikealle puolelle tulee

$$\mathbf{J} + j\omega\epsilon'\epsilon_0\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} + j\omega\epsilon'\epsilon_0\mathbf{E} = j\omega\epsilon_0\left(\epsilon' - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)\mathbf{E} = j\omega\epsilon\epsilon_0\mathbf{E} \quad (2.33)$$

jossa kompleksinen permittiivisyys määritellään

$$\epsilon = \epsilon' - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon_0}$$

Virran johtavuus aiheuttaa sähkökentässä häviöitä, mutta kaikissa väliaineissa johtavuus ei ole ainut häviöitten lähde. Kitka, joka jarruttaa aineen polarisoitumista, muuttaa osassa väliaineista sähkökenttään varautunutta energiaa lämpöenergiaksi (Sihvola, 1999). Myös kitkaan perustuvat häviöiden aiheuttajat vaikuttavat permittiivisyyden imaginaariosaan.

Kun otetaan roottori yhtälön (2.28) molemmiin puolin ja eliminoidaan magneettikentän voimakkuus \mathbf{H} yhtälöitten (2.29) ja (2.33) avulla, saadaan

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu\mu_0\nabla \times \mathbf{H} = \omega^2\mu\epsilon\mu_0\epsilon_0\mathbf{E} \quad (2.34)$$

Kaksoisroottorin voi kirjoittaa muotoon

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} \quad (2.35)$$

Homogeenisessa väliaineessa permittiivisyys on vakio, jolloin

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{D}}{\epsilon\epsilon_0} = 0$$

Tulokseksi saadaan skalaarimuotoinen Helmholtzin yhtälö

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = 0 \quad (2.36)$$

jossa aaltoluku k määritellään $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon\mu_0\epsilon_0}$. Aaltoluvun voi kirjoittaa myös muotoon $k = mk_0$, missä $m = \sqrt{\mu\epsilon}$ on taitekerroin ja $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ on tyhjiön aaltoluku. Magneettivuon tiheydelle saadaan yhtälöä (2.36) vastaava yhtälö:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{B} = 0 \quad (2.37)$$

Sijoittamalla havaitaan, että kentät

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-jk\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0 e^{-jk\mathbf{u}\cdot\mathbf{r}} \quad (2.39)$$

toteuttavat yhtälöt (2.36)–(2.37). Yritteitä (2.38) ja (2.39) kutsutaan tasoaalto-
ratkaisuiksi. Ratkaisu kuvaa yksikkövektorin \mathbf{u} suuntaan etenevää äärettömän leveää
sähkömagneettisen aallon rintamaa. Sähkömagneettisen tasoallon etenemistä ku-
vaa suure $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$, jota kutsutaan aaltovektoriksi.

2.2.3 Laplacen yhtälö

Oletetaan seuraavaksi, että kentät ovat muuttumattomia, $\partial/\partial t = 0$. Koska sähkökentän voimakkuus on pyörteetön, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, ja fysikaalinen kenttä on riittävän siileä, pystytään vektorianalyysin tuloksiin nojautuen kirjoittamaan (Adams & Essex, 2003)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (2.40)$$

Potentiaali $\phi(\mathbf{r})$ ei ole yksikäsitteinen, vaan siihen voidaan lisätä mielivaltaisen vakio ilman muutosta sähkökenttään. Potentiaalın taso valitaan tavallisesti siten, että potentiaali menee nolnaan äärettömän kaukana origosta. Oletetaan $\bar{\xi} = 0$ yhtälössä (2.21). Sijoittamalla (2.21) yhtälöön (2.17) saadaan

$$-\nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{\epsilon} \cdot \nabla \phi) = \nabla \cdot (\epsilon_0 \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.41)$$

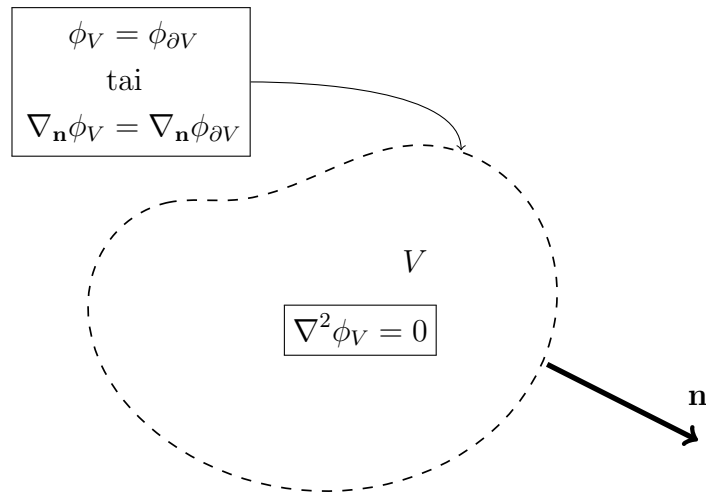
Laplacen yhtälö

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.42)$$

on tuloksen (2.41) erikoistapaus tilanteessa, jossa väliaine on homogeenista ja isotrooppista eikä lähteitä ole, $\rho = 0$.

2.3 Reuna- ja rajapintaehdot

2.3.1 Reunaehdot



Kuva 2.1: Sähkömagneettinen reunaehto-ongelma. Kentälle tunnetaan yhtälö suljetun alueen V sisällä, minkä lisäksi tunnetaan reunaehto alueen reunalla ∂V . On etsittävä sellainen kenttä, joka toteuttaa sekä yhtälön että reunaehdot samanaikaisesti.

Sähköstatiikassa sähköpotentiaalın $\phi(\mathbf{r})$ on toteutettava Laplacen yhtälö lähteettömässä alueessa. Yhtälöllä on kuitenkin loputtomasti ratkaisuja. Ratkaisun yksikäsitteisyydestä on varmistuttava vaatimalla, että differentiaaliyhtälön lisäksi myös sopivat reunaehdot ovat voimassa.

Tarkastellaan tilannetta, jossa potentiaali $\phi(\mathbf{r})$ halutaan ratkaista suljetun alueen V sisällä. Alueen V ulkopuolinen alue on lähtökohtaisesti tuntematonta aluetta, jonka kentät tai väliaineparametrit eivät ole tiedossa. Potentiaali ratkaistaan käyttämällä reunaehtoja tarkasteltavan alueen reunalla ∂V . On tunnettava ehdot, jotka varmistavat ratkaisun yksikäsitteisyyden.

Kaksi ehtoa, jotka takaavat ratkaisun yksikäsitteisyyden, ovat Dirichlet'n ja Neumannin reunaehdot. Jos jompikumpi ehdoista pakotetaan, ratkaisusta tulee yksikäsitteinen. Dirichlet'n reunaehto tarkoittaa sitä, että potentiaali ϕ kiinnitetään jokaisessa pisteessä tarkastelualueen reunalla ∂V . Neumannin reunaehto puolestaan tarkoittaa sitä, että potentiaalिन normaaliderivaatta $\nabla_{\mathbf{n}}\phi$ kiinnitetään alueen reunalla.

Dirichlet'n ja Neumannin reunaehtoien huomataan muuttavan differentiaaliyhtälön ratkaisun yksikäsitteiseksi käyttämällä Greenin ensimmäistä identiteettiä, joka on

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV = \oint_S \Phi \nabla_{\mathbf{n}} \Psi da \quad (2.43)$$

Jos oletetaan, että $\Psi = \Phi$, identiteetti muuttuu muotoon

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Phi + |\nabla \Phi|^2) dV = \oint_S \Phi \nabla_{\mathbf{n}} \Phi da \quad (2.44)$$

Oletetaan, että ϕ ja ϕ' ovat Laplacen yhtälön kaksi eri ratkaisua alueessa V . Merkitään $\Phi = \phi - \phi'$ ja sijoitetaan yhtälöön (2.44). Ensimmäinen termi yhtälön vasemmalta puolelta katoaa, koska kentät ϕ ja ϕ' toteuttavat Laplacen yhtälön. Jos joko Dirichlet'n tai Neumannin reunaehto on voimassa, yhtälön (2.44) oikean puolen pintaintegraali katoaa. Jäljelle jää yhtälö

$$\int_V |\nabla \Phi|^2 dV = 0 \quad (2.45)$$

josta seuraa $\nabla \Phi = 0$. Koska Φ on siis vakio, potentiaalit ϕ ja ϕ' ovat samat vakio-termiä lukuunottamatta. Toisaalta potentiaalिन taso voidaan valita mielivaltaisesti ilman muutosta sähkökentässä, joten kyseessä on käytännössä sama potentiaali mielivaltaisesta vakiotermistä huolimatta.

2.3.2 Matemaattiset rajapintaehdot

Sähkömagneetiikan ongelmat ratkaistaan usein jakamalla avaruus alueisiin ja ratkaisemalla Laplacen yhtälö erikseen kussakin alueessa. Alue määritellään tyypillisesti siten, että alueen reuna on kohdassa, jossa siirrytään yhdestä väliaineesta toiseen. Laplacen yhtälön kaksi ratkaisua yhdistetään toisiinsa käyttämällä niin kutsuttuja rajapintaehtoja. Rajapintaehdot, kuten reunaehdotkin, ovat tarpeen ratkaisun yksikäsitteisyyden varmistamiseksi. Rajapintaehdot kuitenkin poikkeavat sikäli reunaehdoista, että ne kiinnittävät differentiaaliyhtälön ratkaisun yhden alueen sijasta kahdessa eri alueessa. Näitten alueitten väliaineparametrit tunnetaan ja niitten kentät pyritään ratkaisemaan. Seuraava tarkastelu mukailee potentiaalिन jatkuvuusehdon

johtamista lukuunottamatta John David Jacksonin kirjaa Classical Electrodynamics (2001).

Rajapintaehdot muodostetaan tarkastelemalla kenttien avaruus- ja pintaintegraaleja. Valitaan tarkasteltavasta avaruudesta äärellinen alue V ja merkitään alueen rajapintaa ∂V . Gaussin divergenssilause on

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} da \quad (2.46)$$

Seuraavaksi valitaan avaruudesta avoin pinta S ja merkitään sen reunaa ∂S . Stokesin lause on

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.47)$$

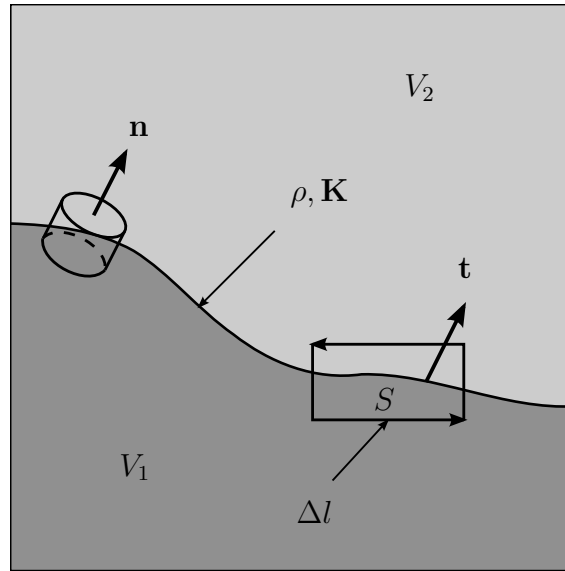
Käyttämällä Gaussin lausetta ja Stokesin lausetta Maxwellin yhtälöt saadaan seuraavaan integraalimuotoon:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}' dS \quad (2.48)$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n}' dS \quad (2.49)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \rho dV \quad (2.50)$$

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (2.51)$$



Kuva 2.2: Rajapintaehtojen määrittäminen tarkastelemalla suorakaiteen muotoisen pinnan S ympäri kulkevaa suljettua polkua ∂S ja litteää lieriötä, jonka pohjat ovat alueitten välisen rajapinnan molemmiin puolin. Rajapintaehdot kytkevät kaksi Laplacen yhtälön ratkaisua toisiinsa kahden alueen rajalla.

Tarkastellaan lieriötä, joka on asetettu kahden alueen rajapinnalle siten, että lieriön pohjat ovat eri puolilla rajapintaa kuten kuvassa 2.2. Lieriön korkeus oletetaan niin pieneksi, että laskettaessa pintaintegraalia lieriön yli on tarpeen ottaa huomioon ainoastaan lieriön pohjat. Pintaintegraaliksi tulee siis

$$\oint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) \cdot \mathbf{n} \Delta a \quad (2.52)$$

missä Δa on lieriön pohjan pinta-ala. Seuraa

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\Delta a} \int_V \varrho dV = \rho \quad (2.53)$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.54)$$

missä pintavaraustiheys ρ määritellään siten, että varauksen oletetaan keskittyneen alueitten väliselle rajapinnalle ja pätee

$$\int_V \varrho dV = \rho \Delta a \quad (2.55)$$

Samalla tavalla voidaan tarkastella kuvan 2.2 suorakaiteen muotoista silmukkaa, jonka kaksi sivua kulkevat rajapinnan suuntaisesti eri alueissa ja jonka kaksi muuta sivua ovat niin lyhyitä, ettei niitä tarvitse huomioida. Silloin voidaan kirjoittaa

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) \Delta l \quad (2.56)$$

missä \mathbf{t} on pinnan tangenti. Sijoittamalla integraalimuotoisiin Maxwellin yhtälöihin seuraa

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (2.57)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K} \quad (2.58)$$

Suure \mathbf{K} on niin kutsuttu pintavirtatiheys ja se määritellään

$$\int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{t} dS = \mathbf{K} \cdot \mathbf{t} \Delta l \quad (2.59)$$

Sähköstatiikassa sähkö- ja magneettikenttien välinen kytkös katoaa, minkä vuoksi tarkasteltaessa sähkökenttää riittää käyttää neljästä edellä mainitusta rajapintaehdosta (2.53)–(2.58) ainoastaan ehtoja (2.53) ja (2.57). Nämä rajapintaehdot on joskus kätevästi esittää potentiaalin ϕ avulla, koska Laplacen yhtälössä esiintyvä suure on potentiaali eikä sähkökenttä. Potentiaali on yksikäsitteinen alueella V silloin, kun sen arvo tunnetaan tarkasteltavan alueen reunalla ∂V ja lisäksi sen normaaliderivaatta $\nabla_{\mathbf{n}} \phi$ on tunnettu alueen reunalla. Tarkasteltaessa kahden alueen rajapintaa tuntemattomia on siis kaksi: potentiaali ja sen normaaliderivaatta. Jotta molemmat tuntemattomat suureet pystytään ratkaisemaan, tarvitaan kaksi eri yhtälöä.

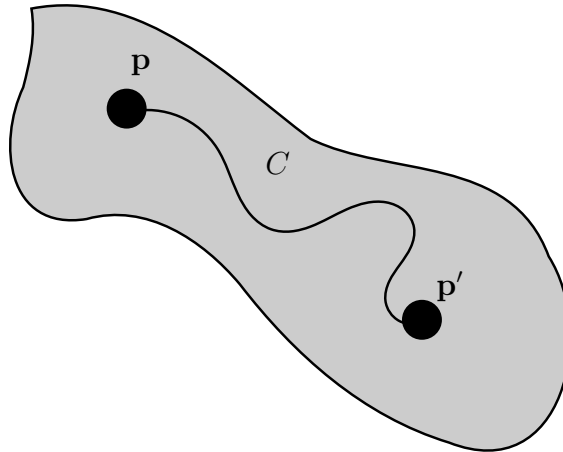
Oletetaan, että varaustiheys ρ katoaa molemmissa alueissa, jolloin myös pinta-
varaustiheys ρ katoaa. Ensimmäinen yhtälö potentiaalille seuraa suoraan yhtälöstä
(2.53), kun sähkövuontiheys kirjoitetaan potentiaalın gradientin avulla:

$$\epsilon_{1,n}\nabla_{\mathbf{n}}\phi_1(\mathbf{r}) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1(\mathbf{r}) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = \epsilon_{2,n}\nabla_{\mathbf{n}}\phi_2(\mathbf{r}) \quad (2.60)$$

Saatu yhtälö kiinnittää skalaarisen sähköpotentiaalın normaaliderivaatan $\nabla_{\mathbf{n}}\phi$ raja-
pinnalla.

Toinen yhtälö saadaan, kun huomataan, että potentiaaliin voi lisätä mielivaltaisen
vakion ilman muutosta sähkökentässä, ja sovelletaan sähkökentän tangentialikom-
ponentin reunaehto (2.57). Oletetaan, että potentiaali $\phi_1(\mathbf{r})$ on valmiiksi määritelty
alueessa V_1 . Valitaan alueitten V_1 ja V_2 väliseltä rajapinnalta mielivaltaiset kaksi pis-
tettä \mathbf{p} ja \mathbf{p}' , kuten kuvassa 2.3. Koska alueen V_2 sähköpotentiaaliin $\phi_2(\mathbf{r})$ voi lisätä
mielivaltaisen vakion, voidaan olettaa, että molempien alueitten sähköpotentiaalit
ovat samat pisteessä \mathbf{p} , eli $\phi_1(\mathbf{p}) = \phi_2(\mathbf{p})$. Valitaan jatkuva polku C pisteestä \mathbf{p}
pisteeseen \mathbf{p}' . Potentiaali $\phi_2(\mathbf{r})$ pisteessä \mathbf{p}' saadaan polkuintegraalista

$$\begin{aligned} \phi_2(\mathbf{p}') &= \phi_1(\mathbf{p}) + \int_C \nabla\phi_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \phi_1(\mathbf{p}) + \int_C \mathbf{E}_{2t} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \phi_1(\mathbf{p}) + \int_C \mathbf{E}_{1t} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \phi_1(\mathbf{p}) + \int_C \nabla\phi_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \phi_1(\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (2.61)$$



Kuva 2.3: Potentiaalın osoittaminen jatkuvaksi. Kuvassa on rajapinta, joka on ase-
tettu siten, että yksi väliaine on sivun takana, lukijasta pois päin ja toinen väliaine
on lukijan kanssa sivun samalla puolella. Polku kulkee väliaineitten välisellä raja-
pinnalla poikkeamatta kumpaankaan alueeseen. Sähkökentän tangentialikomponentit
ovat samat molemmin puolin rajapintaa, $\mathbf{E}_{1t}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{2t}(\mathbf{r})$, joten sähköpotentiaalın
 $\phi(\mathbf{r})$, joka on kentän polkuintegraali, on oltava sama rajapinnan molemmin puolin.

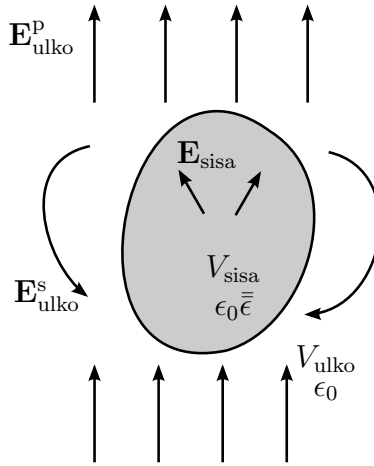
Koska piste \mathbf{p}' valittiin mielivaltaisesti, jokaisessa rajapinnan pisteessä \mathbf{r} pätee

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}) \quad (2.62)$$

Kyseessä on niin kutsuttu potentiaalin jatkuvuusehto, jonka mukaan potentiaali on jatkuva paikan funktio myös siirryttäessä kahden eri alueen välisen rajapinnan yli.

2.3.3 Sähköstatiikan sirontaongelma

Sähköstatiikan sirontaongelmassa avaruuteen, joka on täytetty homogeenisella väliaineella, lisätään sirottaja, eli kappale, jonka väliaineparametrit poikkeavat ympäröivän materiaalin väliaineparametreista. Sirottaja aiheuttaa sähkökenttään muutoksen, joka halutaan tuntea. Sirontaongelman ratkaisemisessa käytetään sekä reuna- että rajapintaehtoja. Reunaehtojen avulla kiinnitetään herättävä kenttä. Rajapintaehtojen avulla kiinnitetään sirottajan aiheuttama vastekenttä sekä sirottajan sisällä vaikuttava kenttä.



Kuva 2.4: Sähkökentän sironta kappaleesta. Avaruus jaetaan kahteen osaan $V_{\text{sisä}}$ ja V_{ulko} , joissa on eri sähköiset parametrit. Sirottavan kappaleen ulkopuolisen alueen V_{ulko} primäärkenttän $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{p}}$ lähteet ovat alueen sisäpuolella, mutta kentän lähteitä ei tarvitse erikseen tuntea. Sen sijaan sekundäärkenttän $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{s}}$ lähteet ovat alueessa $V_{\text{sisä}}$.

Tarkastellaan kuvan 2.4 tilannetta, jossa avaruus on jaettu sirottavan kappaleen sisäpuoliseen alueeseen $V_{\text{sisä}}$ ja sirottavan kappaleen ulkopuoliseen alueeseen V_{ulko} . Kenttää, jonka lähteet ovat alueessa V_{ulko} , kutsutaan tämän alueen primäärkentäksi ja merkitään $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{p}}$. Sen sijaan kenttää, jonka lähteet eivät ole alueessa V_{ulko} vaan alueessa $V_{\text{sisä}}$, kutsutaan alueen V_{ulko} sekundäärkentäksi ja merkitään $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{s}}$. Kaikki lähteet sijaitsevat jommassakummassa alueessa, joten kokonaiskenttä sirottajan ulkopuolella on primäärkentän ja sekundäärkentän summa, $\mathbf{E}_{\text{ulko}} = \mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{p}} + \mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{s}}$. Vastaavalla tavalla voitaisiin määrittellä primäärkenttä ja sekundäärkenttä myös alueessa $V_{\text{sisä}}$, jolloin primäärkentän lähteet olisivat sirottajan sisäpuolella ja sekundäärkentän lähteet olisivat sirottajan ulkopuolella. Tavallisesti kentän jakaminen

komponentteihin on kuitenkin tarpeen ainoastaan sirottajan ulkopuolisessa alueessa, jolloin sirottajan sisällä kokonaiskentän $\mathbf{E}_{\text{sisä}} = \mathbf{E}_{\text{sisä}}^{\text{P}} + \mathbf{E}_{\text{sisä}}^{\text{S}}$ tarkasteleminen riittää.

Sirontaongelmassa kiinnostavaa on se, kuinka sirottaja vaikuttaa ulkopuolella olevaan kenttään. Ulkopuolisen alueen primäärkenttä $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{P}}$ oletetaan tunnetuksi vakiokentäksi ja sekundäärkenttä $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{S}}$ halutaan tuntea. Jatkossa on helpointa olla puhumatta erikseen sirottajan ulkopuolisesta ja sisäpuolisesta alueesta, kun tarkastellaan primääri- ja sekundäärkenttiä, koska jako komponentteihin on kiinnostava ainoastaan sirottajan ulkopuolella. Sen vuoksi sirottajan ulkopuolista primäärkenttää $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{P}}$ ja sekundäärkenttää $\mathbf{E}_{\text{ulko}}^{\text{S}}$ kutsutaan yksinkertaisesti herättäväksi kentäksi ja vastekentäksi. Kenttiä merkitään lyhyemmin \mathbf{E}^{P} ja \mathbf{E}^{S} . Sirontaongelmassa yritetään esittää vastekenttä \mathbf{E}^{S} herättävän kentän \mathbf{E}^{P} avulla.

Polaarisista molekyyleistä koostuvan kappaleen väliaine aiheuttaa ympäristöönsä kentän, joka on kappaleen sisältämien dipolien kenttien summa. Väliaineessa saattaa olla myös korkeamman asteen multipoleja, mutta niiden vaikutus heikkenee nopeasti siirryttäessä kauemmaksi kappaleesta. Jos väliaineen sisältämät dipolit ovat järjestyneet satunnaisesti, dipolien kentät kumoavat toisensa, ja kappale on sähköisesti neutraali. Jos sen sijaan kappaleeseen kohdistuu kenttä, joka vaikuttaa dipolien suuntautuneisuuteen, dipolit järjestäytyvät siten, että niiden kentät vahvistavat eivätkä kumoa toisiaan. Dipolien järjestäytymistä kuvaa paikkariippuva dipolitiheysvektori $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. Dielektrissä väliaineessa sähkövuontiheys \mathbf{D} pystytään lausumaan sähkökentän ja dipolitiheysvektorin avulla:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{sisä}} + \mathbf{P} \quad (2.63)$$

Toisaalta luvun 2.2 perusteella pätee myös

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}}$$

Kappaleen sisäinen dipolitiheysvektori on siis

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\bar{\epsilon} - \bar{I}) \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}} \quad (2.64)$$

Jos sähkökenttä on staattinen, kappaleen tuottama sähkökenttä muistuttaa tarpeeksi kaukana kappaleesta dipolin kenttää, jonka potentiaali on

$$\phi_{\text{d}} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.65)$$

Avaruudessa olevan epähomogeenisuuden voi siis korvata sijoittamalla homogeeniseen avaruuteen sopivan dipolin. Dipolimomentti \mathbf{p} on dipolitiheys integroituna kappaleen tilavuuden yli:

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV \quad (2.66)$$

Kappaleen polarisoituvuus $\bar{\alpha}$ kuvaa sähkökentän vaikutusta kappaleen dipolimomenttiin \mathbf{p} . Polarisoituvuus määritellään siten, että

$$\mathbf{p} = \bar{\alpha} \cdot \mathbf{E}^{\text{P}} \quad (2.67)$$

Polarisoituvuusdyadi $\bar{\alpha}$ kuvaa varsin tarkasti kappaleen vastetta sähköstatiikassa. Polarisoituvuusdyadin komponentit pystytään tavallisesti laskemaan yksitellen siten, että herättävä kenttä \mathbf{E}^p valitaan sopivasti. Jos esimerkiksi oletetaan, että $\bar{\alpha}$ on diagonaalinen karteesisessa koordinaatistossa, diagonaaliset komponentit pystytään laskemaan käyttämällä erikseen herätteitä $E^p \mathbf{u}_x$, $E^p \mathbf{u}_y$ ja $E^p \mathbf{u}_z$ ja selvittämällä niitä vastaavat dipolimomentit \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , ja \mathbf{p}_z .

Polarisoituvuuden laskemiseen on ainakin kaksi eri tapaa. Polarisoituvuuden voi laskea selvittämällä dipolimomentin integroimalla yhtälöstä (2.66)

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV = \int_V \epsilon_0 (\bar{\epsilon} - \bar{I}) \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}} dV$$

tai vaihtoehtoisesti ratkaisemalla yleistetyn Laplace-yhtälön (2.41) ja soveltamalla rajapintaehtoja. Integroiminen on kätevä tapa ratkaista polarisoituvuus silloin, kun kappale on homogeeninen, koska integroimisoperaatio muuttuu silloin yksinkertaiseksi kertolaskuksi. Tutkittaessa epähomogeenista kappaletta on kuitenkin kätevintä käyttää luvussa 2.4 esiteltävää yleistettyä Laplacen yhtälöä.

Luvussa 2.3.2 esiteltiin kaksi rajapintaehtoa, jotka olivat sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehto (2.60) ja potentiaalin jatkuvuusehto (2.62):

$$\begin{cases} \epsilon_{\text{ulko},\mathbf{n}} \nabla_{\mathbf{n}} \phi_{\text{ulko}}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\text{sisä},\mathbf{n}} \nabla_{\mathbf{n}} \phi_{\text{sisä}}(\mathbf{r}) \\ \phi_{\text{ulko}}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{sisä}}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad \mathbf{r} \in \partial V_{\text{ulko}}, \partial V_{\text{sisä}}$$

Edellä oletettiin yksinkertaisuuden vuoksi, että sirottajan ulkopuolisessa alueessa permittiivisyys on ϵ_0 eli tyhjiön permittiivisyys. Työssä käytetään samaa oletusta myös jatkossa. Toisaalta yleisempään tapaukseen siirtyminen tarvittaessa on yksinkertaista. Sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehdossa merkitsee absoluuttisen permittiivisyyden sijaan pelkästään suhde $\epsilon_{\text{sisä},\mathbf{n}}/\epsilon_{\text{ulko},\mathbf{n}}$. Kyseessä on samalla ainut yhtälö, jossa sirottajan ulkopuolisen alueen permittiivisyys tulee mukaan sirontaongelmaan. Sen vuoksi sirontaongelma, jossa sirottajan ulkopuolella väliaineen suhteellinen permittiivisyys on paikasta ja suunnasta riippumaton ϵ_{ulko} , voidaan korvata sirontaongelmalla, jossa sirottajan ulkopuolella väliaineen permittiivisyys on ϵ_0 ja sisäpuolella $\epsilon_0 \epsilon_{\text{sisä}}/\epsilon_{\text{ulko}}$. Molemmissa tapauksissa herättävän kenttän \mathbf{E}^p aikaansaama vastekenttä \mathbf{E}^s on sama.

2.4 Yleistetty Laplacen yhtälö pallokoordinaatistossa

2.4.1 Yhtälön muodostaminen

Tarkastellaan väliainetta, jonka permittiivisyys on määritelty pallokoordinaatistossa. Valitaan väliaineelle sellainen permittiivisyys, että sen voi kirjoittaa dyadien avulla muotoon

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_o (\epsilon_{rr} \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r + \epsilon_{\theta\theta} \mathbf{u}_\theta \mathbf{u}_\theta + \epsilon_{\varphi\varphi} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi) \quad (2.68)$$

missä skalaariset permittiivisyydet ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$ ja $\epsilon_{\varphi\varphi}$ ovat vakioita. Permittiivisyysdyadi $\bar{\epsilon}$ ei välttämättä ole vakio, koska kantavektorit \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ , \mathbf{u}_φ ovat paikkariippuvia. Väliainetta, jonka permittiivisyys on muotoa (2.68), päätetään kutsua tässä työssä systrooppiseksi. Jos $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\varphi\varphi}$, väliainetta kutsutaan radiaalisestiuniaksiaaliseksi (RU). Jos permittiivisyyden tangenttikomponentit ovat sen sijaan erisuuret, $\epsilon_{\theta\theta} \neq \epsilon_{\varphi\varphi}$, väliainetta kutsutaan aidosti systrooppiseksi. Tangenttikomponenttien välistä suhdetta $\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\theta\theta}$ kutsutaan systrooppisuussuhteeksi.

Operaattori ∇ kirjoitetaan pallokoordinaatistossa seuraavasti:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi \quad (2.69)$$

Laskemalla dyadin ja vektorin välisen pistetulon ja ottamalla tuloksesta divergenssin pystytään muodostamaan yleistetty Laplacen operaattori:

$$\bar{\epsilon} \cdot \nabla f = \epsilon_{rr} \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{\epsilon_{\theta\theta}}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi \quad (2.70)$$

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \nabla f) = \epsilon_{rr} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\epsilon_{\theta\theta}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (2.71)$$

2.4.2 Muuttujien separoiminen

Seuraavaksi paneudutaan yleistetyn Laplace-yhtälön

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \nabla \phi) = 0 \quad (2.72)$$

ratkaisemiseen. Luvussa esitettävä menetelmä mukaillee soveltaen John David Jacksonin kirjassa Classical Electrodynamics (2001) esitettyä menetelmää. Tärkeä erikoistapaus yhtälöstä (2.72) on yhtälö, jossa $\bar{\epsilon} = \epsilon \bar{I}$. Silloin yleistetty Laplacen yhtälö on sama kuin tavallinen Laplacen yhtälö. Huomataan, että permittiivisyysdyadin ainut vaikutus pallokoordinaatistossa esitettävään Laplacen yhtälöön on se, että yhtälön termit painottuvat permittiivisyyden komponenttien perusteella. Sijoittamalla yrite

$$\phi = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) Q(\varphi) \quad (2.73)$$

yleistettyyn Laplacen yhtälöön (2.72) ja soveltamalla yleistetyn Laplace-operaattorin esitystä pallokoordinaatistossa (2.71) saadaan seuraava yhtälö:

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{\epsilon_{rr}}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{\epsilon_{\theta\theta}}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + \frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0 \quad (2.74)$$

missä lopputulos on kerrottu puolittain kertoimella $r^3 \sin^2 \theta / R\Theta Q$. Havaitaan, että φ -riippuvuutta on yhtälön vasemmalla puolella pelkästään viimeisessä termissä. Sen vuoksi tämän termin on oltava vakio. Merkitään separointivakiota $-\epsilon_{\varphi\varphi} m^2$. Differentiaaliyhtälön

$$\frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = -\epsilon_{\varphi\varphi} m^2 \quad (2.75)$$

ratkaisu on

$$Q = e^{\pm im\varphi} \quad (2.76)$$

Jotta ratkaisu olisi yksikäsitteinen, m :n on oltava kokonaisluku. Kun sijoitetaan separointivakio takaisin yhtälöön (2.74) yhtälö muuttuu seuraavaan muotoon:

$$\frac{\epsilon_{rr}}{\epsilon_{\theta\theta}} r^2 \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{\epsilon_{\theta\theta}} \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \quad (2.77)$$

Nyt r -riippuvuus on onnistuttu eristämään ensimmäiseen termiin. Kirjoitetaan separointivakio kahdella eri tavalla:

$$\frac{\epsilon_{rr}}{\epsilon_{\theta\theta}} r^2 \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = l(l+1) = \frac{\epsilon_{rr}}{\epsilon_{\theta\theta}} \lambda(l)(\lambda(l)+1) \quad (2.78)$$

Vakion $\lambda(l)$ voi kirjoittaa vakion l avulla seuraavasti:

$$\lambda(l) = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\epsilon_{\theta\theta}}{\epsilon_{rr}} l(l+1) + \frac{1}{4}} \quad (2.79)$$

Yhtälön (2.78) kannalta on merkityksetöntä, valitaanko yhtälössä (2.79) diskriminantin eteen '+'-merkki vai '-'-merkki, koska $\lambda(l)(\lambda(l)+1)$ säilyy muuttumattomana valinnasta riippumatta. Merkin '+' valinta on kuitenkin sikäli luonnollinen, että valinnan jälkeen $\lambda(l) = l$ silloin, kun $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{rr}$, joten jatkossa käytetään tätä valintaa. Yrite

$$R_l(r) = A_l r^{\lambda(l)+1} + B_l r^{-\lambda(l)} \quad (2.80)$$

on yhtälön (2.78) ratkaisu.

Lopulta pystytään muodostamaan yhtälö θ -riippuvuudelle käyttämällä edellä määriteltyjä separointivakioita. Myös θ -riippuvuutta kuvaava yhtälö yksinkertaistuu, kun määritellään apumuuttuja $\mu = (\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\theta\theta})^{1/2}$:

$$l(l+1)\Theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \frac{\epsilon_{\varphi\varphi} m^2}{\epsilon_{\theta\theta} \sin^2 \theta} \Theta = \frac{\mu^2 m^2}{\sin^2 \theta} \Theta \quad (2.81)$$

Tuntemattomille $R(r)$, $\Theta(\theta)$ ja $Q(\varphi)$ saatiin siis seuraavat kolme yhtälöä:

$$\begin{cases} \frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + m^2 = 0 \\ \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{\lambda(l)(\lambda(l)+1)}{r^2} = 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{\mu^2 m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0 \end{cases} \quad (2.82)$$

2.4.3 Legendren yhtälön ratkaiseminen

Kahdelle yhtälöryhmän (2.82) ensimmäiselle yhtälölle onnistuttiin jo löytämään ratkaisut. Kolmas yhtälö on mutkikkaampi. Jos vaihdetaan muuttujaa siten, että merkitään $x = \cos \theta$ ja $P(x) = \Theta(\theta)$, yhtälö muuttuu seuraavanlaiseksi:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{\mu^2 m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (2.83)$$

Kyseessä on toisen asteen differentiaaliyhtälö, jota kutsutaan yleistetyksi Legendren yhtälöksi. Koska yhtälö on toista astetta, sillä on kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua kutakin m :n ja l :n arvoa kohti. Ratkaisuille käytetään merkintöjä $P_l^{\mu m}$ ja $Q_l^{\mu m}$. (Abramowitz & Stegun, 1964.)

Legendren yhtälö (2.83) yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0 \quad (2.84)$$

jos valitaan $m = 0$. Yhtälön (2.84) pystyy ratkaisemaan käyttämällä yrittienä potenssisarjaa (Jackson, 2001)

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (2.85)$$

Yhtälössä eksponentti α voidaan aina valita siten, että sarja alkaa arvosta $a_0 \neq 0$. Toisen asteen yhtälön ratkaisemista potenssisarjan avulla kutsutaan Frobeniuksen menetelmäksi (Kreyszig, 1983). Kun potenssisarja (2.85) sijoitetaan Legendren yhtälöön (2.84), kertoimille a_j saadaan seuraava yhtälö:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{(\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)]a_j x^{\alpha+j}\} = 0 \quad (2.86)$$

Jotta yhtälö olisi voimassa jokaisen x :n potenssin kertoimen on kadottava. Silloin toisiaan seuraavien kertoimien välillä on yhteys

$$a_{j+2} = \left[\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} \right] a_j \quad (2.87)$$

Yhtälö (2.87) ei kuitenkaan kerro mitään ensimmäisestä tai toisesta kertoimesta a_0 ja a_1 . Toinen kerroin voidaan kuitenkin olettaa nollassa. $a_1 = 0$. Jotta ensimmäinen kerroin voisi olla nollassa poikkeava siten, että yhtälö (2.86) on yhä voimassa, täytyy päteä

$$\alpha(\alpha-1) = 0 \quad (2.88)$$

Potenssisarja konvergoituu, kun $|x| < 1$, mutta sarjan halutaan konvergoituvan myös arvoilla $x = \pm 1$. Silloin sarjan on välttämättä päätyttävä johonkin eksponentin arvoon $\alpha + j = l$ siten, että $a_j = 0$ tätä suuremmilla j :n arvoilla. Jotta sarja päättyisi kohdassa $\alpha + j = l$, nimittäjän täytyy mennä nollassa yhtälön (2.87) oikealla puolella. Vakion α arvo on 0 tai 1, minkä lisäksi olettamuksesta $a_1 = 0$ seuraa, että j on parillinen, epänegatiivinen kokonaisluku. Havaitaan, että sarjan (2.85) päätyminen edellyttää, että l on epänegatiivinen kokonaisluku. Jos l on parillinen, vakion α on oltava 0. Muutoin pätee $\alpha = 1$. Polynomit on tapana normalisoida siten, että $P_l(\pm 1) = 1$. Näitten tietojen avulla pystytään muodostamaan Legendren polynomit. Polynomia $P_l(x)$ kutsutaan asteen l Legendren polynomiksi.

Vakio l on sanan mukaisesti Frobeniuksen menetelmässä käytettävän polynomin asteen lisäksi, että l esiintyy separointivakiassa. Kolme ensimmäistä polynomia ovat (Abramowitz & Stegun, 1964)

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{cases} \quad (2.89)$$

Legendren polynomit $P_l(x)$, $l \in \mathbb{N}$ ovat erikoistapaus yleisistä Legendren funktiosta $P_l^m(x)$. Legendren funktioilla on muutamia ominaisuuksia, joitten tunteminen on avuksi ratkaistaessa sähköstatiikan ongelmia pallokoordinaatistossa. Jos l ja m ovat positiivisia kokonaislukuja, Legendren funktiot $P_l^m(x)$ pystytään esittämään Legendren polynomien avulla seuraavasti (Arfken et al., 1995):

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (2.90)$$

Koska $P_l(x)$ on asteen l polynomi ja operaatio d^m/dx^m pienentää polynomin astetta m kertaa, Legendren funktion $P_l^m(x)$ havaitaan saavan arvon nolla, jos $m > l$.

Legendren funktioille pätevät myös seuraavat ortogonaalisuussäännöt, jos $l, m \in \mathbb{N}$ (Arfken et al., 1995):

$$\int_{-1}^1 P_p^m(x) P_q^m(x) dx = \frac{2}{2q+1} \frac{(q+m)!}{(q-m)!} \delta_{p,q} \quad (2.91)$$

ja

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^k(x) \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{(n+m)!}{m(n-m)!} \delta_{m,k} \quad (2.92)$$

Lisäksi voidaan tarkastella Legendren funktioitten parillisuutta, kun n ja m ovat positiivisia kokonaislukuja. Funktio $P_n^m(x)$ on parillinen, kun $m+n$ on parillinen kokonaisluku ja pariton muutoin:

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n+m} P_n^m(x) \quad (2.93)$$

Legendren polynomeilla $P_l(x)$ on ominaisuus, joka takaa, että jokainen funktio pystytään esittämään polynomien lineaarikombinaation avulla. Ominaisuutta kutsutaan täydellisyysdeksi. Täydellisyys tarkoittaa matemaattisessa muodossa ilmaistuna sitä, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = f(x) \quad (2.94)$$

on voimassa kaikille funktioille, jotka on määritelty välillä $[-1, 1]$. Legendren polynomien täydellisyys seuraa Sturm–Liouville -teoriasta (Arfken et al., 1995.). Yhtäpitävä tapa ilmaista funktiojoukon $\{U_n\}$ täydellisyys on (Jackson, 2001)

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(x' - x) \quad (2.95)$$

Yhtälöä (2.95) kutsutaan täydellisyysrelaatioksi.

2.4.4 Laplacen yhtälön ratkaisu

Päädyttiin siis siihen, että yleistetyn Laplace-yhtälön $\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \nabla \phi) = 0$ toteuttaa funktio $\phi_{lm}(r, \theta, \varphi) = r^{-1} R_l(r) \Theta_{lm}(\theta) Q_m(\varphi)$, kun m on kokonaisluku. Lisäksi yksittäisistä ratkaisuista muodostettu summa on myös yleistetyn Laplace-yhtälön ratkaisu. Sen vuoksi summa

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r^{-1} R_l(r) \Theta_{lm}(\theta) Q_m(\varphi) dl \quad (2.96)$$

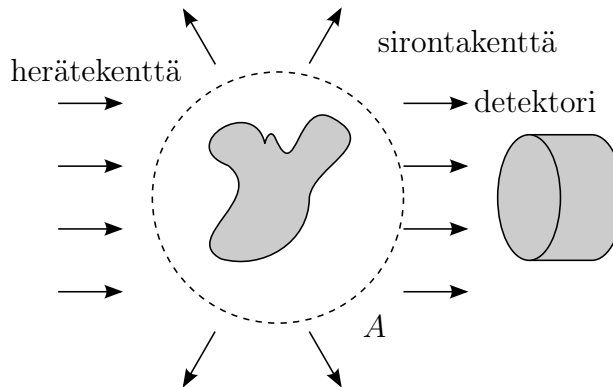
on Laplacen yhtälön ratkaisu, kun $R_l(r)$, $\Theta_{lm}(\theta)$ ja $Q_m(\varphi)$ ovat

$$\begin{cases} R_l(r) = A_l r^{\lambda(l)+1} + B_l r^{-\lambda(l)} \\ \Theta_{lm}(\theta) = C_{lm} P_l^{\mu m}(\cos \theta) + D_{lm} Q_l^{\mu m}(\cos \theta) \\ Q_m(\varphi) = E_m \cos m\varphi + F_m \sin m\varphi \end{cases} \quad (2.97)$$

Jos Legendren funktion kertaluku μm on kokonaisluku, nollasta poikkeava ratkaisu pysyy äärellisenä vain, jos myös l on kokonaisluku. Kun rajoitutaan l :n kokonaislukuarvoihin, summan (2.96) integraali muuttuu summaksi. Yleisemmässä tapauksessa yläindeksi μm voi saada mitä tahansa reaalisia arvoja, jolloin l :n arvot eivät välttämättä ole kokonaislukuja.

2.5 Mie-sironta

Tasoaallon siroaminen kappaleesta kuuluu dynaamisen sähkömagneetiikan perusongelmiin samoin, kuin kappaleen sähköinen vaste vakiosähkökentässä kuuluu statiikan perusongelmiin. Seuraavaksi tarkastellaan sähködynamiikan sirontaongelmaa, eli sähkömagneettisen kentän käyttäytyminen pyritään kuvaamaan tilanteessa, jossa aallon etenemisreitillä on sirotaajia. Luvussa tiiviisti esitettävää asiaa käsitellään



Kuva 2.5: Tasoaallon ekstinktio. Ekstinktio tarkoittaa eroa herätekentän tehon ja detektorin havaitseman tehon välillä, kun kappale on asetettu tasoaallon reitille. Ekstinktion vaikuttavat kappaleen aiheuttamat sironta ja absorptio. Katkoviiva esittää kuvitteellista, pallon muotoista rajapintaa, jonka yli siirtyvää tehoa lasketaan.

syvällisemmin Bohrenin ja Huffmanin kirjassa *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (1983). Kappaleen sirontaominaisuuksien tunteminen on tärkeää silloin, kun halutaan selvittää, kuinka hyvin sähkömagneettinen aalto pystyy siirtymään lähettimestä vastaanottimelle. Toisaalta, kun tunnetaan lähetetty ja vastaanotettu aalto, pystytään tekemään johtopäätöksiä siitä, millaisia sirotaajia on voinut olla matkan varrella.

Dynaamisen sähkökentän sirontaa pallon muotoisesta dielektrisestä kappaleesta kutsutaan Mie-sironnaksi. Sirontaongelman analyttisen ratkaisun keksivät Gustav Mie ja Ludvig Lorenz toisistaan riippumatta (Lorenz, 1890; Mie, 1908). Analyttinen Mie-ratkaisu on hyödyllinen silloin, kun aallonpituus on samassa kokoluokassa pallon halkaisijan kanssa. Jos aallonpituus on huomattavasti pallon halkaisijaa pienempi, on parempi käyttää sädeoptiikkaa analyttisen ratkaisun sijaan. Jos aallonpituus sen sijaan on paljon halkaisijaa suurempi, pystytään käyttämään approksimaatiivista yhtälöä. Sähkömagneettisen aallon sirontaa pienestä kappaleesta kutsutaan Rayleigh-sironnaksi lordi Rayleihin mukaan.

Tarkastellaan ensin sirontaa yleisestä dielektrisestä kappaleesta, joka ei ole välttämättä pallon muotoinen. Oletetaan, että detektori on asetettu kuvan 2.5 mukaisesti tasoaallon reitille siten, että se katsoo suoraan tulevaa aaltoa kohti. Jos detektorin ja lähettimen välissä on kappale, detektorin havaitsema kenttä poikkeaa tavallisesti herätekentästä, koska väliin asetettu kappale absorboi osan lähetetystä tehosta, mikä lisäksi se vaikuttaa siirtyvän tehon suuntaan sirottamalla kenttää. Sironnan ja absorption yhteisvaikutusta kutsutaan ekstinktioksi. Ekstinktio siis kertoo, kuinka suuri osa lähetetystä tehosta menetetään ennen detektoria.

Sironnan, absorption ja ekstinktion tarkasteleminen kvantitatiivisesti tapahtuu Poyntingin vektorin

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \quad (2.98)$$

avulla. Poyntingin vektori kuvaa sähkömagneettisessa aallossa olevan tehon siirtymisnopeutta ja -suuntaa. Kun kokonaissähkö- ja -magneettikentät jaetaan herätekenttään ja sironneeseen kenttään

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \quad (2.99)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s \quad (2.100)$$

pystytään Poyntingin vektori esittämään herätekentän ja sironneen kentän avulla summana

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_i + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_{\text{ext}} \quad (2.101)$$

missä termit määritellään seuraavasti:

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^* \} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{S}_s = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \} \quad (2.103)$$

$$\mathbf{S}_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_s^* + \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_i^* \} \quad (2.104)$$

Kappaleen ympärille voidaan kuvitella kuvan 2.5 mukaisesti pallon muotoinen pinta A , jonka yli siirtyvä nettoteho kuvaa pallon sisäpuolella tapahtuvaa absorptiota, mihin lasketaan yleisessä tapauksessa mukaan kappaleen aiheuttaman absorptioon lisäksi myös väliaineesta aiheutuva absorptio. Väliaineesta aiheutuva absorptio on kuitenkin mielekkäintä olettaa häviävän pieneksi, koska muuten absorptioon vaikuttaisi pinnan A valinta. Absorption, sironnan ja ekstinktion vuoksi tapahtuva energiahävikki pystytään nyt laskemaan pintaintegraalien avulla:

$$W_a = - \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r \, dA \quad (2.105)$$

$$W_s = \int_A \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{u}_r \, dA \quad (2.106)$$

$$W_{\text{ext}} = - \int_A \mathbf{S}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{u}_r \, dA = W_a + W_s \quad (2.107)$$

Kun herätekentän irradianssia merkitään I_i , suureitten

$$C_a = - \int_A \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r \, dA \quad (2.108)$$

$$C_s = \int_A \mathbf{S}_s \cdot \mathbf{u}_r \, dA \quad (2.109)$$

$$C_{\text{ext}} = W_{\text{ext}}/I_i = C_a + C_s \quad (2.110)$$

yksikkö on sama kuin pinta-alalla, joten suureita kutsutaan absorptio-, sironta- ja ekstinktiopoikkipinta-aloiksi. Kappaleen absorptio-, sironta- ja ekstinktiotehokkuudet ovat vastaavien poikkipinta-alojen ja kappaleen herätekentän etenemissuuntaa vastaan kohtisuoran poikkileikkauksen pinta-alan G suhteita:

$$Q_{\text{ext}} = \frac{C_{\text{ext}}}{G} \quad (2.111)$$

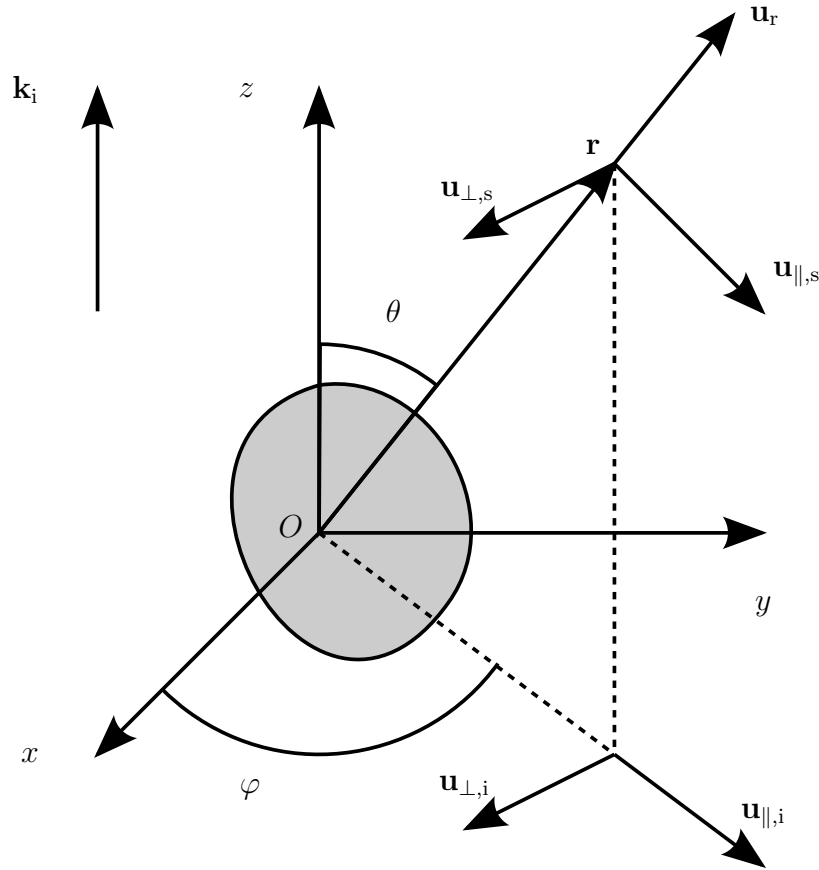
$$Q_s = \frac{C_s}{G} \quad (2.112)$$

$$Q_a = \frac{C_a}{G} \quad (2.113)$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa positiivisen z -akselin suuntaan etenevän lineaarisesti polarisoituneen tasoallon reitillä on sirottaja koordinaatiston origossa O , kuten kuvassa 2.6. Tasoallon aaltovektori $\mathbf{k}_i = k_i \mathbf{u}_z$ on silloin z -akselin suuntainen. Koordinaatiston voi valita siten, että x -akseli on herätekentän \mathbf{E}_i suuntainen. Herätekenttä on siis

$$\mathbf{E}_i = E_i e^{-jkz} \mathbf{u}_x \quad (2.114)$$

Tavoitteena on löytää sironnut kenttä kaukoalueen pisteessä $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$. Määritellään sirontataso siten, että sirontataso sisältää sekä z -akselin että tarkastelupisteen \mathbf{r} . Kuvassa 2.6 katkoviivalla rajattu alue määrittelee sirontatason. Herätteen ja sironneen aallon sähkökentät pystytään esittämään kaukoalueessa komponenteittain siten, että lasketaan yhteen sirontatason suuntainen komponentti E_{\parallel} ja sirontatasoon



Kuva 2.6: Sirottaja herätekentässä. Koordinaatisto valitaan siten, että origo on sirottajan sisällä ja heräteaalto etenee positiivisen z -akselin suuntaan. Tasoja, jotka sisältää z -akselin ja tarkastelupisteen r , kutsutaan sirontatasoksi. Kantavektori $\mathbf{u}_{\perp,s}$ on sirontatasoa vastaan kohtisuora, ja kantavektori $\mathbf{u}_{\parallel,s}$ on sirontatason kanssa saman suuntainen.

nähden kohtisuora komponentti E_{\perp} :

$$\mathbf{E}_i = E_{\parallel,i} \mathbf{u}_{\parallel,i} + E_{\perp,i} \mathbf{u}_{\perp,i} \quad (2.115)$$

$$\mathbf{E}_s = E_{\parallel,s} \mathbf{u}_{\parallel,s} + E_{\perp,s} \mathbf{u}_{\perp,s} \quad (2.116)$$

Sironneen kentän esittämisessä käytetään yhtälöissä (2.115)–(2.116) eri kantavektoreita kuin herätekentän esittämiseen. Vektorit $\mathbf{u}_{\perp,i}$ ja $\mathbf{u}_{\perp,s}$ ovat sirontatason yksikkönormaalivektoreita ja ne ovat samat. Vektori $\mathbf{u}_{\parallel,s}$ määritellään $\mathbf{u}_{\parallel,s} = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_{\perp,s}$ ja vektori $\mathbf{u}_{\parallel,i}$ on vektorin $\mathbf{u}_{\parallel,s}$ projektio xy -tasoon. Koska sirottavan kappaleen pinnalla määriteltävät rajapintaehdot ovat lineaariset, sironnut kenttä pystytään esittämään herätekentän avulla seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} E_{\perp,s} \\ E_{\parallel,s} \end{bmatrix} = \frac{e^{-jk(r-z)}}{jkr} \begin{bmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\perp,i} \\ E_{\parallel,i} \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

Koska herätekenttä oletettiin x -polarisoituneeksi, vaihtoehtoinen tapa esittää siron-

nut kenttä \mathbf{E}_s on

$$\mathbf{E}_s = \frac{e^{-jk(r-z)}}{jkr} \mathbf{X} E_i \quad (2.118)$$

missä \mathbf{X} on sironta-amplitudivektori, joka määritellään

$$\mathbf{X} = (S_2 \cos \varphi + S_3 \sin \varphi) \mathbf{u}_{\parallel,s} + (S_4 \cos \varphi + S_1 \sin \varphi) \mathbf{u}_{\perp,s} \quad (2.119)$$

Ekstinktio- ja sirontapoikkipinta-alat pystytään esittämään sironta-amplitudivektorin avulla seuraavasti:

$$C_{\text{ext}} = \frac{4\pi}{k^2} \Re\{(\mathbf{X} \cdot \mathbf{u}_x)_{\theta=0}\} \quad (2.120)$$

$$C_{\text{sca}} = \int_{4\pi} \frac{|\mathbf{X}|^2}{k^2} d\omega \quad (2.121)$$

Oletetaan seuraavaksi, että sirottajana on pallon muotoinen kappale, jonka säde on a . Heräte on sama kuin edellä, eli $\mathbf{E}_i = E_i e^{-jkz} \mathbf{u}_x$. Määritellään pallon kokoparametri $x = ka$. Jos pallo on homogeeninen tai radiaalisesti uniaksaalinen, pystytään sähkö- ja magneettikentät ratkaisemaan analyttisesti, kun etsitään sirontaparametrit a_n ja b_n . Kaavat (2.120)–(2.121) pystytään sen jälkeen sieventämään siten, että sironta- ja ekstinktiopoikkipinta-alat on helppo laskea.

Ensin tarkastellaan homogeenista palloa. Homogeenisen pallon tapauksessa sirontaparametrit on kätevintä esittää Riccati–Bessel-funktioiden avulla, jotka määritellään

$$\begin{aligned} \psi_n(\rho) &= \rho j_n(\rho) \\ \xi_n(\rho) &= \rho h_n^{(2)}(\rho) \end{aligned}$$

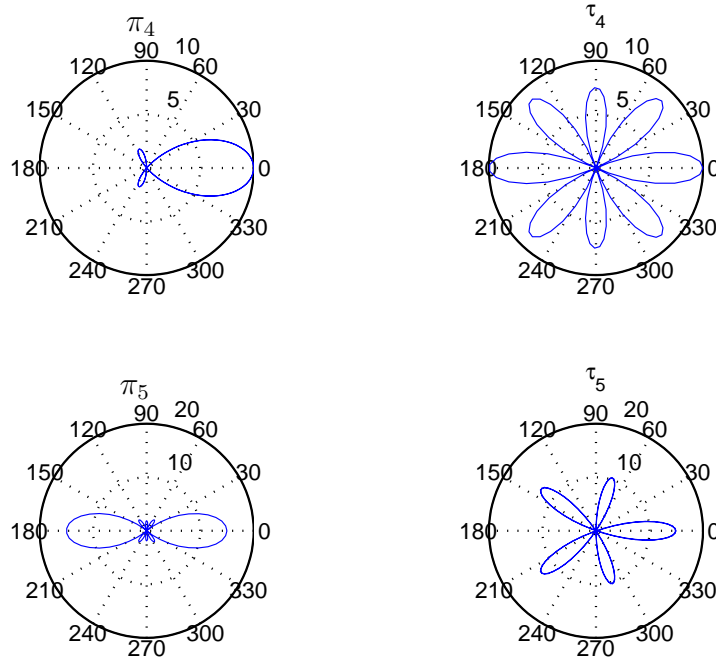
missä j_n on n :s Besselin pallofunktiio ja $h_n^{(2)}$ on n :s ensimmäisen lajin Hankelin pallofunktiio. Kun m on luvussa 2.2.2 määritelty taitekerroin, sirontaparametreille pätevät seuraavat Riccati–Bessel-funktioiden avulla ilmaistavat yhtälöt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{m\psi_n(mx)\psi'_n(x) - \psi_n(x)\psi'_n(mx)}{m\psi_n(mx)\xi'_n(x) - \xi_n(x)\psi'_n(mx)} \\ b_n &= \frac{\psi_n(mx)\psi'_n(x) - m\psi_n(x)\psi'_n(mx)}{\psi_n(mx)\xi'_n(x) - m\xi_n(x)\psi'_n(mx)} \end{aligned}$$

Sirontaparametrit pystytään laskemaan myös rekursiivisen yhtälön avulla, mikä on erityisen kätevää, kun sirontaongelmalle tehdään ratkaisija esimerkiksi Matlab-ohjelmiston avulla (Mätzler, 2002). Sirontaparametrien a_n ja b_n lisäksi Mie-ratkaisussa käytetään muotofunktioita, jotka määritellään

$$\pi_n(\theta) = \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad (2.122)$$

$$\tau_n(\theta) = \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \quad (2.123)$$



Kuva 2.7: Muotofunktiot π_n ja τ_n . Muotofunktiot yhdessä sirontaparametrien kanssa kertovat sironneen kentän. Periodisuuden vuoksi muotofunktiot voi esittää polaarikoordinaatistossa.

Koska muotofunktioiden määritelmässä esiintyy $\cos \theta$, muotofunktiot ovat selvästi periodisia, joten ne voi esittää kätevästi polaarikoordinaatistossa, kuten kuvassa 2.7.

Näitä merkintöjä käyttämällä kentät pystytään kirjoittamaan

$$E_{s,\parallel} = -\frac{\cos \varphi}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(ja_n \xi_n' \tau_n + b_n \xi_n \pi_n) \quad (2.124)$$

$$E_{s,\perp} = -\frac{\sin \varphi}{rk} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(b_n \xi_n \tau_n + ja_n \xi_n' \pi_n) \quad (2.125)$$

$$H_{s,\parallel} = -\frac{k \sin \varphi}{\omega \mu kr} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(jb_n \xi_n' \tau_n + a_n \xi_n \pi_n) \quad (2.126)$$

$$H_{s,\perp} = \frac{k \cos \varphi}{\omega \mu kr} \sum_{n=1}^{\infty} E_n(jb_n \xi_n' \pi_n + a_n \xi_n \tau_n) \quad (2.127)$$

missä

$$E_n = (-j)^n E_i \frac{2n+1}{n(n+1)} \quad (2.128)$$

Seuraavaksi tarkastellaan radiaalisesti uniakiaalista palloa. Tarkempi kuvaus on Cheng-Wei Qiu'n tutkimusryhmän aiheesta koskevassa artikkelissa (Qiu et al., 2007).

Dynamiikassa myös pallon suhteellinen permeabiilisuus $\bar{\mu}$ on merkittävä. Radiaalisesti uniakiaalisen pallon sisällä väliaineen suhteellinen permittiivisyys ja permeabiilisuus jakautuvat radiaaliseen ja tangentialiseen komponenttiin:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_n \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r + \epsilon_t (\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r) \quad (2.129)$$

$$\bar{\mu} = \mu_n \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r + \mu_t (\bar{\mathbf{I}} - \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r) \quad (2.130)$$

Ratkaistaessa sirontaongelman sähkömagneettista kenttää on hyödyllistä jakaa kenttä komponentteihin pallon säteen suhteen siten, että \mathbf{B}_{TM} on pallon säteen kanssa kohtisuorassa oleva magneettivuontiheyden komponentti ja \mathbf{D}_{TE} on pallon säteen kanssa kohtisuorassa oleva sähkövuontiheyden komponentti. Komponentit pystytään esittämään skalaaristen potentiaalifunktioiden ψ_{TM} ja ψ_{TE} avulla seuraavasti:

$$\mathbf{B}_{\text{TM}} = \nabla \times (\mathbf{u}_r \psi_{\text{TM}}) \quad (2.131)$$

$$\mathbf{D}_{\text{TE}} = -\nabla \times (\mathbf{u}_r \psi_{\text{TE}}) \quad (2.132)$$

Sironnut kenttä pystytään laskemaan, kun tunnetaan sironneen kentän potentiaalit $\psi_{\text{s,TE}}$ ja $\psi_{\text{s,TM}}$, jotka ovat

$$\psi_{\text{s,TE}} = \frac{\sin \varphi}{\omega \eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n h_n^{(2)}(kr) P_n^1(\cos \theta) E_n \quad (2.133)$$

$$\psi_{\text{s,TM}} = \frac{\cos \varphi}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} a_n h_n^{(2)}(kr) P_n^1(\cos \theta) E_n \quad (2.134)$$

missä $h_n^{(2)}$ on toisen lajin Besselin pallofunktio ja η_0 on tyhjiön aaltoimpedanssi $\eta_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$. Jos pallo on radiaalisesti uniakiaalinen, sirontaparametrit ovat seuraavat

$$a_n = \frac{\sqrt{\mu_t/\epsilon_t} j_n(ka) j'_{\nu_1}(k_t a) - j'_n(ka) j_{\nu_1}(k_t a)}{h_n^{(2)'}(ka) j_{\nu_1}(k_t a) - \sqrt{\mu_t/\epsilon_t} h_n^{(2)}(ka) j'_{\nu_1}(k_t a)} \quad (2.135)$$

$$b_n = \frac{\sqrt{\mu_t/\epsilon_t} j'_n(ka) j_{\nu_2}(k_t a) - j_n(ka) j'_{\nu_2}(k_t a)}{h_n^{(2)}(ka) j'_{\nu_2}(k_t a) - \sqrt{\mu_t/\epsilon_t} h_n^{(2)'}(ka) j_{\nu_2}(k_t a)} \quad (2.136)$$

missä alaindeksit ν_1 ja ν_2 määritellään

$$\nu_1 = \sqrt{n(n+1) \frac{\epsilon_t}{\epsilon_n} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad (2.137)$$

$$\nu_2 = \sqrt{n(n+1) \frac{\mu_t}{\mu_n} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \quad (2.138)$$

ja k_t määritellään

$$k_t = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_t \mu_0 \mu_t} \quad (2.139)$$

Sirontaparametrien avulla sirontapoikkipinta-ala C_{sca} ja ekstinktiopoikkipinta-ala C_{ext} pystytään lausumaan seuraavasti:

$$C_{\text{sca}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (2.140)$$

$$C_{\text{ext}} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\Re\{a_n + b_n\} \quad (2.141)$$

Yhtälöt (2.140)–(2.141) ovat voimassa sekä homogeenisen pallon tapauksessa että yleisemmin RU-pallon tapauksessa. Äärettömiä summia ei pystytä laskemaan yhtälöissä (2.121)–(2.141), joten summat on katkaistava. Bohren ja Huffman (1983) ehdottavat termien lukumäärää

$$n_{\text{max}} = x + 4x^{1/3} + 2 \quad (2.142)$$

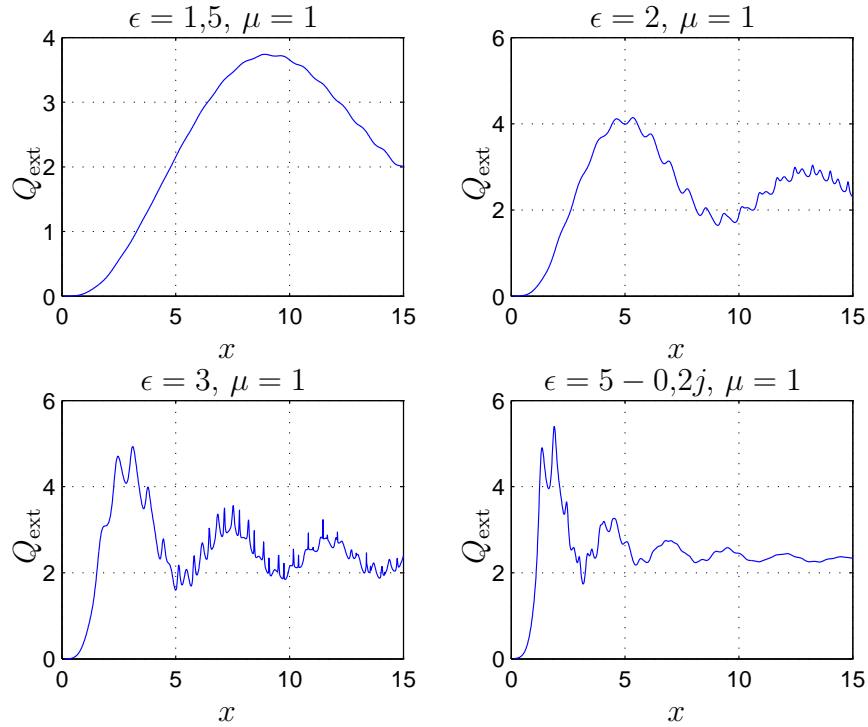
Luvussa esitetyt tulokset on laskettu katkaisemalla summa BH:ta mukaillen n_{max} termin kohdalla. Yhtälöstä (2.142) havaitaan, että kokoparametrin kasvaessa tarkkojen tulosten laskeminen edellyttää yhä useampien termien ottamista mukaan summaan. Jos pallon koko siis on suuri aallonpituuteen nähden, on turvauduttava sädeoptiikkaan, koska Mie-ratkaisun käyttäminen muuttuu vähitellen epäkäytännölliseksi.

Homogeenisen pallon ekstinktion kuvaajissa havaitaan kolme erillistä piirrettä, jotka ovat:

- Monotonisesti kasvava ekstinktio, kun $x < 1$
- Periodinen interferenssikuvio
- Epäsäännöllinen hienorakenne

Kuvasta 2.8 huomataan, että tapa, jolla piirteet tulevat esille, riippuu pallon sähköisistä parametreista. Periodinen kuvio on sitä tiheämpi, mitä suurempi pallon permittiivisyys ϵ on. Periodinen kuvio oskilloi kuitenkin arvon 2 ympärillä permittiivisyydestä riippumatta. Lisäksi monotonisesti kasvava osuus arvoilla $x < 1$ nousee sitä korkeammalle, mitä suurempi pallon permittiivisyys on. Ekstinktion hienorakenne on varsin epäsäännöllinen siihen nähden, että tarkasteltava kappale on yksinkertainen geometrialtaan. Hienorakenne ei ole kovin voimakas pienillä kokoparametrin x arvoilla. Hienorakenne tulee kuitenkin esille sitä aikaisemmin, mitä suurempi pallon permittiivisyys on. Hienorakenne ei myöskään välttämättä jatku loputtomiin, vaan se saattaa kadota. Kuvan 2.8 viimeisessä kuvaajassa pallo on häviöllinen, eli $\Im\{\epsilon\} \neq 0$, jolloin hienorakenne katoaa tarpeeksi suurilla kokoparametrin x arvoilla.

Kuvan 2.8 kuvaajissa on laitettava merkille, että kokoparametri x ei vaikuta pallon väliaineparametreihin. Kaikki luonnossa esiintyvät materiaalit ovat dispersiivisiä, eli niitten väliaineparametrit riippuvat aallonpituudesta. Kuvan 2.8 tilanne on tulkittava siten, että pallon koko muuttuu ja aallonpituus on vakio. Luonnossa esiintyvien sirottajien, kuten vesipisaroitien, käyttäytymisestä saisi tarkemman kuvan, olettamalla kappaleen koon vakioksi ja laskemalla sironnan aallonpituuden



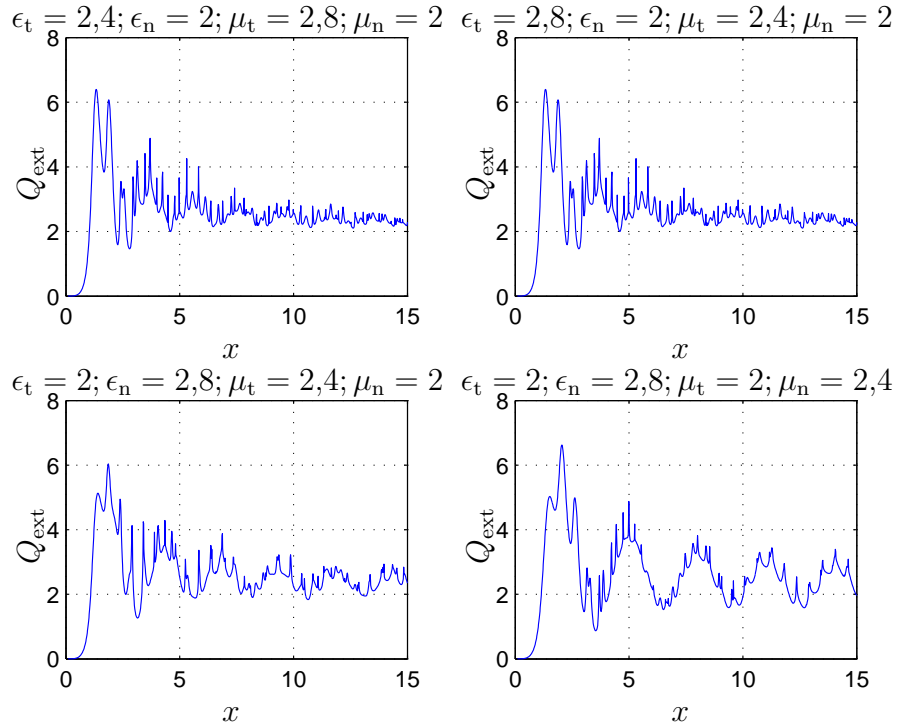
Kuva 2.8: Pallon ekstinktio eri permittiivisyyden ϵ arvoilla. Hienorakenne katoaa, jos pallo on häviöllinen.

funktiona. Silloin suurin työ on väliaineparametrien selvittämisessä jokaiselle käynteille aallonpituudelle erikseen. Kuvassa 2.8 pitäydytään kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi muuttumattomissa väliaineparametreissa.

RU-pallon ekstinktiokuvaajista kuvassa 2.9 havaitaan, että väliaineparametrien komponenttien vaihtaminen keskenään, siten että $\epsilon_t \leftrightarrow \mu_t$ ja $\epsilon_n \leftrightarrow \mu_n$, ei vaikuta ekstinktion. Sen sijaan, jos sähköiset väliaineparametrit vaihdetaan keskenään, $\epsilon_t \leftrightarrow \epsilon_n$, tai magneettiset väliaineparametrit vaihdetaan keskenään, $\mu_t \leftrightarrow \mu_n$, ekstinktion kuvaaja muuttuu. Sähköisen anisotropian $\epsilon_t \neq \epsilon_n$ lisäksi on huomioitava magneettisen anisotropian $\mu_t \neq \mu_n$ vaikutus. Sähköisen anisotropian ja magneettisen anisotropian yhteisvaikutusta kutsutaan hybridianisotropiaksi (Qiu et al., 2007).

Tutkaa, jonka lähetin ja vastaanotin sijaitsevat samassa paikassa, kutsutaan monostaattiseksi tutkaksi. Takaisinsirontapinta-ala on suure, joka kuvaa kappaleen näkyvyyttä monostaattisessa tutkassa. Herätekenttää mallinnetaan tasoallon avulla. Takaisinsironnassa on siis kyse tasoallon heijastumisesta takaisin aallon tulosuuntaan. Takaisinsirontapinta-alan tarkka määritelmä on

$$\sigma_b = \frac{4\pi |\mathbf{X}(180^\circ)|^2}{k^2} \quad (2.143)$$



Kuva 2.9: RU-pallon ekstinktio. Permittiivisyyden komponentit voidaan vaihtaa permeabiilisuuden komponenttien kanssa ilman muutosta ekstinktiossa. Sähköisen anisotropian lisäksi on huomiotava magneettinen anisotropia permeabiilisuudessa $\bar{\mu}$. Ilmiötä kutsutaan hybridianisotropiaksi.

Pallon tapauksessa $S_3 = 0$ ja $S_4 = 0$, minkä lisäksi

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \pi_n + b_n \tau_n) \quad (2.144)$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n) \quad (2.145)$$

Kun kertoimet S_n tunnetaan, pystytään sironta-amplitudivektori laskemaan yhtälön (2.119) avulla. Esimerkki homogeenisen pallon kertoimien S_n kulmariippuvuudesta on kuvassa 2.10a, jossa pallon taitekerroin on $m = 5 - 0.4j$. Kun kertoimet S_n tunnetaan, pystytään laskemaan takaisinsirontapinta-ala yhtälöstä (2.143).

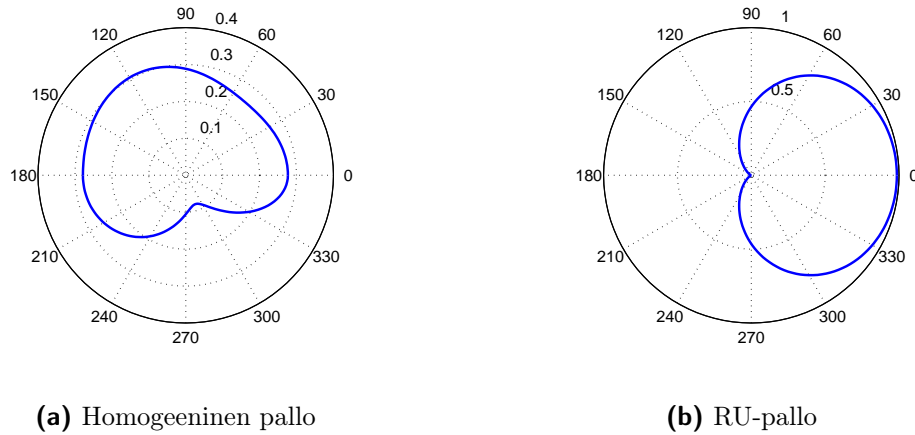
Eriyisen kiinnostava on tilanne, jossa takaisinsironta katoaa kokonaan. Kappalletta, jonka takaisinsironta katoaa, ei pysty havaitsemaan monostaattisessa tutkassa. Sironta-amplitudivektorin yhtälöstä (2.119) nähdään, että takaisinsironta katoaa, eli $\sigma_b = 0$, tapauksessa, jossa kertoimet S_1 ja S_2 katoavat. Takaisinsironta katoaa yleisesti tilanteessa, jossa $\epsilon_n = \mu_n$ ja $\epsilon_t = \mu_t$, kuten kuvassa 2.10b. Epähomogeenisen RU-pallon takaisinsironta menee siis nolnaan, jos permittiivisyyden komponentit ja permeabiilisuuden komponentit ovat samat.

Palloa, jonka pinnalla ovat voimassa reunaehdot

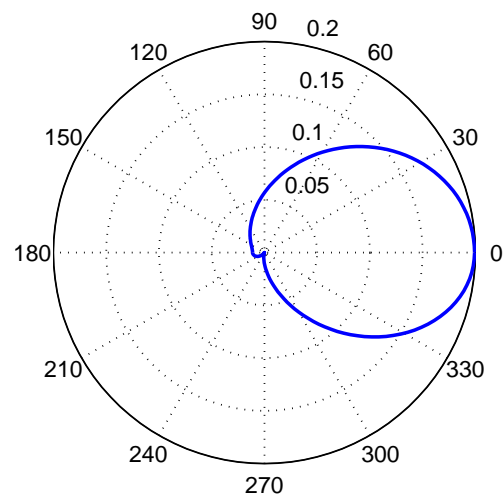
$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.146)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.147)$$

kutsutaan DB-palloksi (Lindell & Sihvola, 2009). DB-pallon saa aikaan valitsemalla pallon sisälle väliaineparametrit $\epsilon_n = 0$ ja $\mu_n = 0$. Kuten RU-pallolla, tapauksessa $\bar{\epsilon} = \bar{\mu}$, myös DB-pallon takaisinsironta katoaa. Jos siis oletetaan permittiivisyyden ja permeabiilisuuden normaalikomponentit riittävän pieniksi $\epsilon_n \rightarrow 0$, $\mu_n \rightarrow 0$, seuraa kuvan 2.11 mukainen tilanne, jossa takaisinsironta on hyvin pieni.



Kuva 2.10: Homogeenisen pallon ja RU-pallon Mie-sironta. Polaarikoordinaatiston ylempi puolisko kuvaa suuretta S_1 ja alempi puolisko suuretta S_2 . Homogeenisen pallon väliaineparametrit ovat $\epsilon = (5 - 0.4j)^2$; $\mu = 1$. RU-pallon väliaineparametrit ovat $\bar{\epsilon} = \bar{\mu} = 5\mathbf{nn} + 4\bar{\mathbf{I}}_t$.



Kuva 2.11: DB-pallon Mie-sironta. DB-palloa approksimoidaan siten, että väliaineparametreiksi valitaan $\epsilon_t = 1$; $\mu_t = 10$; $\epsilon_n = \mu_n = 1/61$. Pallon takaisinsironnan havaitaan olevan hyvin pieni.

Luku 3

Polarisoituvuuden laskeminen

Mie-sironta, jota käsiteltiin edeltäneessä luvussa (2.5), liittyy sähködynamiikkaan. Seuraavaksi palataan sähköstatiikkaan, eli sähkökenttä oletetaan aikariippumattomaksi. Luvussa 2.3.3 havaittiin, että statiikassa sirottava kappale vastaa kaukokentältään dipolia, jonka suuruus riippuu kappaleeseen kohdistuvasta herätekentästä. Herätekentän ja dipolimomentin välinen verrannollisuuskerroin on kappaleen polarisoituvuus. Polarisoituvuus riippuu lineaarisesti kappaleen sähköisestä massasta, eli permittiivisyyden tilavuusintegraalista, mutta polarisoituvuuteen vaikuttaa myös kappaleen muoto. Seuraavaksi paneudutaan määrätyn muotoisten kappaleitten polarisoituvuuden laskemiseen.

Homogeeninen pallo ja homogeeninen ympyrälieriö ovat esimerkkejä niistä harvoista kappaleista, joitten tapauksessa sirontaongelma pystytään ratkaisemaan tarkasti. Sirontaongelma mutkistuu, jos homogeenisuudesta luovutaan, mutta ratkaiseminen on yhä mahdollista erikoistapauksissa. RU-pallo ja PU-ympyrälieriö ovat esimerkkejä tapauksista, joissa tarkka ratkaiseminen onnistuu. Menetelmä, jonka avulla lasketaan PU-ympyrälieriön polarisoituvuus, on periaatteeltaan sama kuin RU-pallon tapauksessa käytettävä menetelmä, joten kaksiulotteista sirontaongelmaa tarkastellaan ensin, luvussa 3.1. RU-palloa käsitellään luvussa 3.2. Aidosti systrooppisen pallon polarisoituvuutta ei pysty laskemaan tarkasti, mutta luvussa 3.3 esitetään puolianalyttinen ratkaisu.

Työssä esitettävä menetelmä systrooppisen pallon polarisoituvuuden määrittämiseen toimii ainoastaan erikoistapauksessa, jota kutsutaan työssä säännölliseksi systropiaksi. Yleisemmässä tapauksessa voi käyttää numeriikkaa. Luku 3.4 kuvailee ongelmia, joihin analyttisissä menetelmissä törmätään, kun systropia ei ole säännöllistä. Luvussa 3.5 sirontaongelma ratkaistaan numeerisesti kaupallisen valmisohjelman avulla. Lopuksi, luvussa 3.6, käsitellään kahta erikoistapausta, joissa pallon pinta toteuttaa sähköisen tai magneettisen reunaehdon.

3.1 PU-ympyrälieriö

Tarkastellaan polarisoituvuuden laskemista kuvan 3.1 esittämässä tilanteessa, jossa vapaassa tilassa on äärettömän pitkä suora ympyrälieriö. Lieriö on z -akselin suuntainen ja sen säde on a . Lieriön permittiivisyys määritellään sylinterikoordinaatistossa

seuraavasti:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_{\rho\rho} \mathbf{u}_\rho \mathbf{u}_\rho + \epsilon_{\varphi\varphi} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi \quad (3.1)$$

Lieriötä, jonka väliaineparametrit määritellään kaavan (3.1) avulla, kutsutaan tässä työssä polaariuniakiaaliseksi (PU).

Lieriön polarisoituvuuden voi laskea ratkaisemalla sähkökentän lieriön sisä- ja ulkopuolella ja yhdistämällä tulokset sopivien reunaehtojen avulla. Lieriön ulkopuolinen potentiaali koostuu herättävästä kentästä, joka tunnetaan, ja vastekentästä, joka halutaan selvittää. Valitaan lähdekentäksi $\mathbf{E}^p = E^p \mathbf{u}_x$. Silloin lähdekentän potentiaali on

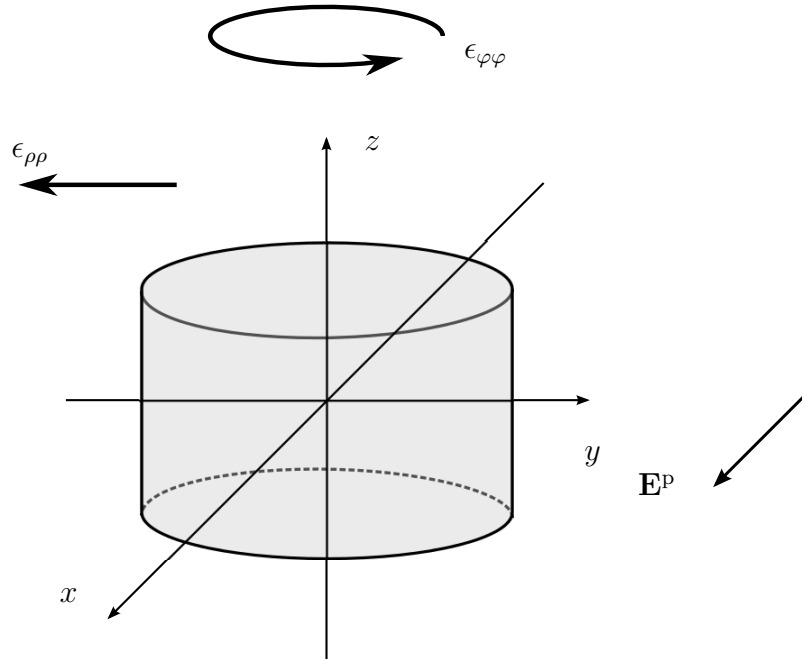
$$\phi^p = -E^p x = -E^p \rho \cos \varphi \quad (3.2)$$

Vastekentän potentiaali on muotoa $\phi^s = B\rho^{-1} \cos \varphi$. Operoimalla sylinterikoordinaatiston Laplace-operaattorilla pystytään varmistumaan siitä, että molemmat potentiaalit ovat Laplacen yhtälön ratkaisuja. Laplacen operaattori sylinterikoordinaatistossa on

$$\nabla^2 \phi(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad (3.3)$$

Havaitaan, että herätekentän potentiaali ϕ^p toteuttaa Laplacen yhtälön:

$$\nabla^2 \phi^p(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (E^p \rho \cos \varphi) + \frac{1}{\rho^2} (-E^p \rho \cos \varphi) = 0 \quad (3.4)$$



Kuva 3.1: PU-ymyrälieriö. Todellinen sirottaja jatkuu loputtomiin z -akselin molempiin suuntiin. Koska sirottaja on symmetrinen z -akselin suhteen, pelkäsään yhden herätteen $\mathbf{E}^p = E^p \mathbf{u}_x$ tarkasteleminen riittää.

Vastekentän potentiaali ϕ^s toteuttaa samoin Laplacen yhtälön:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi^s(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (-\rho B \rho^{-2} \cos \varphi) + \frac{1}{\rho^2} (-B \rho^{-1} \cos \varphi) \\ &= \frac{1}{\rho} (B \rho^{-2} \cos \varphi) + \frac{1}{\rho^2} (-B \rho^{-1} \cos \varphi) = 0\end{aligned}\quad (3.5)$$

Lieriön sisäpuolella tilanne on sikäli mutkikkaampi, että väliaineparametrien vaikutus on huomioitava. Jos väliaine on epähomogeenista, eli $\epsilon_{\rho\rho} \neq \epsilon_{\phi\phi}$, lieriön sisäpuolinen sähköpotentiaali ei toteuta Laplacen yhtälöä vaan yleistetyn Laplace-yhtälön. Yleistetty Laplacen yhtälö on sylinterikoordinaatistossa

$$0 = \nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \nabla \phi) = \nabla \cdot \left[\bar{\epsilon} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta \right) \right] \quad (3.6)$$

$$= \frac{\epsilon_{\rho\rho}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \quad (3.7)$$

Kun sijoitetaan yrite

$$\phi(\rho, \varphi) = R(\rho)Q(\varphi) \quad (3.8)$$

päädytään yhtälöön

$$\frac{\epsilon_{\rho\rho}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) Q(\varphi) + R(\rho) \frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{\rho^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (3.9)$$

Separoimalla muuttujat saadaan kaksi erillistä differentiaaliyhtälöä $Q(\varphi)$:lle ja $R(\rho)$:lle:

$$-\frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = \epsilon_{\varphi\varphi} m^2 \quad (3.10)$$

$$\frac{\epsilon_{\rho\rho\rho}}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) = \epsilon_{\varphi\varphi} m^2 \quad (3.11)$$

Ensimmäisen differentiaaliyhtälön (3.10) ratkaisu on

$$Q(\varphi) = e^{im\varphi} \quad (3.12)$$

missä m :n on oltava kokonaisluku, jotta ratkaisu olisi yksikäsitteinen. Oletetaan, että pätee $m = 1$. Kun tarkastellaan ratkaisun reaali- ja imaginaariosaa erikseen, saadaan kaksi ratkaisua

$$Q(\varphi) = \cos(\varphi) \quad (3.13)$$

$$Q(\varphi) = \sin(\varphi) \quad (3.14)$$

Huomataan, että ensimmäinen ratkaisu antaa lieriön sisäpuolelle saman φ -riippuvuuden kuin lieriön ulkopuolella. Toisen differentiaaliyhtälön kaksi ratkaisua ovat

$$R(\rho) = A \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\sqrt{\frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{\epsilon_{\rho\rho}}}} \quad (3.15)$$

$$R(\rho) = A \left(\frac{\rho}{a} \right)^{-\sqrt{\frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{\epsilon_{\rho\rho}}}} \quad (3.16)$$

Ainoastaan ensimmäinen ratkaisusta on hyväksyttävä, koska potentiaalin on pysytävä äärellisenä lieriön keskipisteessä.

Tuntemattomat kertoimet pystytään ratkaisemaan soveltamalla rajapintaehtoja lieriön ulkopuoliseen ja sisäpuoliseen potentiaaliin. Rajapintaehdot

$$\begin{cases} \phi_{\text{sisä}}(\rho, \varphi)|_{\rho=a} = \phi_{\text{ulko}}(\rho, \varphi)|_{\rho=a} \\ \epsilon_{\rho\rho} \frac{d\phi_{\text{sisä}}(\rho, \varphi)}{d\rho} \Big|_{\rho=a} = \frac{d\phi_{\text{ulko}}(\rho, \varphi)}{d\rho} \Big|_{\rho=a} \end{cases} \quad (3.17)$$

yksinkertaistuvat muotoon

$$\begin{cases} A = -E^{\text{p}}a + Ba^{-1} \\ A = -\sqrt{\frac{a^2}{\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi}}}(E^{\text{p}}a + Ba^{-1}) \end{cases} \quad (3.18)$$

mistä saadaan tuntemattomiksi kertoimiksi

$$\begin{cases} A = -aE^{\text{p}} \frac{2}{\sqrt{\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi}} + 1} \\ B = a^2E^{\text{p}} \frac{\sqrt{\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi}} - 1}{\sqrt{\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi}} + 1} \end{cases} \quad (3.19)$$

Polarisoituvuus α määriteltiin

$$p = \alpha E^{\text{p}}$$

Normalisoitu polarisoituvuus α_{n} on kaksiulotteisessa tapauksessa

$$\alpha_{\text{n}} = \frac{\alpha}{\epsilon_0 A_{\text{s}}} \quad (3.20)$$

missä A_{s} on lieriön poikkileikkauksen pinta-ala. Kaksiulotteinen dipoli aiheuttaa potentiaalin

$$\phi^{\text{d}}(\rho, \varphi) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\rho}}{2\pi\epsilon_0\rho} = \frac{p \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (3.21)$$

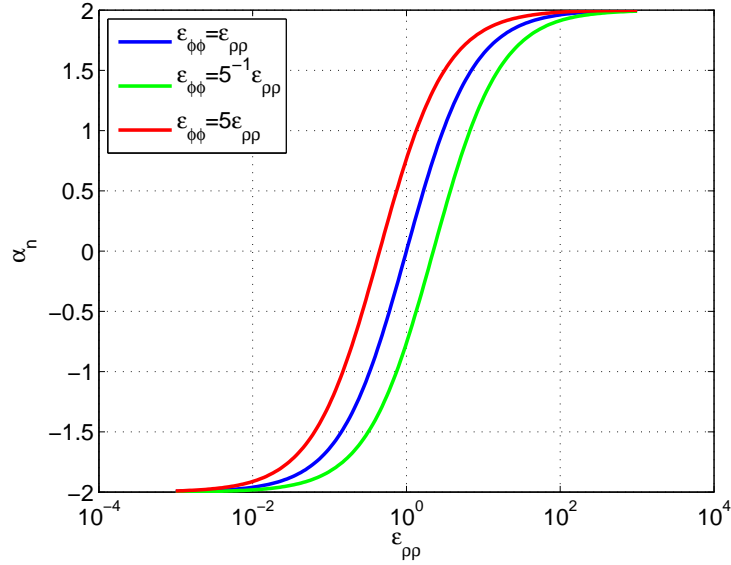
Kun vaaditaan $\phi_{\text{d}}(\rho, \varphi) = \phi^{\text{s}}(\rho, \varphi)$, eli että dipolin aiheuttama kenttä on yhtä suuri lieriön vastekentän kanssa, pystytään ratkaisemaan dipolimomentti p

$$p = 2\pi\epsilon_0 B \quad (3.22)$$

ja normalisoitu polarisoituvuus

$$\alpha_{\text{n}} = \frac{p/E^{\text{p}}}{\epsilon_0 A_{\text{s}}} = \frac{2B}{a^2 E^{\text{p}}} = 2 \frac{\sqrt{\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi}} - 1}{\sqrt{\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi}} + 1} \quad (3.23)$$

Kuvasta 3.2 havaitaan, että ääritapauksessa $\epsilon_{\rho\rho} \rightarrow \infty$ normalisoitu polarisoituvuus saa arvon $\alpha_{\text{n}} = 2$ ja toisessa ääritapauksessa $\epsilon_{\rho\rho} \rightarrow 0$ arvon $\alpha_{\text{n}} = -2$. Havainto myötäilee yhtälöä (3.23), kuten huomataan sijoittamalla permittiivisyyden kaksi ääriarvoa yhtälöön.



Kuva 3.2: PU-ympyrälieriön normalisoitu polarisoituvuus.

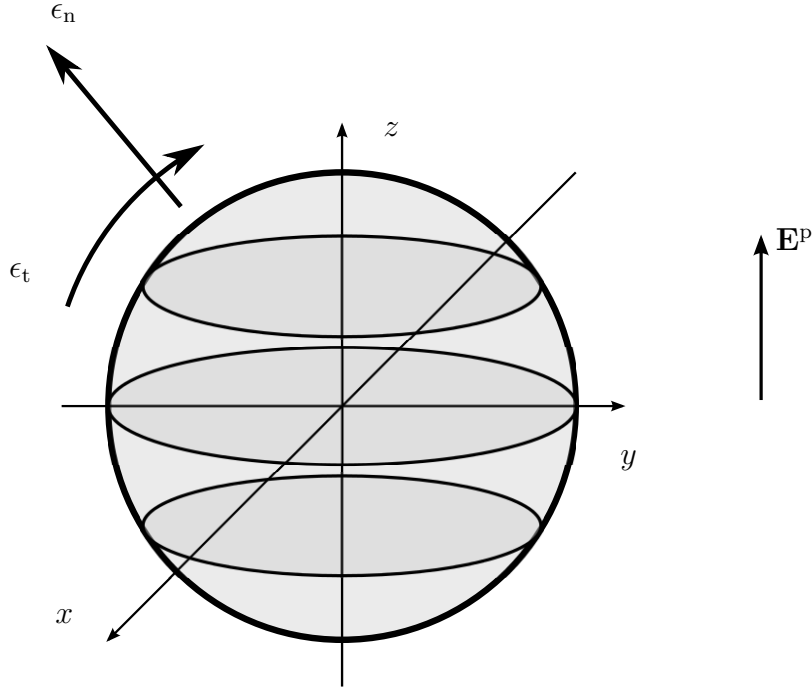
Yhtälössä (3.23) lieriön normalisoidun polarisoituvuuden α_n havaitaan riippuvan suureesta $(\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi})^{1/2}$, jota voidaan pitää PU-ympyrälieriön sähköisenä massana. Jos näin määritelty sähköinen massa tunnetaan, ei komponenttien $\epsilon_{\rho\rho}$ ja $\epsilon_{\varphi\varphi}$ tunteminen ole tarpeen kappaleen sirontaominaisuuksien määrittämisen kannalta. Kuvassa 3.2 suhde $\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\rho\rho}$ vaikuttaa siis kuvaajan sijaintiin vaaka-akselilla, mutta ei kuvaajan muotoon. Jos kuvaajat piirrettäisiin käyttämällä muuttujana sähköistä massaa $(\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi})^{1/2}$, kuvaajat piirtyisivät päällekkäin siten, että jokainen niistä kuljisi pisteen $(1, 0)$ kautta.

Lisäksi kuvaajan perusteella homogeenisen lieriön polarisoituvuus näyttää katoavan, kun suhteellinen permittiivisyys saa arvon $\epsilon_{\rho\rho} = 1$. Tulos on ymmärrettävissä siten, että tarkasteltavan avaruuden väliaine on kauttaaltaan homogeenista. Kuvitteellinen rajapinta ei enää jaa avaruutta eri alueisiin väliaineparametrien perusteella, minkä vuoksi rajapinnan voi kokonaan unohtaa. Vastekenttä \mathbf{E}^s määriteltiin toisaalta siten, että sen lähteet ovat sirottajan sisällä. Koska ”sirottaja” pystytään avaruuden homogeenisuuden vuoksi määrittelemään mielivaltaisesti, vastekentän on kadottava: $\mathbf{E}^s = 0$. Silloin myös polarisoituvuus katoaa. Polarisoituvuus katoaa myös yhtälön (3.23) perusteella, kun sijoitetaan $\epsilon_{\rho\rho} = 1$ ja $\epsilon_{\varphi\varphi} = 1$.

Koska polarisoituvuuteen vaikuttaa vain sähköinen massa $(\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi})^{1/2}$, lieriön polarisoituvuus saattaa kadota, vaikka homogeenisessa väliaineessa olisikin aito sirottaja, eli $\epsilon_{\rho\rho} \neq 1$ ja $\epsilon_{\varphi\varphi} \neq 1$. Yhtälön (3.23) perusteella polarisoituvuus katoaa, kun $\epsilon_{\rho\rho} = (\epsilon_{\varphi\varphi})^{-1}$. Pallo on silloin näkymätön pienillä taajuuksilla tai sähkökentän ollessa staattinen.

3.2 RU-pallo

3.2.1 Yleinen RU-pallo



Kuva 3.3: RU pallo. Sirontaongelma on pallosymmetrinen, joten herättävän kentän suunnan voi valita mielivaltaisesti. Ongelman matemaattinen tarkastelu on yksinkertaisinta, kun herättäväksi kentäksi valitaan $E^P \mathbf{u}_z$, jolloin kenttä on positiivisen z -akselin suuntainen.

Tarkastellaan pallon muotoista a -säteistä kappaletta, jonka keskipiste on origossa, kuten kuvassa 3.3. Pallo on asetettu tyhjiin avaruuteen. Pallon sisällä väliaineparametrin $\bar{\epsilon}$ määrittelee yhtälö

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0(\epsilon_n \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r + \epsilon_t \mathbf{u}_\theta \mathbf{u}_\theta + \epsilon_t \mathbf{u}_\phi \mathbf{u}_\phi) \quad (3.24)$$

Kyse on siis systrooppisen pallon erikoistapauksesta, jossa $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\phi\phi} = \epsilon_t$. Erikoistapauksista, jossa permittiivisyydellä on vain yksi tangenttikomponentti kutsutaan RU-palloksi. Pallon normaalin suuntaiselle permittiivisyydelle ϵ_{rr} otettiin käyttöön lyhyempi merkintä ϵ_n . RU-pallossa mikään suunta ei ole erikoisasemassa, vaan kappale on pallosymmetrinen. Sen vuoksi RU-pallo on aidosti systrooppista palloa yksinkertaisempi kappale. Tarkasteltaessa kaukokenttää lasketaankin aidosti systrooppista palloa varten tarvittavien kahden erillisen polarisoituvuuden sijasta yksi ainut polarisoituvuus, joka riittää kuvaamaan pallon käyttäytymistä erisuuntaisten herätekenttien vaikutuksen alaisena.

Oletetaan, että RU-palloon kohdistuu ulkoinen sähkökenttä $\mathbf{E}^P = E^P \mathbf{u}_z$. Herättävän kentän suunnan voi valita vapaasti, joten suunnaksi oletetaan positiivisen

z -akselin suunta. Tavoitteena on selvittää pallon vastekenttä \mathbf{E}^s ja lopulta polari-soituvuus α_n . Kentän aiheuttaman potentiaalin voi ilmaista pallokoordinaatistossa

$$\phi^p = -E^p z = -E^p r \cos \theta \quad (3.25)$$

Potentiaalin $\phi_{\text{ulko}} = \phi^p + \phi^s$ on toteutettava tavallinen Laplacen yhtälö $\nabla^2 \phi_{\text{ulko}} = 0$ pallon ulkopuolella, tyhjässä avaruudessa, ja potentiaalin $\phi_{\text{sisä}}$ on toteutettava yleistetty Laplacen yhtälö $\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \nabla \phi) = 0$ pallon sisäpuolisessa väliaineessa. Herättävän kentän potentiaalissa ϕ^p ei ole φ -riippuvuutta, joten symmetrian vuoksi myöskään sekundäärkentän potentiaalissa ϕ^s ei voi olla φ -riippuvuutta pallon sisä- tai ulkopuolella. Yleistetyn Laplacen yhtälön ratkaisu esitettiin luvussa 2.4, jossa riippuvuuden havaittiin olevan muotoa

$$Q(\varphi) = E \cos m\varphi + F \sin m\varphi \quad (3.26)$$

Kulmariippuvuudesta päästään siis eroon, kun valitaan $m = 0$. Kokeillaan pallon sisä- ja ulkopuoliselle potentiaalille yritettä

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} Ar^{-2} \cos \theta - E^p r \cos \theta, & r \geq a \\ Br^{\lambda(1)} \cos \theta, & r \leq a \end{cases} \quad (3.27)$$

Yrite on samaa muotoa kuin 2.96, joten se toteuttaa yleistetyn Laplace-yhtälön. Yrite on sikäli järkevä, että sekundäärkentän potentiaalin arvo ei kasva rajatta, kun etäisyys origosta lisääntyy, kuten tapahtuisi, jos r :n eksponentti saisi myös positiivisia arvoja. Potentiaali ei myöskään pallon sisällä kasva rajatta, kun siirrytään kohti origoa. Yritteessä ei oteta mukaan kaikkia mahdollisia ratkaisun (2.96) termejä, minkä vuoksi osa ratkaisuisista saatettaisiin periaatteessa menettää. Toisaalta luonnon on oltava sikäli yksikäsitteinen, että tietty heräte aiheuttaa pelkästään yhdenlaisen vasteen. Sen vuoksi riittää, että löydetään yksi ratkaisu, joka toteuttaa Laplacen yhtälön eri alueissa ja joka toteuttaa lisäksi reuna- ja rajapintaehdot.

Pakotetaan potentiaalin jatkuvuus ja sähkövuontiheyden normaalikomponentin $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ jatkuvuus rajapinnalla $r = a$. Saadaan seuraavat yhtälöt:

$$\begin{cases} \phi_{\text{sisä}}(r, \theta)|_{r=a} = \phi_{\text{ulko}}(r, \theta)|_{r=a} \\ \epsilon_n \frac{d\phi_{\text{sisä}}(r, \theta)}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{d\phi_{\text{ulko}}(r, \theta)}{dr} \Big|_{r=a} \end{cases} \quad (3.28)$$

Kun sijoitetaan yrite, ensimmäinen yhtälö muuttuu muotoon

$$Aa^{-2} - E^p a = Ba^{\lambda(1)} \quad (3.29)$$

ja toinen yhtälö muuttuu muotoon

$$-2Aa^{-2} - E^p = \epsilon_n B \lambda(1) a^{\lambda(1)-1} \quad (3.30)$$

Kun eliminoidaan pallon sisäistä kenttää kuvaava kerroin B yhtälöistä (3.29) ja (3.30), saadaan lauseke pallon ulkopuolista kenttää kuvaavalle kertoimelle A :

$$A = \frac{\epsilon_n \lambda(1) - 1}{\epsilon_n \lambda(1) + 2} E^p a^3 \quad (3.31)$$

jolloin kertoimen B arvoksi tulee

$$B = -\frac{3}{\epsilon_n \lambda(1) + 2} a^{1-\lambda(1)} \quad (3.32)$$

Kappaleen sähköistä vastetta pystytään kuvaamaan laaduttoman luvun avulla käyttämällä normalisoitua polarisoituvuutta, joka määritellään

$$\alpha_n = \frac{p/E^p}{\epsilon_0 V} \quad (3.33)$$

Alaindeksi n viittaa normalisointiin eikä normaalisuuntaisuuteen. Normalisoitu polarisoituvuus kuvaa kappaleen polarisoitumiskykyä suhteessa kappaleen tilavuuteen. Käsite on analoginen luvussa 3.1 lieriölle esitetyn normalisoidun polarisoituvuuden käsitteen kanssa, mutta kolmiulotteisessa tilanteessa on yhtälössä (3.33) käytettävä pinta-alan sijasta kappaleen tilavuutta V , joka on pallon tapauksessa

$$V = \frac{4\pi a^3}{3} \quad (3.34)$$

Normalisoitu polarisoituvuus pystytään laskemaan kertoimesta A , kun vaaditaan, että sekundäärikenttä ja dipolin aiheuttama kenttä ovat samoja

$$\frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \phi_d = \phi^s = \frac{A \cos \theta}{r^2} \quad (3.35)$$

Kun sijoitetaan A :n arvo yhtälöstä (3.31) ja käytetään pallon tilavuuden kaavaa (3.34), saadaan normalisoitu polarisoituvuus:

$$\alpha_n = 4\pi \epsilon_0 \frac{A/E^p}{\epsilon_0 V} = 3 \frac{\epsilon_n \lambda(1) - 1}{\epsilon_n \lambda(1) + 2} \quad (3.36)$$

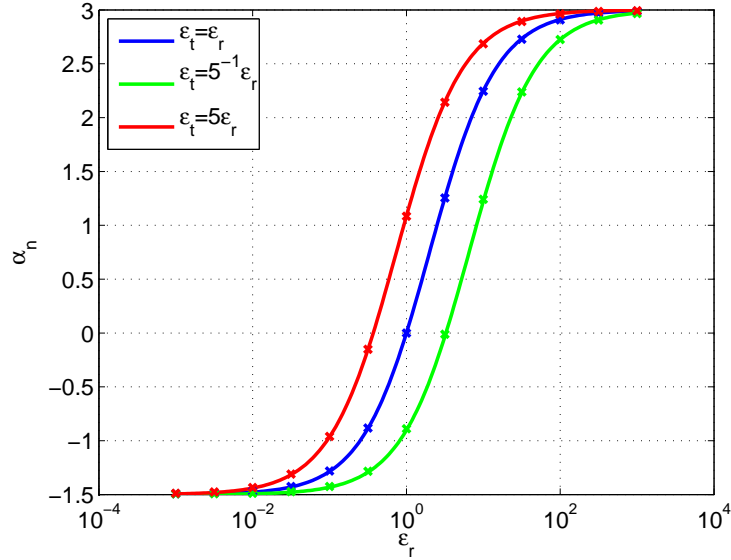
Sijoittamalla $\lambda(l)$:n määritelmä (2.79)

$$\lambda(1) = -\frac{1}{2} + \sqrt{2 \frac{\epsilon_t}{\epsilon_n} + \frac{1}{4}}$$

yhtälöön (3.23) saadaan

$$\alpha_n = 3 \frac{\epsilon_n + 2 - \sqrt{\epsilon_n^2 + 8\epsilon_n \epsilon_t}}{\epsilon_n - 4 - \sqrt{\epsilon_n^2 + 8\epsilon_n \epsilon_t}} \quad (3.37)$$

RU-pallon polarisoituvuuskuvaaja kuvassa 3.4 poikkeaa monessa suhteessa PU-ympyrälieriön polarisoituvuuskuvaajasta 3.2 luvussa 3.1. RU-pallon normalisoidun polarisoituvuuden riippuvuus permittiivisyyden komponenteista $\alpha_n(\epsilon_n, \epsilon_t)$ on mutkikkaampi kuin PU-ympyrälieriön vastaava riippuvuus. Permittiivisyyden komponentit eivät vaikuta RU-pallon polarisoituvuuteen symmetrisesti, vaan komponenttien vaihtaminen keskenään muuttaa pallon polarisoituvuutta. Kyseessä on merkittävä periaatteellinen ero RU-pallon ja PU-ympyrälieriön polarisoituvuuksien välillä. Luvussa 3.1 määriteltiin PU-ympyrälieriölle sähköinen massa $(\epsilon_{\rho\rho}\epsilon_{\varphi\varphi})^{1/2}$. Sama



Kuva 3.4: RU-pallon normalisoitu polarisoituvuus. Yhtenäinen viiva kuvaa tuloksia, jotka on laskettu käyttäen kaavaa (3.36). Ristit ovat COMSOL-ohjelmalla laskettuja vertailutuloksia.

menettely ei kuitenkaan toimi RU-pallojen tapauksessa. RU-pallon normalisoidun polarisoituvuuden yhtälössä (3.37) komponentit ϵ_n ja ϵ_t jakautuvat eri termeihin, joten tulo $\epsilon_t \epsilon_n$ ei kiinnitä polarisoituvuutta yksikäsitteisesti. Kuvan 3.4 kuvaajissa ero näkyy siten, että suhteen ϵ_t/ϵ_n muuttaminen vaikuttaa kuvaajan sijainnin lisäksi myös kuvaajan muotoon.

RU-pallon permittiivisyyden komponenttien epäsymmetrinen vaikutus polarisoituvuuteen johtaa siihen, että polarisoituvuuden raja-arvo suurilla normaalisuuntaisen permittiivisyyden ϵ_n arvoilla riippuu tangentin suuntaisesta permittiivisyydestä ϵ_t . Raja-arvon käyttäytyminen poikkeaa sikäli PU-ympyrälieriöitten polarisoituvuuden käyttäytymisestä rajalla $\epsilon_{\rho\rho} \rightarrow \infty$, että PU-ympyrälieriön tapauksessa raja-arvo ei riipu tangenttikomponentista $\epsilon_{\varphi\varphi}$. PU-ympyrälieriön normalisoidun polarisoituvuuden havaittiin suppenevan suhteesta $\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\rho\rho}$ riippumatta kohti raja-arvoa $\alpha_n = 2$, kun radiaalisuuntainen permittiivisyys lähestyi arvoa $\epsilon_{\rho\rho} \rightarrow \infty$. Sama symmetrinen käyttäytyminen ei kuitenkaan yleisty kolmiulotteiseen tilanteeseen. Rajalla $\epsilon_n \rightarrow \infty$ lauseke (3.37) sievenee muotoon

$$\alpha_n = \frac{3(2\epsilon_t - 1)}{2(\epsilon_t + 1)} \quad (3.38)$$

kuten voidaan nähdä soveltamalla lausekkeeseen Taylorin kehitelmää

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x, \quad x \approx 0 \quad (3.39)$$

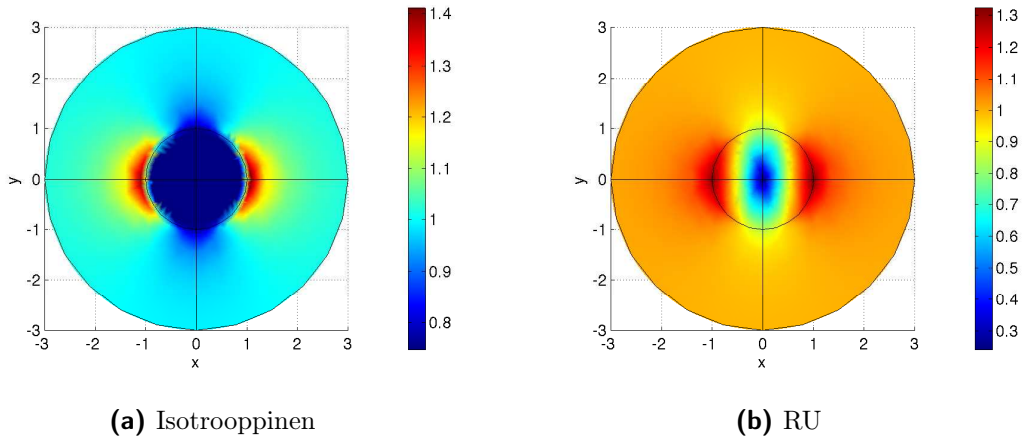
RU-pallon normalisoitu polarisoituvuus suppenee siis ϵ_n :n kasvaessa kohti eri arvoja, riippuen tangenttikomponentin ϵ_t suuruudesta.

RU-palloilla normalisoitu polarisoituvuus lähestyy suhteesta ϵ_t/ϵ_n riippumatta raja-arvoa $\alpha_n \rightarrow -3/2$, kun $\epsilon_n \rightarrow 0+$. Kuvan 3.4 raja-arvon voi päätellä olevan voimassa sijoittamalla permittiivisyyden $\epsilon_n = 0$ yhtälöön (3.37). Raja-arvo $\alpha_n \rightarrow -3/2$ saavutetaan myös silloin, kun $\epsilon_t \rightarrow 0+$, kuten käy selville yhtälöstä (3.38). Kuvan 3.4 voi katsoa ennakoivan myös tätä polarisoituvuuden käyttäytymistä, koska raja-arvo $-3/2$ saavutetaan nopeammin permittiivisyyden ϵ_t arvon ollessa pieni. Lieriön tapauksessa yhden komponentin muuttaminen pieneksi ei takaa raja-arvon saavuttamista, koska toisen komponentin arvon voi aina valita siten, että polarisoituvuus katoaa. Toisaalta myös RU-pallon polarisoituvuuden saa katoamaan, vaikka radiaalinen permittiivisyys saisi arvon $\epsilon_n = \infty$, valitsemalla tangentin suuntaiseksi permittiivisyydeksi $\epsilon_t = 2^{-1}$.

3.2.2 Isotrooppinen pallo

Väliaineparametreiltaan isotrooppinen pallo on RU-pallon erikoistapaus, jossa komponentit ovat samat, eli $\epsilon_n = \epsilon_t$. Kun herätteenä käytetään vakiokenttää $E^p \mathbf{u}_z$, isotrooppisen pallon sisäkenttä on vakio. Homogeenisen pallon sisäkenttä saadaan yhtälöistä (3.27) ja (3.32), kun muistetaan, että $\lambda(1) = 1$ isotrooppisessa tilanteessa:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{sisä}} &= -\nabla \phi_{\text{sisä}} = -\frac{\partial (Br^{\lambda(1)} \cos \theta)}{\partial z} \mathbf{u}_z \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{3}{\epsilon_n + 2} z \right) E^p \mathbf{u}_z \\ &= \frac{3}{\epsilon_n + 2} E^p \mathbf{u}_z \end{aligned} \quad (3.40)$$

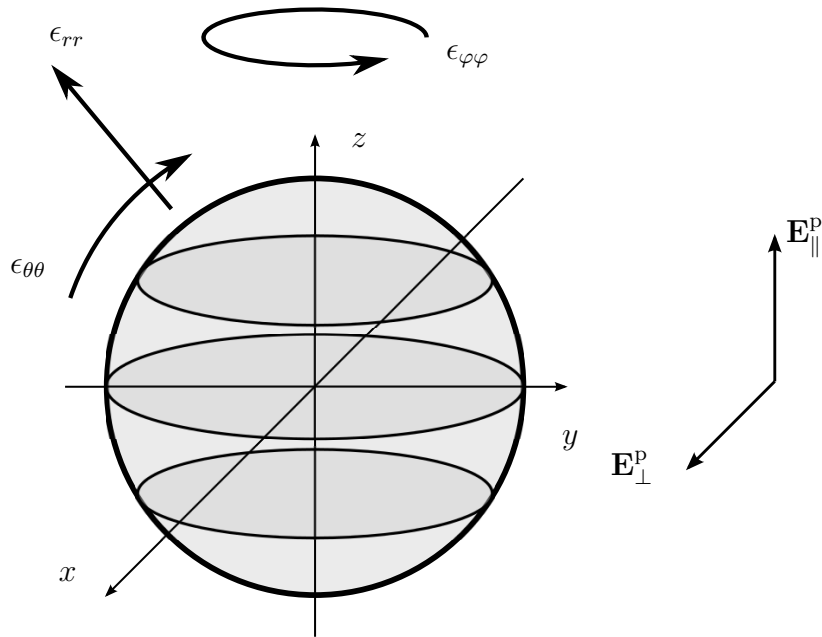


Kuva 3.5: Isotrooppisen pallon ja RU-pallon poikkileikkaus xy -tasossa, kun herätekenttä on $E^p \mathbf{u}_x$, missä $E^p = 1 \text{ V/m}$. Kuvaajan väri kertoo kentän itseisarvon $|\mathbf{E}|$ [V/m] kussakin poikkileikkauksen pisteessä. Isotrooppisen pallon sisällä kenttä on vakio. Isotrooppisen pallon permittiivisyys on $\epsilon = 2$ ja RU-pallon permittiivisyyden komponentit ovat $\epsilon_n = 1$ ja $\epsilon_t = 2$.

Sisäkenttä ei kuitenkaan ole vakio yleisessä RU-tapauksessa, vaan materiaalin on oltava isotrooppista. Kun permittiivisyyden komponentit eroavat, sähkökenttä muuttuu myös pallon sisällä, kuten kuvassa 3.5. Kuvassa 3.5b kenttä näyttää kulkevan rajapinnan yli jatkuvasti. Jatkuvuus johtuu siitä, että rajapintaehto (2.53) $\epsilon_{1,n}\mathbf{E}_1 = \epsilon_{2,n}\mathbf{E}_2$ yksinkertaistuu, kun normaalisuuntaiset permittiivisyydet $\epsilon_{1/2,n} = 1$ jätetään pois yhtälön molemmilta puolilta.

3.3 Säännöllisesti systrooppinen pallo

3.3.1 Säännöllinen systropia



Kuva 3.6: Systrooppinen pallo. Aidosti systrooppisessa pallossa $\epsilon_{\phi\phi} \neq \epsilon_{\theta\theta}$, mikä rikkoo pallosymmetrian. Pyörähdyssymmetriasta z -akselin suhteen seuraa kuitenkin, että yleisen polarisoituvuusdyadin $\bar{\alpha}_n$ määrittämiseen riittää kahden eri herättävän kentän tarkasteleminen. Herättäviksi kentiksi valitaan z -akselin suuntainen \mathbf{E}_{\parallel}^P ja x -akselin suuntainen \mathbf{E}_{\perp}^P .

Systrooppisten pallojen yllättävä piirre on se, että pieni muutos väliaineparametreissa muuttaa sirontaongelman matemaattisen luonteen täysin, vaikka pallon sähköinen käyttäytyminen muuttuu odotetusti ainoastaan vähän. Kun tangentialisten väliaineparametrien suhde $\epsilon_{\phi\phi}/\epsilon_{\theta\theta}$ on kokonaisluvun neliö, ongelma pystytään ratkaisemaan puolianalyttisin menetelmin. Tilannetta kutsutaan työssä säännölliseksi systropiaksi. Jos suhde on jotakin muuta kuin kokonaisluvun neliö, pallo ei enää ole säännöllisesti systrooppinen. Silloin työssä esiteltävä puolianalyttinen menetelmä ei enää toimi, mutta ratkaisun pystyy yhä löytämään numeerisin menetelmin. Numeerikassa väliaineparametrien vähäinen muuttaminen ei vaikuta olennaisesti ratkaisumenetelmän luonteeseen tai saatuun lopputulokseen. Puolianalyttisten mene-

telmien kannalta säännöllinen ja yleinen systropia kuitenkin poikkeavat toisistaan paljon.

Tarkastellaan tilannetta, jossa systrooppinen pallo on vapaassa tilassa, ja palloon kohdistuu ulkoinen sähkökenttä \mathbf{E}^P , kuten kuvassa 3.6. Pallo, jonka säde on a , asetetaan siten, että sen keskipiste on origossa. Pallon sisällä väliaineparametri $\bar{\epsilon}$ määritellään samoin kuin luvussa 2.4, eli

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_o(\epsilon_{rr}\mathbf{u}_r\mathbf{u}_r + \epsilon_{\theta\theta}\mathbf{u}_\theta\mathbf{u}_\theta + \epsilon_{\varphi\varphi}\mathbf{u}_\varphi\mathbf{u}_\varphi)$$

Tavoitteena on selvittää pallon sekundäärkenttä \mathbf{E}^s ja lopulta polarisoituvuusdyadi $\bar{\alpha}$. Systrooppinen pallo, jonka väliaineparametrit määritellään yllä olevan yhtälön (2.68) avulla, on pyörähdysymmetrinen z -akselin suhteen, joten polarisoituvuusdyadilla on kaksi toisistaan poikkeavaa komponenttia. Ensimmäinen komponentti α_{\parallel} kuvaa polarisoituvuutta, kun kenttä on z -akselin suuntainen, ja toinen komponentti α_{\perp} kuvaa polarisoituvuutta, kun kenttä on z -akselia vastaan kohtisuorassa kulmassa. Jokaisen vakiokentän \mathbf{E}^P voi jakaa pitkittäiseen ja poikittaiseen komponenttiin

$$\mathbf{E}^P = \mathbf{E}_{\parallel}^P + \mathbf{E}_{\perp}^P \quad (3.41)$$

jolloin komponenttien vaikutukset \mathbf{E}_{\parallel}^s ja \mathbf{E}_{\perp}^s voi laskea erikseen ja summata lopulta keskenään. Sen vuoksi riittää tarkastella erikseen herättäviä kenttiä $E^P\mathbf{u}_z$ ja $E^P\mathbf{u}_x$. Pyörähdysymmetrian vuoksi poikittaisen kentän suunnan voi valita mielivaltaisesti xy -tasosta, mutta positiivisen x -akselin suunta on luonnollinen valinta.

Herättävän kentän oletetaan olevan aluksi pitkittäinen z -akselin suuntainen vakiokenttä \mathbf{E}_{\parallel}^P . Herättävässä kentässä ei ole φ -riippuvuutta, joten φ -riippuvuuden on puuttuttava myös sironneesta kentästä symmetriasyistä. Luvussa 2.4 esiteltiin yleistetty Laplacen operaattori:

$$\nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \nabla f) = \epsilon_{rr} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\epsilon_{\theta\theta}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Kun yhtälöön sijoitetaan

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

huomataan, että $\epsilon_{\varphi\varphi}$ ei vaikuta operaattoriin, eikä se siten vaikuta myöskään Laplacen yhtälön ratkaisuun. Riippumatta $\epsilon_{\varphi\varphi}$:n oikeasta arvosta voidaan siis olettaa $\epsilon_{\varphi\varphi} = \epsilon_{\theta\theta}$, jolloin kyseessä on RU-pallo, jota käsiteltiin jo luvussa 3.2. Systrooppisen pallon normalisoitu polarisoituvuus z -suunnassa on siis sama kuin RU-pallon yleinen polarisoituvuus

$$\alpha_{n,\parallel} = \alpha_{n,\text{RU}} = 3 \frac{\epsilon_{rr} + 2 - \sqrt{\epsilon_{rr}^2 + 8\epsilon_{rr}\epsilon_{\theta\theta}}}{\epsilon_{rr} - 4 - \sqrt{\epsilon_{rr}^2 + 8\epsilon_{rr}\epsilon_{\theta\theta}}} \quad (3.42)$$

Permittiivisyyden komponentin $\epsilon_{\varphi\varphi}$ voi havaita merkityksettömäksi myös suoremmin, käyttämättä yleistettyä Laplacen yhtälöä. Herätteen ollessa z -suuntainen pallon sisäkentällä ei ole lainkaan φ -komponenttia, eli $\mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}} = 0$, koska muutoin pyörähdysymmetria z -akselin suhteen rikkoutuisi. Polarisoituvuus on yhtälön

(2.66) nojalla

$$\begin{aligned}
p &= \int_V \epsilon_0 \left(\bar{\epsilon} - \bar{I} \right) \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}} dV \\
&= \int_V \epsilon_0 \left(\epsilon_{rr} \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r + \epsilon_{\theta\theta} \mathbf{u}_\theta \mathbf{u}_\theta + \epsilon_{\varphi\varphi} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi - \bar{I} \right) \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}} dV \\
&= \int_V \epsilon_0 \left(\epsilon_{rr} \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r + \epsilon_{\theta\theta} \mathbf{u}_\theta \mathbf{u}_\theta - \bar{I} \right) \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}} dV
\end{aligned}$$

Huomataan, että $\epsilon_{\varphi\varphi}$ katoaa polarisoiuvuuden yhtälöstä.

Seuraavaksi tarkastellaan poikittaissuuntaista polarisoiuvuutta $\alpha_{n,\perp}$. Tilanne on aikaisempaa mutkikkaampi, koska herättävällä kentällä on φ -riippuvuutta, minkä vuoksi edellä esitetty, Laplacen operaattorin viimeisen termin katoamiseen johtanut, argumentti ei ole enää voimassa, eikä RU-pallolle laskettua polarisoiuvuuden kaavaa voi hyödyntää sellaisenaan. Ratkaisun etsiminen aloitetaan, kuten RU-pallon tapauksessa, käyttämällä sopivaa yritettä. Kuten aikaisemmin yritteen on toteutettava rajapintaehdot tarkasteltavien kahden alueen välisellä rajapinnalla, sironneen kentän potentiaalin on mentävä nolnaan kaukana pallosta ja kentän on pysyttävä äärellisenä pallon sisällä. Kokeillaan seuraavaa yritettä:

$$\phi(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \overbrace{-E^p r \sin \theta \cos \varphi}^{\phi^p} + \sum_{2|(l-1)}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^{-l-1} P_l^1(\cos \theta) \cos \varphi, & r \geq a \\ \sum_{2|(l-\mu)}^{\infty} B_l \left(\frac{r}{a}\right)^{\lambda(l)} P_l^\mu(\cos \theta) \cos \varphi, & r \leq a \end{cases} \quad (3.43)$$

Summissa käytetty merkintä on tulkittava seuraavasti

$$\sum_{2|(l-\mu)}^{\infty} a_l = a_\mu + a_{\mu+2} + a_{\mu+4} + \dots \quad (3.44)$$

eli indeksi l saa arvot μ :stä äärettömään siten, että joka toinen luku jätetään väliin.

Yrite on muotoa (2.96), joten se on potentiaalinen ratkaisu. Yrite ei kuitenkaan ole yleisin mahdollinen, vaan se on erikoistapaus, joka toimii tutkittaessa sironnetaongelmaa. Ensimmäinen rajoitus, joka tehdään, seuraa reunaehdoista. Potentiaalinen on säilyttävä äärellisenä sirottajan sisällä. Legendren funktion $P_l^\mu(\cos \theta)$ arvo pysyy äärellisenä päätepisteissä $\cos \theta = \pm 1$, jos μ on epänegatiivinen kokonaisluku $\mu \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$. Funktion arvo voi kuitenkin myös kasvaa tai pienentyä rajatta lähellä toista päätepistettä, jos μ ei ole kokonaisluku. Jotta toinen reunaehdoista, eli potentiaalinen äärellisyys väliaineessa, olisi voimassa, on siis oletettava, että μ on epänegatiivinen kokonaisluku. Sen jälkeen yrite toteuttaa vaaditut reunaehdot.

Yritteestä on lisäksi jätetty pois osa termeistä, koska kaikkien termien ei katsota olevan ratkaisun kannalta olennaisia. Yritteessä tehtiin valinta $m = 1$ sekä pallon sisä- että ulkopuolella, jotta φ -riippuvuus olisi sama molemmissa alueissa. Kertoimet $A_{l < 1}$ ja $B_{l < \mu}$ ovat merkityksettömiä, koska summat alkavat joka tapauksessa vasta

l :n arvoista 1 ja μ , mikä johtuu seuraavasta Legendren funktioitten ominaisuudesta, joka on voimassa, kun l ja μ ovat kokonaislukuja:

$$P_l^\mu(\xi) = 0, \quad l < \mu \quad (3.45)$$

Yhtälön (3.45) havaitaan olevan voimassa tarkastelemalla Legendren liittofunktion lauseketta, joka on m :n ja l :n kokonaislukuarvoilla (2.90)

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi) \quad (3.46)$$

Lausekkeessa $P_l(\xi)$ on l :nnen asteen polynomi, joten derivoiminen useammin kuin l kertaa antaa tulokseksi nollan.

Yhtälön (3.43) summassa joka toinen termi hypätään yli. Termien jättäminen pois johtuu sirontaongelman peilisymmetriasta. Koska herättävän kentän suunnaksi valittiin \mathbf{u}_x , sirontaongelma on peilisymmetrinen xy -tason suhteen. Systrooppisen pallon kumpikaan napa ei siis ole erityisasemassa. Legendren liittofunktio $P_l^\mu(\xi)$ on kuitenkin pariton funktio, jos luku $l - \mu$ on positiivinen pariton kokonaisluku:

$$P_l^\mu(\xi) = (-1)^{l-\mu} P_l^\mu(-\xi) \quad (3.47)$$

Sen vuoksi on vaadittava, että $A_{2n+2} = 0$ ja $B_{2n+\mu+1} = 0$, jotta peilisymmetria säilyisi.

Kertoimien määrittämiseksi käytetään rajapintaehtoja, jotka ovat kuten edellä

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{\text{sisä}}(r, \theta, \varphi)|_{r=a} = \phi_{\text{ulko}}(r, \theta, \varphi)|_{r=a} \\ \epsilon_{rr} \frac{d\phi_{\text{sisä}}(r, \theta, \varphi)}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{d\phi_{\text{ulko}}(r, \theta, \varphi)}{dr} \Big|_{r=a} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Kun yhtälöihin sijoitetaan yrite, saadaan rajapintaehdot

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{2|(l-\mu)}^{\infty} B_l P_l^\mu(\xi) = -E^p P_1^1(\xi) + \sum_{2|(l-1)}^{\infty} A_l P_l^1(\xi) \\ \sum_{2|(l-\mu)}^{\infty} \epsilon_{rr} \lambda(l) B_l P_l^\mu(\xi) = -a E^p P_1^1(\xi) - \sum_{2|(l-1)}^{\infty} (l+1) A_l P_l^1(\xi) \end{array} \right. \quad (3.49)$$

missä siirryttiin käyttämään määritelmää $\xi = \cos \theta$.

Molempien yhtälöistä on toteuduttava kaikilla ξ :n arvoilla välillä $[-1, 1]$. Tunte-mattomia kertoimia on loputtomiin, mutta koska normalisoidun polarisoi-tuvuuden $\alpha_{n,\perp}$ määrittää pelkästään kerroin A_1 , kaikkia tuntemattomia kertoimia ei tarvitse ratkaista, vaan käytännössä riittää ratkaista muutama ensimmäinen kerroin sarjassa. Päätymätön sarja katkaistaan siten, että mukaan tulee vain N termiä, missä N on toistaiseksi mielivaltainen kokonaisluku.

3.3.2 Fourier'n menetelmä

Katkaistujen sarjojen kertoimet selvitetään käyttämällä Fourier'n menetelmää. Menetelmää varten on määriteltävä sisätulo testifunktion $g_n(\xi)$ ja testattavan funktion $f(\xi)$ välille:

$$\langle g_n(\xi), f(\xi) \rangle = \int_{-1}^1 g_n(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.50)$$

Jos kaksi funktiota $f_1(\xi)$ ja $f_2(\xi)$ ovat samat välillä $[-1, 1]$, ne antavat samat sisätulot kaikilla testifunktioilla $g_n(\xi)$:

$$\langle g_n(\xi), f_1(\xi) \rangle = \langle g_n(\xi), f_2(\xi) \rangle \quad (3.51)$$

Testifunktion käyttötarkoitus on siis kahden funktion yhtäsuuruuden tai erisuuruuden vahvistaminen likimäärin.

Testifunktioiden joukko $\{g_n\}$ on valittava siten, että testifunktioiden avulla voi tarkastella luotettavasti funktioiden samankaltaisuutta. Auttaa, jos tunnetaan joidakin funktioiden $f_{1/2}$ tärkeimpiä ominaisuuksia, koska silloin voidaan rajoittua tarkastelemaan pientä osaa kaikkien mahdollisten funktioiden vektoriavaruudesta. Testifunktioiden on viritettävä mahdollisimman hyvin se osa vektoriavaruudesta, johon funktiot $f_{1/2}$ saattavat kuulua, mutta suuremman avaruuden viritäminen on tarpeetonta.

Fourier'n menetelmää sovelletaan kerrointen A_l ja B_l selvittämiseen siten, että rajapintaehtoyhtälöitä (3.49) approksimoidaan yhtälöryhmällä

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle g_n(\xi), \phi_{\text{sisä}}(r, \theta, \varphi) \rangle \Big|_{r=a} = \langle g_n(\xi), \phi_{\text{ulko}}(r, \theta, \varphi) \rangle \Big|_{r=a} \\ \left\langle g_n(\xi), \epsilon_{rr} \frac{d\phi_{\text{sisä}}(r, \theta, \varphi)}{dr} \right\rangle \Big|_{r=a} = \left\langle g_n(\xi), \frac{d\phi_{\text{ulko}}(r, \theta, \varphi)}{dr} \right\rangle \Big|_{r=a} \end{array} \right. \quad (3.52)$$

3.3.3 Matriisiyhtälöt

Käytetään testifunktion ja Legendren funktion sisätulolle merkintää $\langle g_n, P_l^\mu \rangle = U_{n,l}^\mu$. Rajapintaehdot voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{2|(l-1)}^{2N-1} A_n U_{n,l}^1 - \sum_{2|(l-\mu)}^{2N-1} B_n U_{n,l}^\mu = E^P U_{n,1}^1 \\ - \sum_{2|(l-1)}^{2N-1} (l+1) A_l U_{n,l}^1 - \sum_{2|(l-\mu)}^{2N-1} \epsilon_{rr} \lambda(l) B_n U_{n,l}^\mu = a E^P U_{n,1}^1 \end{array} \right. \quad (3.53)$$

Edellä todettiin, että testifunktiojoukko g_n on valittava siten, että se viritää koko testattavien funktioiden avaruuden mutta ei sen suurempaa avaruutta. Testattavat funktiot ovat rajapintaehdoissa Legendren liittofunktioiden lineaarikombinaatioita, joten luonnollinen valinta testifunktioiksi ovat funktiot $g_n(\xi) = P_n^1(\xi)$. Testattavat funktiot ovat lisäksi kaikki parillisia, joten testaaminen parittomilla testifunktiolla on tarpeetonta. Erityisesti parittoman ja parillisen Legendren liittofunktion sisätulo on nolla

$$\langle P_l^m(\xi), P_{l'}^{m'}(\xi) \rangle = 0 \quad (3.54)$$

Testaaminen parittomalla Legendren liittofunktiolla yhtälöissä (3.49) tuottaa siis arvon 0 yhtälöitten molemmille puolille kertoimien A_l ja B_l arvoista riippumatta, jolloin testaamisesta ei ole hyötyä. Siksi riittääkin käyttää kantafunktioita g_{2n-1} . Kertoimille $U_{n,l}^1$ pystytään esittämään lauseke. Legendren funktioille pätee seuraava ortogonaalisuusehto

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\xi) P_l^m(\xi) d\xi = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,l} \quad (3.55)$$

kun n ja l ovat epänegatiivisia kokonaislukuja ja m on itseisarvoltaan molempia pienempi kokonaisluku $|m| < n, l$. Kertoimen arvoksi tulee siis

$$U_{n,l}^1 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \delta_{n,l} = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \delta_{n,l} \quad (3.56)$$

Yhtälöryhmän (3.53) voi kirjoittaa matriisiyhtälöksi, kun summissa esiintyvät tuntemattomat kertoimet kootaan vektoreiksi:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_3 \\ A_5 \\ \vdots \\ A_{2N-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_\mu \\ B_{\mu+2} \\ B_{\mu+4} \\ \vdots \\ B_{2N+\mu-1} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Tunnetuista sisätulojen arvoista muodostetaan seuraavat matriisit:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{L}}_{nl} = U_{2n-1,2l-1}^1 \\ \underline{\mathbf{M}}_{nl} = U_{2n-1,2l+\mu-2}^\mu \\ \underline{\mathbf{n}}_n = E^p U_{2n-1,1}^1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{L}}'_{nl} = -2l U_{2n-1,2l-1}^1 \\ \underline{\mathbf{M}}'_{nl} = \epsilon_{rr} \lambda(l) U_{2n-1,2l+\mu-2}^\mu \\ \underline{\mathbf{n}}'_n = a E^p U_{2n-1,1}^1 \end{cases} \quad (3.58)$$

Matriisit $\underline{\mathbf{L}}$ ja $\underline{\mathbf{M}}$ liittyvät potentiaalin jatkuvuutta kuvaavaan reunaehtoon. Matriisit $\underline{\mathbf{L}}'$ ja $\underline{\mathbf{M}}'$ puolestaan liittyvät sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuutta kuvaavaan reunaehtoon. Tuntemattomat kertoimet saa selville ratkaisemalla seuraavan matriisiyhtälön:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{L}} & -\underline{\mathbf{M}} \\ \underline{\mathbf{L}}' & -\underline{\mathbf{M}}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Ortogonaalisuusehdosta (3.55) seuraa, että matriisit $\underline{\mathbf{L}}$ ja $\underline{\mathbf{L}}'$ ovat diagonaalisia. Käyttämällä hyväksi diagonaalisuutta, matriisiyhtälöstä (3.59) pystytään hävittämään matriisit $\underline{\mathbf{L}}$ ja $\underline{\mathbf{L}}'$, jolloin saadaan suppeampi matriisiyhtälö kertoimille B_l :

$$(-\underline{\mathbf{M}} + \underline{\mathbf{\Lambda}} \underline{\mathbf{M}}') \mathbf{b} = \mathbf{n} - \underline{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{n}' \quad (3.60)$$

Diagonaalinen matriisi $\underline{\mathbf{\Lambda}}$ valittiin siten, että matriisien $\underline{\mathbf{L}}$ ja $\underline{\mathbf{L}}'$ diagonaalelementit kumoutuivat. Matriisin alkiot määritellään siis

$$\underline{\mathbf{\Lambda}}_{nn} = \frac{\underline{\mathbf{L}}_{nn}}{\underline{\mathbf{L}}'_{nn}} = -\frac{1}{2l} \quad (3.61)$$

Kun vektori \mathbf{b} tunnetaan, pystytään alkioit A_n laskemaan käyttämällä matriisiyhtälön (3.59) n :ttä riviä ja tunnettuja B_l :n arvoja:

$$\begin{aligned} A_n &= [\mathbf{M}_{n1} \dots \mathbf{M}_{nN}] \mathbf{b} + \mathbf{n}_n \\ &= \frac{2n+1}{2n(n+1)} \left[\sum_{2|(l-\mu)}^{2N-\mu-1} (B_l U_{n,l}^\mu) + \frac{4}{3} E^p \delta_{n,1} \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

Sirrotajan polarisoituvuutta kuvaa ainoastaan tuntematon kerroin A_1 , joka saadaan sievennetyistä kaavasta

$$A_1 = \frac{3}{4} \left(\sum_{l=0}^{N-1} B_{\mu+2l} U_{1,\mu+2l}^\mu \right) + E^p \quad (3.63)$$

Lopulta pystytään laskemaan normalisoitu polarisoituvuus $\alpha_{n,\perp}$. Dipoli on nyt x -akselin suuntainen, joten sen potentiaali on

$$\phi_d = \frac{\mathbf{p}_x \cdot \mathbf{u}_x}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \sin \theta \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.64)$$

Sironneessa kentässä on kaukana pallosta $r \gg a$ jäljellä ainoastaan ensimmäinen termi summasta (3.43):

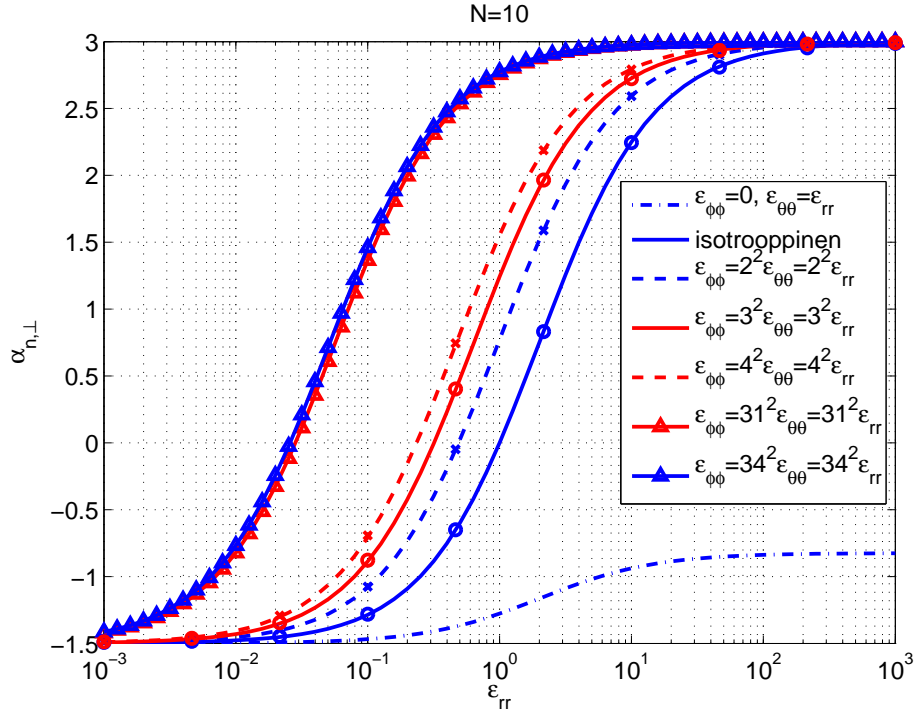
$$\phi^s \approx -A_1 \left(\frac{r}{a} \right)^{-2} \sin \theta \cos \varphi \quad (3.65)$$

Etsitään sellainen dipolimomentti, joka aiheuttaa pallon sironneen kentän suuruisen kaukokentän:

$$\begin{aligned} \phi_d &= \phi^s \\ \frac{p \sin \theta \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} &= -A_1 \left(\frac{r}{a} \right)^{-2} \sin \theta \cos \varphi, \quad \text{joten} \\ \alpha_{n,\perp} &= \frac{p/E^p}{\epsilon_0 V} = -\frac{4\pi a^2 A_1}{V E^p} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Koska polarisoituvuuslaskelmissa oletettiin, että arvo $\mu = (\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\theta\theta})^{1/2}$ on kokonaisluku, väliaineparametrien arvoja ei voi valita mielivaltaisesti, joten kuvaajia piirrettäessä on tyydyttävä muodostamaan diskreetti parvi, kuten kuvassa 3.7. Kuvasta huomataan, että polarisoituvuuden arvo kohoaa luvun μ kasvaessa. Tulos on ymmärrettävä siten, että pallon materiaalin sähköinen tiheys kasvaa väliaineparametrien $\epsilon_{\varphi\varphi}$ mukana. Alin kuvaaja osoittaa, että kun $\epsilon_{\varphi\varphi} = 0$, polarisoituvuus ei yllättäen enää suppene kohti raja-arvoa $\alpha_{n,\perp} = 3$ suurilla radiaalisen permittiivisyyden arvoilla, vaan raja-arvo on suunnilleen $\alpha_{n,\perp} \approx -0.82$.

COMSOL Multiphysicsin antamat tulokset poikkesivat tapauksessa $\epsilon_{\varphi\varphi} = 0$ merkittävästi puolianalyttisin menetelmin lasketuista, joten ne on selkeyden vuoksi jätetty pois kuvasta. Toisistaan huomattavasti poikkevat permittiivisyyden komponentit anisotrooppisessa väliaineessa ovat kuitenkin tunnetusti haastavia numeeristen ohjelmien kannalta, minkä vuoksi numeeristen tulosten poikkeaminen puolianalyttisistä ei kerro puolianalyttisten tulosten virheellisyydestä. COMSOLilla

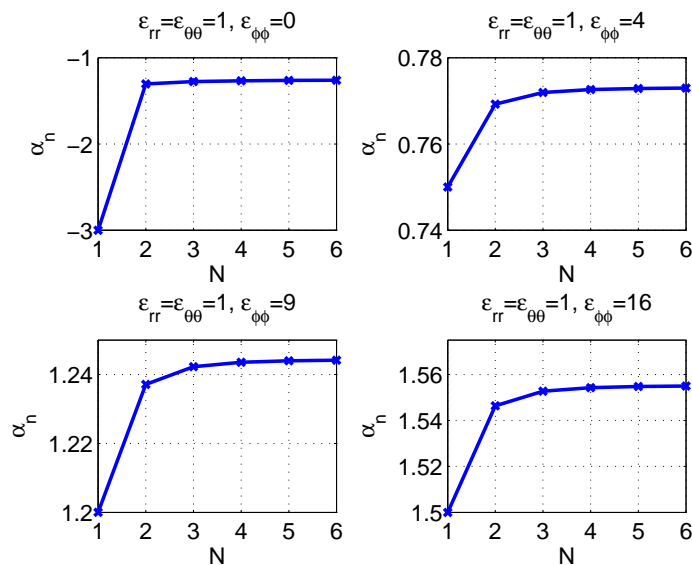


Kuva 3.7: Systrooppisen pallon normalisoitu polarisoituvuus. Kuvassa yhtenäinen viiva ja katkoviiva kuvaavat kaavan (3.66) avulla laskettuja tuloksia. Pallot ja ristit sen sijaan kuvaavat COMSOL-ohjelmalla laskettuja vertailutuloksia. Tilanteen $\epsilon_{\varphi\varphi} = 0$ pystyy käsittelemään luotettavasti ainoastaan puolianalyttisin menetelmin, minkä vuoksi vertailutuloksia ei laskettu. Kolmioin merkityt kuvaajat havainnollistavat polarisoituvuutta tilanteessa, jossa systrooppisuussuhde $\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\theta\theta}$ on suuri.

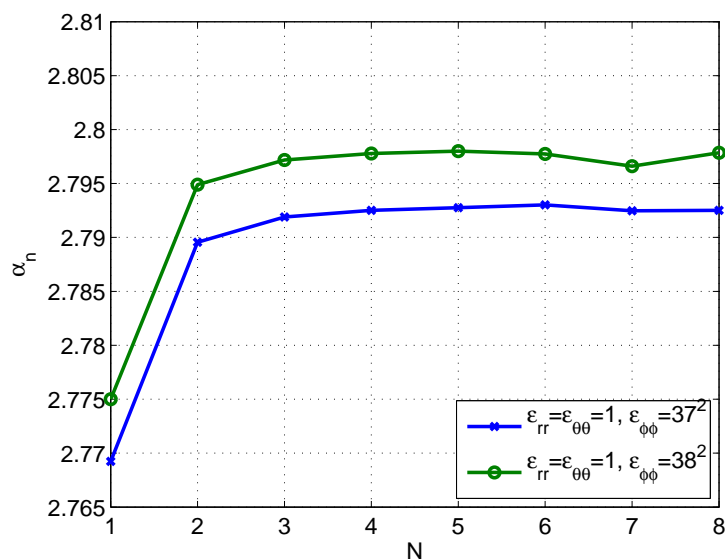
laskettujen tulosten luotettavuutta arvioidaan tarkemmin luvussa 3.5.3, jossa havaitaan huomattava ero RU-pallon polarisoituvuudelle laskettujen analyttisten ja numeeristen tulosten välillä.

Luottamusta puolianalyttisin menetelmin laskettuihin tuloksiin lisää se, että kasvatettaessa ratkaistavan matriisiyhtälön kokoa tulokset näyttävät konvergoituvan kohti raja-arvoa, kuten kuvassa 3.8. Tarkkuus näyttää paranevan, kun yhtälöissä (3.49) otetaan mukaan lisää termejä. Jos summat katkaistaan siten, että kussakin summassa on N termiä, ratkaistavan matriisiyhtälön (3.59) matriisi on kooltaan $2N \times 2N$. Konvergoitumista havainnollistavien kuvaajien perusteella pelkän dipolitermin huomioiminen antaa normalisoidulle polarisoituvuudelle approksimaation, jonka suhteellinen virhe $|\alpha_{n,\text{approx}} - \alpha_n|/|\alpha_n|$ on alle $1/10$, paitsi äärimmäisessä tapauksessa $\epsilon_{\varphi\varphi} = 0$. Toisaalta myös äärimmäisen systrooppisessa tapauksessa tulokset konvergoituvat raja-arvoa kohti, eikä tulos muutu huomattavasti sen jälkeen, kun kvadrupolitermi $\phi_{\text{quad}} \sim |r|^{-3}$ on otettu mukaan yritteessä (3.43).

Raja-tapaus, jossa systrooppisuussuhde $\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\theta\theta}$ on hyvin pieni, eli $\mu = 0$, oli puolianalyttisen menetelmän kannalta ongelmaton. Rajatapaus, jossa systrooppisuussuhde kasvaa erityisen suureksi, havaittiin hieman mutkikkaammaksi, eikä täysin yksikäsitteiseen ratkaisuun päästy. Laskettaessa polarisoituvuuden kuvaajat ar-



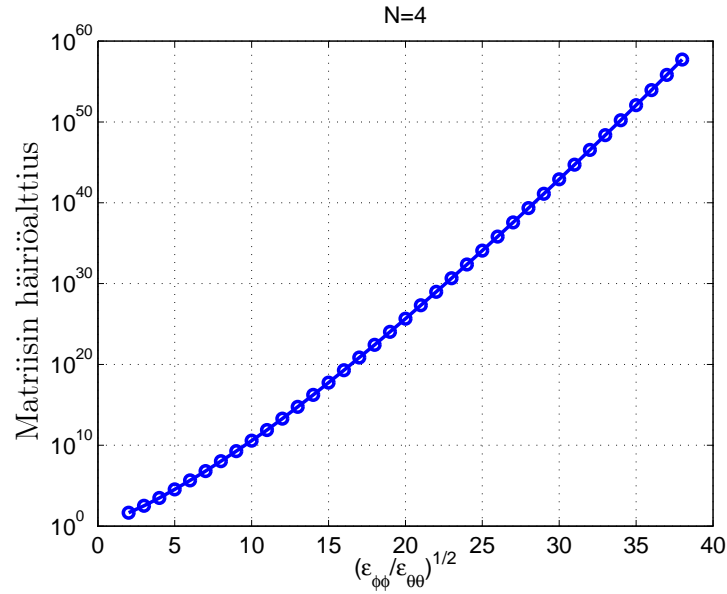
Kuva 3.8: Puolianalyttisten tulosten konvergoituminen matriisikoon $2N \times 2N$ kasvaessa.



Kuva 3.9: Puolianalyttiset tulokset tilanteessa, jossa systrooppisuussuhde $\epsilon_{\phi\phi}/\epsilon_{\theta\theta}$ on suuri. Matriisiyhtälöä ratkaistaessa numeerinen virhe korostuu, mikä aiheuttaa sen, että tulokset eivät konvergoitu, kun matriisin koko $2N \times 2N$ kasvaa.

voilla $\mu = 31$ ja $\mu = 34$ havaitaan kuitenkin, että muutos kuvaajissa on jo varsin pieni, kuten kuvassa 3.7. Polarisoituvuuden laskeminen tätä suuremmilla μ :n arvoilla johtaisi numeerisiin ongelmiin, mikä näkyy kuvassa 3.8 siten, että tulokset eivät konvergoitu raja-arvoa kohti. Konvergoituvuuden puuttumisen kuvassa 3.8 selittää käännettävän matriisin suuri häiriöalttius, jonka kasvamista μ :n funktiona havain-

nollistaa kuva 3.10.



Kuva 3.10: Matriisin häiriöalttius systrooppisuussuhteen neliöjuuren $\mu = (\epsilon_{\varphi\varphi}/\epsilon_{\theta\theta})^{1/2}$ muuttuessa. Matriisin koko on 8×8 . Häiriöalttius kasvaa jyrkästi systrooppisuussuhteen kasvaessa.

3.4 Yleisesti systrooppinen pallo

Luvussa 3.3 johdettiin kaava pallon kahdelle eri normalisoidulle polarisoituvuudelle $\alpha_{n,\parallel}$ ja $\alpha_{n,\perp}$. Polarisoituvuus $\alpha_{n,\parallel}$ pystyttiin laskemaan tarkasti. Myös polarisoituvuudelle $\alpha_{n,\perp}$ saatu ratkaisu olisi periaatteessa tarkka, jos yritteen (3.43) sarjoja ei olisi tarpeen katkaista, vaan ne voisivat jatkua äärettömiin. Silloin olisi toisaalta tarpeen ratkaista loputon määrä tuntemattomia, mikä ei ole mahdollista. Käytännössä on tyydyttävä laskemaan riittävän hyvä likiarvo polarisoituvuudelle.

Sen lisäksi, että oli tarpeen approksimoida polarisoituvuutta yksinkertaistamalla yritettä, luvussa 3.3 tehtiin olettaus, että yritteen Legendren funktioiden kertaluku μ on positiivinen kokonaisluku. Olettaus oli tehtävä, jotta yritteen termit säilyisivät äärellisinä koko tarkasteluvälillä $[-1, 1]$. Arvo μ määriteltiin kuitenkin

$$\mu = \sqrt{\frac{\epsilon_{\varphi\varphi}}{\epsilon_{\theta\theta}}}$$

Havaitaan, että fysikaalisten suureitten $\epsilon_{\varphi\varphi}$ ja $\epsilon_{\theta\theta}$ kannalta olettaus $\mu \in \mathbb{N}$ on täysin mielivaltainen, koska ei ole mitään periaatteellista syytä, minkä vuoksi permittiivisyyden komponenttien suhteen pitäisi olla kokonaisluvun neliö. Sen vuoksi on mielekästä pohtia, kuinka yleistyksen $\mu \in \mathbb{R}$ tekeminen muuttaa ongelman matemaattista luonnetta.

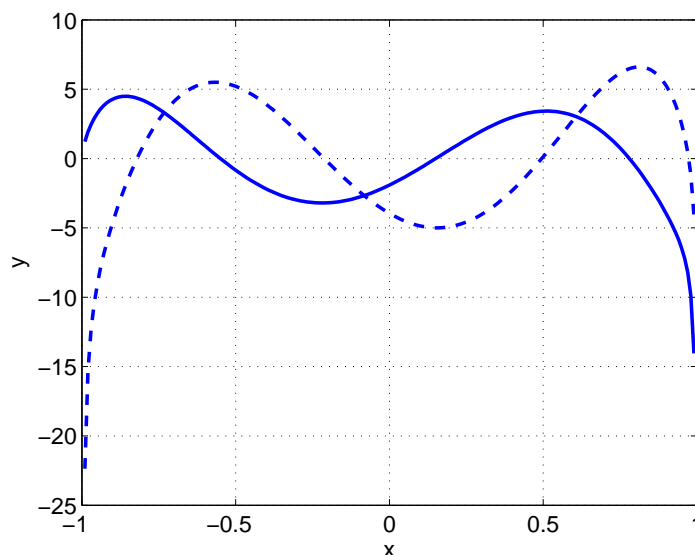
Kuva 3.11 havainnollistaa ongelmaa, joka tulee vastaan, jos $\mu = 2^{1/2}$. Legendren funktiot $P_4^{\sqrt{2}}(\xi)$ ja $Q_4^{\sqrt{2}}(\xi)$ eivät säily äärellisinä koko välillä $[-1, 1]$, vaan $Q_4^{\sqrt{2}}(\xi)$ pienenee rajatta lähellä arvoa $\xi = -1$ ja molemmat funktiot pienenevät rajatta lähellä arvoa $\xi = 1$. Jos yritetään (3.43) jokainen pallon sisäkenttää kuvaavista termeistä kasvaa tai pienenee rajatta, potentiaali ei pysy äärellisenä, jolloin ratkaisu ei kuvaa todellista fysikaalista tilannetta. Toisaalta jo yhden termin hajaantumisen aiheuttaa laskennallisia ongelmia, kun kertoimet yritetään määrittää Fouriermenetelmällä, koska sisätulot (3.50) ovat äärettömyyksiä, jos kanta- ja testifunktiot ovat samat, $f_n(\xi) = g_n(\xi)$.

Kertaluvun μ pienikin poikkeama kokonaislukuarvosta muuttaa ongelman määrittämisen luonteen täysin, vaikka pallon ominaisuudet säilyvät lähestulkoon ennallaan eikä sironnassa tapahdu suurta muutosta. Luvussa 3.3 esiteltyä menetelmää, joka toimi säännöllisesti systrooppisen pallon tapauksessa, ei voi käyttää sellaiseen, jos tavoitteena on ratkaista yleisesti systrooppinen tilanne.

3.5 Valmisohjelmalla lasketut tulokset

3.5.1 Momenttimenetelmä ja elementtimenetelmä

Sirontaongelman ratkaiseminen numeerisin menetelmin on yksi tapa tarkastella saatujen tulosten luotettavuutta ja laskea tuloksia yleistetyssä tapauksessa, jossa μ ei välttämättä ole kokonaisluku. Sähkömagneetiikan ongelmien ratkaisemisessa paljon käytettyjä menetelmiä ovat aika-alueen differenssimenetelmä (FDTD), reunaelementtimenetelmä (BEM) ja elementtimenetelmä (FEM). Elementtimenetelmän etuna on sen soveltuvuus erityyppisten fysikaalisten ongelmien ratkaisemiseen. Mene-



Kuva 3.11: Legendren funktiot $P_4^{\sqrt{2}}(\xi)$ (yhtenäinen viiva) ja $Q_4^{\sqrt{2}}(\xi)$ (katkoviiva). Funktioitten arvot eivät säily äärellisenä molemmissa päätepisteissä.

telmä kehitettiin alun perin rakennesuunnittelua varten, mutta sen sovellusalueen havaittiin pian olevan huomattavan laaja (Bathe & Wilson, 1976). Menetelmän varhaisia kehittäjiä olivat Turner et al. (1956) ja Argyris & Kelsey (1960). Termin ”finite element” otti käyttöön Clough vuonna 1960 artikkelissaan ”The Finite Element Method in Plane Stress Analysis” (Bathe & Wilson, 1976).

Kun sähkömagneetiikan ongelma ratkaistaan elementtimenetelmän avulla, ongelma muotoillaan ensin siten, että kyseessä on matemaattiselta kannalta tarkasteltuna reuna-arvo-ongelma (Jin, 2002). Reuna-arvo-ongelmassa yritetään siis löytää funktio ϕ , joka toteuttaa yhtälön

$$\mathcal{L}\{\phi\} = \rho \quad (3.67)$$

alueessa V ja jonkin reunaehdon tarkasteltavan alueen reunalla ∂V . Yllä \mathcal{L} on jokin differentiaali- tai integraalioperaatio ja ρ tunnettu funktio. Sähköstatiikassa operaattoriksi voidaan valita $\mathcal{L} = \nabla^2$, jolloin ρ on verrannollinen alueen lähdevaraustihyteen.

Yleinen tapa ratkaista reuna-arvo-ongelma on niin kutsuttu momenttimenetelmä. Momenttimenetelmä muistuttaa pitkälti Fourier’n menetelmää, joka esiteltiin luvussa 3.3.2. Myös momenttimenetelmässä muodostetaan sisätulojen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ avulla matriisiyhtälö, josta ratkaistaan tuntemattomat kertoimet. Sisätulo määritellään hieman eri tavalla kuin luvussa 3.3.2. Integroimisoperaatio suoritetaan nyt välin $[-1, 1]$ sijasta tarkastelualueessa V :

$$\langle f, g \rangle = \int_V fg \, dV \quad (3.68)$$

Kun valitaan joukko testifunktioita $\{w_i\}$, voidaan yhtälöstä (3.67) muodostaa niin kutsuttu heikko muoto ottamalla sisätulot yhtälön molemmin puolin:

$$\langle w_i, \mathcal{L}\{\phi\} \rangle = \langle w_i, \rho \rangle \quad (3.69)$$

Tuntematonta funktiota ϕ approksimoidaan käyttämällä painotettua summaa

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{i=1}^N \phi_i \nu_i = \{\nu_i\}^T \{\phi_i\} \quad (3.70)$$

missä $\{\nu_i\}$ ja $\{\phi_i\}$ ovat alkioista ν_i ja ϕ_i koostuvia pystyvektoreita. Sijoittamalla yhtälöön (3.69) saadaan likimääräinen yhtälö

$$\langle w_i, \mathcal{L}\hat{\phi} \rangle = \sum_{j=1}^N \phi_j \langle w_i, \mathcal{L}\nu_j \rangle \approx \langle w_i, \rho \rangle \quad (3.71)$$

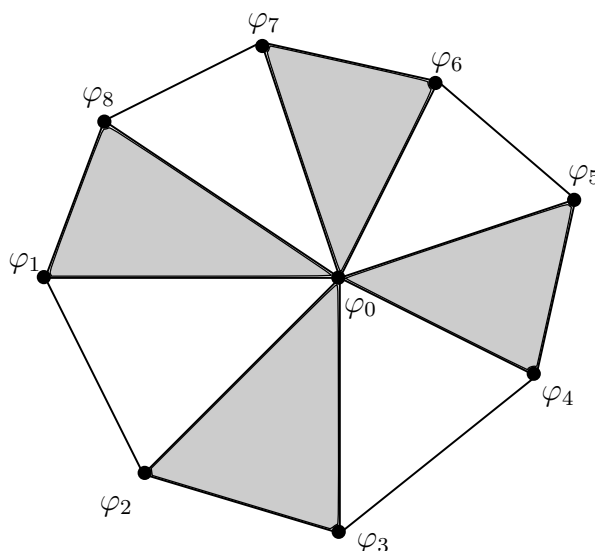
jonka voi esittää matriisimuodossa seuraavasti

$$\underline{\mathbf{A}}\{\phi_i\} = \mathbf{b} \quad (3.72)$$

missä systeemimatriisin $\underline{\mathbf{A}}$ ja herätevektorin \mathbf{b} alkiot määritellään

$$A_{ij} = \langle w_i, \mathcal{L}\nu_j \rangle \quad (3.73)$$

$$b_i = \langle w_i, \rho \rangle \quad (3.74)$$



Kuva 3.12: Elementtimenetelmän verkko. Elementtimenetelmässä tarkastelualue V jaetaan pieniin osajoukkoihin, joita kutsutaan elementeiksi. Kuvassa elementit liittyvät solmupisteeseen φ_0 . Solmupisteeseen φ_0 liittyvä kantafunktio ν_o valitaan siten, että funktio saa nollasta poikkeavia arvoja ainoastaan solmupistettä φ_0 ympäröivien elementtien sisällä. (Humphries, 1997.)

Elementtimenetelmässä tutkittava alue V diskretoidaan valitsemalla joukko solmupisteitä, minkä jälkeen tutkittava alue jaetaan pieniin osiin, jotka liittyvät solmupisteissä toisiinsa. Määriteltyjä tarkastelualueen palasia kutsutaan elementeiksi. Differentiaaliyhtälön voi ratkaista esimerkiksi käyttämällä niin kutsuttua Galerkinin menetelmää, eli momenttimenetelmää, jossa kantafunktiot ja testifunktiot ovat samat, eli $w_i = \nu_i$. Kanta- ja testifunktiot valitaan siten, että tiettyä solmupistettä vastaavan kantafunktion arvo on nollasta poikkeava solmupistettä ympäröivien elementtien sisällä, ja muualla funktion arvo on nolla. Kyseessä on ratkaiseva ero sellaiseen momenttimenetelmään nähden, jossa käytetään koko alueen kantafunktioita. Elementtimenetelmää voi siis pitää momenttimenetelmän erikoistapauksena, jossa kantafunktiot ja testifunktiot kantajat ovat solmupisteisiin liittyvien elementtien ryhmiä.

Elementtimenetelmässä käytettävää solmupisteitten ja elementtien joukkoa kutsutaan laskentaverkoksi. Laskentaverkot koostuvat yksinkertaisimmillaan kolmiopyramidin muotoisista elementeistä, joitten sisällä kanta- ja testifunktiot ovat lineaarisia funktioita (Humphries, 1997). Silloin momenttimenetelmä antaa ratkaisuksi paloittain lineaarisen funktion. Laskentaverkon on oltava riittävän tiheä, jotta se kuvaisi tutkittavaa rakennetta tarkasti. Elementtimenetelmän etuna onkin se, että riittävän tarkan laskentaverkon avulla pystytään kuvaamaan hyvin monimutkaisia rakenteita. Suuren laskentaverkon käyttäminen vaatii kuitenkin paljon laskentatehoa, mikä lienee suurin syy siihen, että menetelmä kehitettiin vasta tietokoneitten aikakaudella (Bathe & Wilson, 1976).

3.5.2 COMSOL Multiphysics

Fysikaalisissa malleissa esiintyvien osittaisdifferentiaaliyhtälöitten numeerinen ratkaiseminen on siinä määrin yleinen ongelma, että tarkoitusta varten on kehitetty kaupallisia valmisohjelmia. Yksi sähköstatiikan sirontaongelman ratkaisemiseen soveltuva kaupallinen valmisohjelma on COMSOL Multiphysics. Seuraavaksi kuvailaan lyhyesti ohjelman ominaisuuksia.

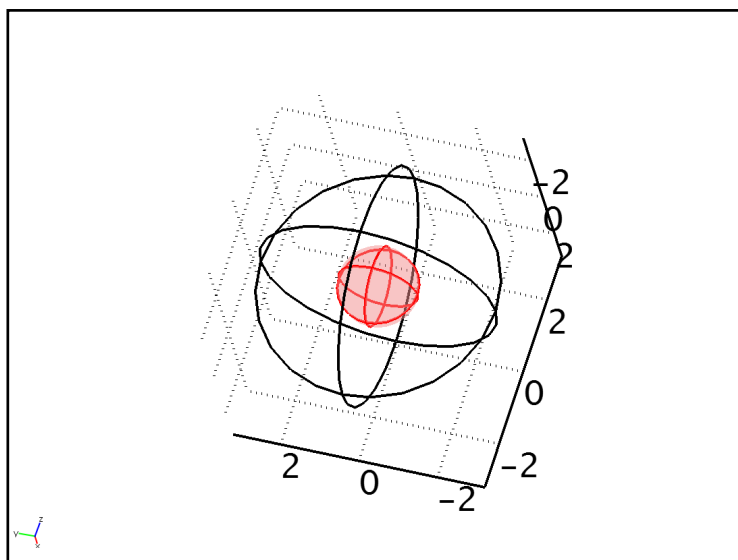
COMSOL Multiphysics sai alkunsa Germund Dahlquistin johtamasta projektista Ruotsin KTH:ssa (Kungliga Tekniska högskolan). Dahlquist kannusti muutamaa oppilastaan perustamaan ohjelmistoyrityksen, jonka nimeksi tuli Comsol. Yritys loi ensin Dahlquistin ohjelmalistausten pohjalta numeerisen osittaisdifferentiaaliyhtälöratkaisijan Matlab-ohjelmaan (SIAM, 2005). Yrityksen merkittävimmäksi tuotteeksi vakiintui pian COMSOL Multiphysics, joka tunnettiin ennen versiota 3.2 nimellä FEMLAB (Comsol, 2010). COMSOL Multiphysics ratkaisee osittaisdifferentiaaliyhtälöitä elementtimenetelmän avulla. COMSOLin etuna on se, että ohjelma pystyy ratkaisemaan samanaikaisesti useita toisiinsa kytkettyjä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, minkä vuoksi ohjelmalla on mahdollista yhdistää keskenään eri fysikaalisia malleja, kuten lämmönvirtausmalli ja sähkömagneetiikan malli. Ohjelman lisänimi ”Multiphysics” kuvaa tätä ominaisuutta.

Sähköstatiikan sirontaongelman kannalta tärkeämpi COMSOLin ominaisuus on sen liitettävyyden Matlabin kanssa. Matlab on matriisien avulla tapahtuvaa numeerista laskentaa varten tarkoitettu ohjelma, jota ohjelmoidaan samannimisen ohjelmointikielen avulla. COMSOLia pystyi ennen versiota 3.5a ohjelmoimaan käyttämällä skriptikieltä, joka oli hyvin samankaltainen Matlab-kielen kanssa (Nilsson, 2008). COMSOLin oman skriptikielen ja Matlab-kielen samankaltaisuus teki ohjelmien välisestä vuorovaikutuksesta yksinkertaista. Skriptikielestä kuitenkin luovuttiin, eikä se ole käytössä COMSOLissa versiosta 3.5a eteenpäin. Ohjelmat pystytään kuitenkin yhä yhdistämään toisiinsa siten, että COMSOL-mallin luominen ja analysoiminen onnistuu Matlabista käsin. COMSOLin käyttäminen Matlabin avulla nopeuttaa huomattavasti sähkömagneettisen mallin kanssa työskentelemistä, koska monia työvaiheita on mahdollista automatisoida.

Työssä käytettiin COMSOL Multiphysicsin versiota 3.5a ja Matlabin 64-bittistä versiota R2009B. Tarkoituksena oli laskea numeerisesti vertailutuloksia puolianalyttisin menetelmin saaduille tuloksille ja laskea numeerisesti tulokset, joitten laskeminen puolianalyttisesti ei onnistunut. Työvaiheet olivat seuraavat:

- Geometrian luominen
- Reunaehtojen määrittäminen
- Verkon luominen
- Yhtälön ratkaiseminen
- Tulosten analysoiminen
- Tulosten havainnollistaminen

Viisi ensimmäistä työvaihetta tapahtuivat COMSOL ohjelman avulla. Tulosten havainnollistaminen piirtämällä kuvaajat polarisoituvuudesta permittiivisyyden funktiona tapahtui Matlab-ohjelmalla. Matlab-ohjelmaa käytettiin myös helpottamaan useitten peräkkäisten tulosten laskemista, kun sama sironta ongelma haluttiin ratkaista useilla eri permittiivisyyden arvoilla.



Kuva 3.13: COMSOL-mallissa käytetty geometria. Sisempi pallo on tutkittavana oleva dielektrinen sirottaja. Ulompi pallo on epäfysikaalinen objekti, jonka pinnalla kiinnitetään mallissa käytettävät reunaehdot. Reunaehto- jen kiinnittäminen ulomman pallon pinnalla virittää samalla sirontaongelman herättävän kentän.

Työskentely COMSOL Multiphysics -ohjelman kanssa aloitetaan valitsemalla ratkaistavaan ongelmaan sopiva moduuli. Moduuli on ohjelman sisäinen työkalu, joka erikoistuu tietyn tyyppisen fysikaalisen ongelman ratkaisemiseen. COMSOL Multiphysics -ohjelman ratkaisema osittaisdifferentiaaliyhtälö on muotoa

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + au = f \quad (3.75)$$

Sähköstatiikassa käytetään yleisen yhtälön (3.75) erikoistapausta, jossa jäljellä ovat ainoastaan kertoimet $c = \epsilon_0 \bar{\epsilon}$ ja $f = \rho$. Sähköstatiikkamoduulin saa COMSOLissa käyttöön, kun Model Navigator -dialogissa valitaan ”3D” alaseto- valikosta ”Space dimension”, minkä jälkeen valitaan ”Electrostatics” kohdasta ”Application Modes – AC/CD Module – Statics, Electric”. Kun sähköstatiikkamoduuli on valittu, ohjelma osaa ratkaista oikean yhtälön. (COMSOL, 2008.)

Geometrian luominen on ensimmäinen askel ratkaistaessa sähköstaattista siron-
taongelmaa COMSOL Multiphysics -ohjelmalla. Sironaongelman numeerisen mallin
geometrian luominen tapahtui COMSOLin graafisen käyttöliittymän avulla. Geo-
metria koostuu kahdesta sisäkkäisestä pallosta, kuten kuvassa 3.13. Ulompi pal-
lo määrittelee diskretoitavan alueen reunan. Osittaisdifferentiaaliyhtälö ratkaistaan
siis ainoastaan ulomman pallon sisäpuolisessa avaruudessa. Ulomman pallon pinnal-
la reunaehdot määritellään siten, että saadaan aikaan oikean suuruinen herätekenttä
 \mathbf{E}^p . Kyseessä on siis numeerista mallia varten tarvittava apuväline. Pallo piirretään
COMSOLissa valitsemalla kohta ”Draw – Sphere”. Pallon keskipisteeksi valittiin origo
ja säteeksi $R = 3$. Ulommasta pallosta poiketen sisempi pallo kuvaa todellista
fysikaalista kappaletta. Sisempi pallo on sirottaja, jonka ominaisuuksia tutkitaan.
Molemmat pallot luodaan COMSOLissa samalla tavalla. Simulaatioita varten valittiin
piirtodialogissa pallon säteeksi $a = 1$. Kun COMSOL-malliin on lisätty kaksi
sisäkkäistä palloa, mallin geometria on määriteltä.

Jotta ohjelma osaisi laskea sirottajan polarisoituvuuden, on määriteltävä sirottajan
väliaineparametrit. Systropia määriteltiin luvussa 2.4 siten, että pallokoordinaa-
tistossa permittiivisyyden komponentit ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$ ja $\epsilon_{\varphi\varphi}$ ovat vakiot. COMSOL Multi-
physics -ohjelmassa permittiivisyys on kuitenkin esitettävä karteesisessä eikä pallo-
koordinaatistossa. Siirtyminen pallokoordinaatistosta karteesiseseen koordinaatit-
oon tapahtuu esittämällä pallokoordinaatiston kantavektorit \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_θ ja \mathbf{u}_φ karteesisen
koordinaatiston kantavektoreitten \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y ja \mathbf{u}_z avulla. Karteesinen koordinaatisto
on ortonormaalin, joten muunnos tapahtuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_r &= (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_x + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_y + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_z \\ &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z\end{aligned}\quad (3.76)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\theta &= (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_\theta)\mathbf{u}_x + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_\theta)\mathbf{u}_y + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_\theta)\mathbf{u}_z \\ &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y - \sin \theta \mathbf{u}_z\end{aligned}\quad (3.77)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\varphi &= (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_\varphi)\mathbf{u}_x + (\mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_\varphi)\mathbf{u}_y + (\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_\varphi)\mathbf{u}_z \\ &= -\sin \varphi \mathbf{u}_x + \cos \varphi \mathbf{u}_y\end{aligned}\quad (3.78)$$

Sijoittamalla muunnos (3.76)–(3.78) permittiivisyyden yhtälöön (2.68) saadaan sys-
trooppinen permittiivisyys karteesisessä koordinaatistossa

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon} &= \epsilon_{rr} \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r + \epsilon_{\theta\theta} \mathbf{u}_\theta \mathbf{u}_\theta + \epsilon_{\varphi\varphi} \mathbf{u}_\varphi \mathbf{u}_\varphi \\ &= (\epsilon_{rr} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \epsilon_{\theta\theta} \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \epsilon_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi) \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \\ &\quad (\epsilon_{rr} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \epsilon_{\theta\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \epsilon_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi) \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y + \\ &\quad (\epsilon_{rr} \cos^2 \theta + \epsilon_{\theta\theta} \sin^2 \theta) \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + \\ &\quad \cos \varphi \sin \varphi (\epsilon_{rr} \sin^2 \theta + \epsilon_{\theta\theta} \cos^2 \theta - \epsilon_{\varphi\varphi}) (\mathbf{u}_x \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_y \mathbf{u}_x) + \\ &\quad \cos \theta \sin \theta \cos \varphi (\epsilon_{rr} - \epsilon_{\theta\theta}) (\mathbf{u}_x \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_z \mathbf{u}_x) + \\ &\quad \cos \theta \sin \theta \sin \varphi (\epsilon_{rr} - \epsilon_{\theta\theta}) (\mathbf{u}_y \mathbf{u}_z + \mathbf{u}_z \mathbf{u}_y)\end{aligned}\quad (3.79)$$

Karteesisessä koordinaatistossa ilmaistu permittiivisyys asetetaan COMSOLiin koh-
dasta ”Physics – Subdomain Settings”. Kehyksessä ”Material properties and sources”
valitaan yhtälön (3.79) mukainen suhteellinen permittiivisyys $\bar{\epsilon}$ kohtaan ”Relative

permittivity”. Anisotrooppisuuden luokaksi valitaan alavetovalikosta ”Symmetric”. Varaustiheydeksi valitaan $\varrho = 0$. Permittiivisyyden määrittäminen sirottajan ulkopuolella tapahtuu vastaavalla tavalla, mutta isotrooppisuuden vuoksi yhden parametrin määrittäminen riittää, toisin kuin anisotrooppisen väliaineen tapauksessa. Yhtälössä (3.79) on yhä jäljellä pallokoordinaatiston muuttujat r , θ ja φ . Muuttujat pystytään ilmaisemaan karteesisissa koordinaatistossa seuraavasti

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctan(y, x) \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \end{cases} \quad (3.80)$$

Yhtälöt voi kirjoittaa COMSOLissa esimerkiksi kohtaan ”Options – Expressions – Scalar Expressions”. Kulma φ määräytyy yksikäsitteisesti koordinaateista y ja x , kun käytetään COMSOLin sisäänrakennettua funktiota *atan2*. Funktiota, joka kertoo xy tason pisteen kulman φ polaarikoordinaatistossa (ρ, φ) , merkitään yhtälöryhmässä (3.80) $\arctan(y, x)$. Kun sirottajan geometria ja permittiivisyys on määritelty, valmisohjelmalle on annettu kaikki fysiikan kannalta olennainen tieto ratkaistavasta ongelmasta.

Jotta COMSOL osaisi laskea sirottajan polarisoituvuuden, on asetettava sopiva herätekenttä, minkä jälkeen polarisoituvuus voidaan määritellä ratkaisemalla sähkökenttä sirottajan sisällä ja integroimalla, kuten kaavassa (2.66):

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV = \int_V (\bar{\epsilon}_i - \epsilon_e \bar{I}) \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}}$$

Herätekenttä saadaan aikaan valitsemalla sopivat reunaehdot ulomman pallon pinnalla. Reunaehdoksi päätettiin valita yhtälö

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \bar{\epsilon} \frac{\phi_{\text{ref}} - \phi}{d} \quad (3.81)$$

Yhtälön pystyy ottamaan käyttöön kohdasta ”Physics – Boundary Settings” valitsemalla ”Boundary condition”-alavetovalikosta kohdan ”Distributed capacitance”. Kun sähkövuontiheys esitetään potentiaalin avulla, $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot \epsilon_0 \bar{\epsilon} \cdot \nabla \phi$, havaitaan, että seuraava differentiaaliyhtälö sähköpotentiaalille

$$\nabla_{\mathbf{n}} \phi = \frac{\phi_{\text{ref}} - \phi}{d} \quad (3.82)$$

on yhtäpitävä yhtälön (3.81) kanssa.

Tavoitteena on löytää oikeat parametrit ϕ_{ref} ja d reunaehtoyhtälöön (3.82). Reunaehtojohto mukaillee Henrik Kettusen (2006) diplomityössä esitettyä. Potentiaalia pallon ulkopuolella pystytään approksimoimaan esittämällä se herättävän kentän ja dipolikentän summana. Sironnut kenttä muistuttaa dipolikenttää tarpeeksi kaukana sirottajasta, joten approksimaatio $\phi^s \approx \phi_d$ on voimassa. Kun herätteenä on x -suuntainen kenttä, herätekentän potentiaali on

$$\phi^p = -\mathbf{r} \cdot (E^p \mathbf{u}_x) = -E^p r \sin \theta \cos \varphi \quad (3.83)$$

Dipolikentän potentiaali on kaavan (2.65) mukaisesti

$$\phi_d = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \sin \theta \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dipolimomenttia \mathbf{p} ei aluksi tunneta, mutta osoittautuu, että dipolimomentin tunteminen etukäteen ei ole tarpeen. Yhtälön (3.82) parametrit saadaan selville muodostamalla lauseke potentiaalin ϕ normaaliderivaatalle:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{n}}\phi &= \frac{\partial(\phi^p + \phi_d)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-E^p r + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \sin \theta \cos \varphi \\ &= -E^p - 2\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \varphi \\ &= \frac{1}{r} \left(-E^p r - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \sin \theta \cos \varphi \\ &= \frac{1}{r} \left(2E^p r - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - 3E^p \right) \sin \theta \cos \varphi \\ &= -\frac{2}{r} \left(-E^p r \sin \theta \cos \varphi + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \cos \varphi \right) - 3E^p \sin \theta \cos \varphi \\ &= -\frac{2}{r} (\phi^p + \phi_d) - 3E^p \frac{x}{r} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Yllä käytettiin pallokoordinaatiston ja karteesisen koordinaatiston välistä yhteyttä

$$\frac{x}{r} = \sin \theta \cos \varphi \quad (3.85)$$

Ulomman pallon pinnalla pätee $r = R$, joten lopullinen reunaehto on

$$\nabla_{\mathbf{n}}\phi = \frac{\phi_{\text{ref}} - \phi}{d} = \frac{-1.5E^p x - \phi}{R/2} \quad (3.86)$$

mistä saadaan parametrien arvoiksi

$$\begin{cases} \phi_{\text{ref}} = -1.5E^p x \\ d = R/2 \end{cases} \quad (3.87)$$

Sopivat reunaehdot saatiin siis olettamalla vastekentän muistuttavan dipolin kenttää $\phi^s \approx \phi_d$ laskenta-alueen reunalla. Oletamus pitää paikkansa tarkimmin kaukana sirottavasta kappaleesta. Toisaalta reunan siirtäminen kauas sirottajasta kasvattaa samalla laskentaverkon kokoa, mikä lisää tarvittavaa laskenta-aikaa. Laskenta-alueen reuna on siis valittava siten, että vastekenttä muistuttaa riittävän paljon dipolikenttää, mutta laskentaverkko ei paisu liikaa. Valitut mitat $R = 3$ ja $a = 1$ toteuttavat mainitut vaatimukset tyydyttävästi.

Reunaehtojen määrittämisen jälkeen verkon luominen ja kentän ratkaiseminen tapahtuu valitsemalla toiminnot "Mesh – Initialize Mesh" ja "Solve – Solve Problem". Numeerisissa laskelmissa käytettiin ohjelman automaattisesti luomaa laskentaverkkoa. Suurempaa tarkkuutta vaadittaessa verkkoa voisi tihentää, mutta samalla laskenta-aika pitenis. Polarisoituvuus laskettiin lopulta käyttämällä toimintoa "Post-processing – Subdomain Integration". Kohtaan "Expression to integrate" valittiin

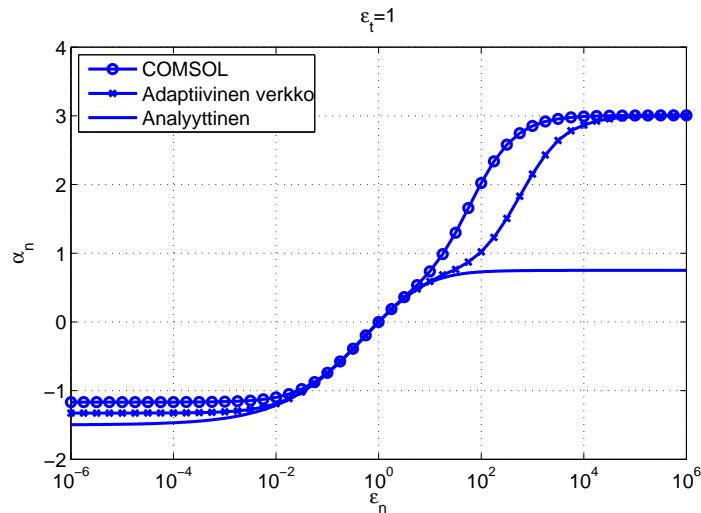
alasetoivalikosta ”Predefined quantities” valinta ”Electric polarization x -component”. COMSOL antaa sirottajan poikittaissuuntaisen dipolimomentin p_{\perp} , jonka perusteella pystytään laskemaan normalisoitu polarisoituvuus

$$\alpha_{n,\perp} = \frac{\alpha_{\perp}}{\epsilon_0 V} = \frac{p_{\perp}}{\epsilon_0 V E^p}$$

Sähköstatiikan ongelman ratkaisemisen viimeiset vaiheet pystyy tekemään COMSOLin graafisen käyttöliittymän avulla, mutta skriptikielen käyttäminen on käteväämpää, jos tuloksia halutaan laskea useita siten, että kokeillaan eri väliaineparametrien arvoja. COMSOLia pystyy skriptaamaan Matlabista käsin avaamalla ensin yhteyden ohjelmien välille kohdasta ”File – Client/Server/MATLAB – Connect to MATLAB”. Sirontaongelmaa kuvaavaa mallia, joka luotiin COMSOL-ohjelmassa, pystyy käyttämään Matlabista käsin, kun valitsee COMSOLissa kohdan ”File – Export – FEM Structure as ’fem’”. Työssä COMSOL-mallin geometria ja reunaehdot tehtiin graafisen käyttöliittymän avulla. Loput työvaiheet, mukaan luettuna kuvaajien piirtäminen, tehtiin skriptaamalla COMSOLia Matlabin avulla.

3.5.3 Numeeristen tulosten tarkkuus

Numeeriset tulokset ovat harvoin täysin tarkkoja, minkä vuoksi tulosten luotettavuutta on syytä arvioida. Helpoin tapa numeerisen menetelmän virheen arvioimiseen on vertaaminen tunnettuun analyttiseen tulokseen. Systrooppisen pallon polarisoituvuudelle johdettiin luvussa 3.3 kaava (3.66), joka ei kuitenkaan anna täysin tarkkaa arvoa. RU-pallo sen sijaan on oivallinen vertailukohta, koska sen polarisoituvuus



Kuva 3.14: RU-pallon polarisoituvuus, kun suure $\epsilon_t = 1$ on vakio. Yhtenäinen kuvaaja noudattaa yhtälöä (3.37). Valmishjelman antamat tulokset paljastuvat epäluotettaviksi, kun anisotrooppisuus on huomattava.

pystytään laskemaan suoraan kaavasta (3.37)

$$\alpha_n = 3 \frac{\epsilon_n + 2 - \sqrt{\epsilon_n^2 + 8\epsilon_n\epsilon_t}}{\epsilon_n - 4 - \sqrt{\epsilon_n^2 + 8\epsilon_n\epsilon_t}}$$

joka johdettiin luvussa 3.2.

Vertaaminen analyttiseen tulokseen (3.37) asettaa valmisohjelmalla lasketut numeeriset tulokset kyseenalaiseksi tilanteessa, jossa permittiivisyysdyadin komponentit ϵ_n ja ϵ_t poikkeavat jyrkästi toisistaan. Tarkasteltaessa esimerkiksi kuvan 3.14 tilannetta, jossa $\epsilon_t = 1$, normalisoidun polarisoituvuuden pitäisi kaavan (3.38) perusteella olla $\alpha_n = 3/4$ rajalla $\epsilon_n \rightarrow \infty$. Valmisohjelman antama tulos on selkeästi suurempi ja suppenee kohti arvoa 3 suurilla ϵ_n :n arvoilla. Myös äärimmäisen pienet ϵ_n :n arvot tuottavat numeeriselle vaikeuksia. Ero ei ole yhtä suuri kuin toisessa ääripäässä, mutta tuloksissa on silti systemaattinen virhe. Valmisohjelma näyttää antavan oikeita tuloksia ainoastaan silloin, kun permittiivisyyden komponentit eivät poikkea toisistaan merkittävästi.

Tulosten luotettavuutta arvioitaessa haluttiin ottaa selville, kuinka laskentaverkon tihentäminen vaikuttaa tulosten tarkkuuteen. COMSOL Multiphysics -ohjelmassa on ominaisuus, jonka avulla laskentaverkkoa voi tihentää adaptiivisesti siten, että elementtejä tulee tiheimmin kohtiin, joissa sähkökenttä muuttuu voimakkaaimmin (COMSOL, 2008). Sähkökentän voimakas muutos tapahtuu tavallisimmin rajapinnoilla, minkä voisi periaatteessa ottaa huomioon ensimmäistä laskentaverkkoa luotaessa. Toisaalta on mahdollista myös ratkaista sähkökenttä käyttämällä ensin harvaa laskentaverkkoa, minkä jälkeen ensimmäistä ratkaisua voi käyttää apuna tiheämpää laskentaverkkoa luotaessa. Laskentaverkon adaptiivista tihentämistä voi pitää sikäli perusteltuna, että kuvan 3.5 perusteella kentän suurin muutos ei välttämättä tapahdu rajapinnalla, vaan systrooppisen pallon sisällä kenttä voi muuttua yhtä voimakkaasti kuin reunalla. Laskentaverkon adaptiivista tihentämistä tarkastellaan lähemmin liitteessä A.

Laskentaverkon tihentämisen voisi kuvitella parantavan numeeristen tulosten tarkkuutta, koska tiheä laskentaverkko muistuttaa geometrialtaan läheisesti palloa ja kykenee ottamaan huomioon sähkökentän muutokset harvaa verkkoa paremmin. Kuva 3.14 vahvistaa olettamuksen oikeaksi. Adaptiivisesti tihennettyä verkkoa käyttäen lasketut numeeriset tulokset ovat lähempänä totuutta pienillä ϵ_n :n arvoilla kuin tihentämätöntä verkkoa käyttäen lasketut. Toisessa ääripäässä, $\epsilon_n \rightarrow \infty$, tiheämmän verkon käyttäminen ei näytä parantavan tulosten laatua merkittävästi. Molemmista numeerisesti lasketuissa kuvaajissa on notkahdus kohdassa, jossa $\epsilon_n \approx 10$. Notkahdus on hieman syvempi tiheämmällä verkolla lasketuille tuloksille, jolloin tulokset pitävät paremmin paikkansa.

3.6 Reunaehtojen soveltaminen

Tähän asti pallon sirontaa on tarkasteltu olettamalla pallon sisä- ja ulkopuolelle tunnetut väliaineparametrit ja soveltamalla reunaehtoja pallon pinnalla. Luvussa

2.3 tarkasteltiin kuitenkin kahta eri tapaa, jolla sähköstatiikan ongelman ratkaisusta voi tehdä yksikäsitteisen. Rajapintaehdon käyttäminen kahden väliaineen rajapinnalla on yksi tapa varmistaa ratkaisun yksikäsitteisyys, mutta myös toinen tapa on olemassa. Joskus rajapinnan takana olevaa materiaalia ei tunneta, mutta sen sijaan pinnalla tunnetaan reunaehto. Luvussa 2.3.1 osoitettiin, että jos alueen V reunalla ∂V kiinnitetään potentiaali $\phi(\mathbf{r})$ (Dirichlet'n reunaehto) tai normaaliderivaatta $\nabla_{\mathbf{n}}\phi(\mathbf{r})$ (Neumannin reunaehto), Laplacen yhtälön $\nabla^2\phi(\mathbf{r})$ ratkaisusta tulee yksikäsitteinen alueessa V . Toinen tapa lähestyä sirontaongelmaa on siis määritellä sirottajan sisäpuolisen materiaalin väliaineparametrien sijaan sopivat reunaehdot sirottajan pinnalla.

Ensin tarkastellaan yleistä rajapintaa S , jonka toisella puolella on anisotrooppinen väliaine. Väliaineen permittiivisyys on muotoa

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_n \mathbf{nn} + \epsilon_t \bar{I}_t \quad (3.88)$$

Huomataan, että jos valitaan $\epsilon_n = 0$, reunalla S pätee Neumann-reunaehto, koska sähkövuontiheyden normaalikomponentti katoaa reunan toisella puolen, $\mathbf{D}_n = \epsilon_n \mathbf{E}_n = 0$, riippumatta sähkökentästä \mathbf{E} . Dirichlet-reunaehto pystytään toteuttamaan valitsemalla $\epsilon_t = \infty$, jolloin tangentialisen sähkökentän on kadottava, $\mathbf{E}_t = 0$, jotta tangentialinen sähkövuontiheys $\mathbf{D}_t = \epsilon_t \mathbf{E}_t$ säilyisi äärellisenä.

Seuraavaksi tarkastellaan sitä, kuinka reunaehtoja voi soveltaa pallon sirontaa tutkittaessa. Havaitaan, että sironneen kentän voi laskea ilman, että pallon sisäkenttää \mathbf{E}_i tunnetaan lainkaan. Lisäksi reunaehdon ja pallon sisäpuolisen materiaalin väliaineparametrien ϵ_n ja ϵ_t välillä havaitaan yhteys, joka ei kuitenkaan sikäli ole yksikäsitteinen, että saman reunaehdon voi toteuttaa usealla eri tavalla.

Luvussa 3.2 pallon ulkokenttä esitettiin muodossa

$$\phi_{\text{ulko}}(r, \theta) = Ar^{-2} \cos \theta - E^p r \cos \theta$$

Jos Dirichlet-reunaehto on voimassa, $\phi_{\text{ulko}}(r, \theta)$:n on oltava vakio kaikilla θ :n arvoilla, kun $r = a$. Jos sen sijaan Neumann-reunaehto on voimassa, $\nabla_{\mathbf{n}}\phi(r, \theta)|_{r=a} = 0$. Soveltamalla näitä ehtoja saadaan A :n arvoiksi

$$A = \begin{cases} E^p a^3, & \text{Dirichlet} \\ -E^p a^3/2, & \text{Neumann} \end{cases} \quad (3.89)$$

Sijoittamalla A :n arvot normalisoidun polarisoituvuuden lausekkeeseen (3.36)

$$\alpha_n = \frac{3A}{E^p a^3}$$

saadaan

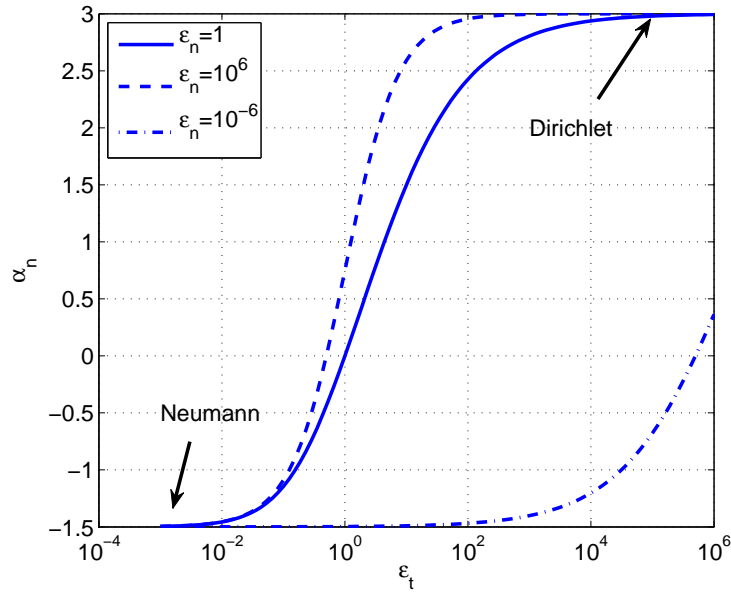
$$\alpha_n = \begin{cases} 3, & \text{Dirichlet} \\ -\frac{3}{2}, & \text{Neumann} \end{cases} \quad (3.90)$$

Reunaehtojen avulla laskettujen tulosten vertailu rajapintaehtojen avulla laskettuihin paljastaa, että Neumann-reunaehto pystytään toteuttamaan kahdella eri

tavalla. Luvussa 3.2 johdettiin kertoimen A arvolle lauseke (3.31):

$$A = \frac{\epsilon_n + 2 - \sqrt{\epsilon_n^2 + 8\epsilon_n\epsilon_t}}{\epsilon_n - 4 - \sqrt{\epsilon_n^2 + 8\epsilon_n\epsilon_t}} E^p a^3$$

Sijoittamalla Dirichlet-reunaehto $A = E^p a^3$ ylläolevaan lausekkeeseen huomataan, että tangentin suuntaisen permittiivisyyden on oltava äärimmäisen suuri, $\epsilon_t \rightarrow \infty$, jotta yhtälö olisi voimassa. Tulos on sama, kuin mikä johdettiin edellä yleiselle, sileälle pinnalle. Neumann reunaehdon yhtälöllä $A = -E^p a^3/2$ on kuvan 3.15 mukaisesti kaksi eri ratkaisua: $\epsilon_n = 0$ ja $\epsilon_t = 0$. Ratkaisu, jossa normaalisuuntainen permittiivisyys katoaa, huomattiin toimivaksi olettamatta pallon muotoista geometriaa. Sen sijaan ratkaisu $\epsilon_t = 0$ ei toimi yleisesti, mutta pallon tapauksessa ratkaisu sattuu toimimaan.



Kuva 3.15: Reunaehdot kuvaajassa. Dirichlet-reunaehto pätee, kun $\epsilon_n = \infty$. Neumann reunaehto pystytään toteuttamaan kahdella eri tavalla: joko $\epsilon_n = 0$ tai $\epsilon_t = 0$.

Luku 4

Yhteenveto

Työssä paneuduttiin sähköstatiikan sirontaongelman ratkaisemiseen tilanteessa, jossa sirottajana on väliaineparametreiltaan anisotrooppinen ja epähomogeeninen pallo. Sirontaongelmassa pallo asetettiin homogeeniseen väliaineeseen ja siihen kohdistettiin paikasta riippumaton staattinen sähkökenttä. Pallon väliaineparametrit määriteltiin siten, että permittiivisyysdyadin komponentit olivat vakiot pallokoordinaatistossa ilmaistuna. Tutkitun kaltaiselle pallolle annettiin työssä nimitys ”systrooppinen”.

Sirontaongelma ratkaistiin erikoistapauksessa analyttisesti ja yleisemmässä tapauksessa numeerisesti. Tapausta, jossa analyttinen ratkaisu toimii työssä kuvailla menetelmillä, päätettiin kutsua säännölliseksi systropiaksi. Kappaleen sirontaa kuvattiin laskemalla kappaleen polarisaatio, joka kertoo vastekentän kaukana sirottajasta. Homogeenisen pallon ja RU-pallon sirontaominaisuuksia riittää kuvaamaan yksi ainut skalaarinen polarisaatio. Sen sijaan aidosti systrooppisen pallon sirontaominaisuuksien kuvaamiseen tarvitaan polarisoituvuusdyadi, jossa on kaksi toisistaan poikkeavaa skalaarista komponenttia. Polarisoituvuusdyadi kertoo kaukoalueessa kappaleen sähköisestä vasteesta kaiken olennaisen.

Polarisaatio laskettiin seuraavasti. Ensin ratkaistiin Laplacen yhtälön kaltainen yhtälö, jossa pallokoordinaatistossa ilmaistun Laplace-yhtälön termejä painotettiin käyttämällä kertoimina permittiivisyyden komponentteja. Tuloksena oli joukko ratkaisuja, joista ainoastaan yksi kuvasi todellista fysikaalista tilannetta. Ratkaisujoukosta etsittiin oikea ratkaisu käyttämällä pallon pinnalla voimassa olevia rajapintaehtoja. Rajapintaehtojen avulla muodostettiin matriisiyhtälö, jossa matriisin kertoimet laskettiin käyttämällä kahteen potentiaalin käyttäytymistä rajapinnalla kuvaavaan yhtälöön Fourier'n menetelmää. Rajapintaehdot tekivät ratkaisun yksikäsitteiseksi, jolloin polarisoituvuus saatiin selville.

Numeerisin ja analyttisin menetelmin laskettuja arvoja kappaleen polarisoituvuudelle verrattiin toisiinsa tulosten luotettavuuden arvioimiseksi. Verrattaessa numeerisia ja analyttisiä tuloksia keskenään numeeriset tulokset havaittiin epäluotettaviksi väliaineen ollessa äärimmäisen anisotrooppista. RU-pallon analyttiset tulokset, jotka ovat ennestään tunnettuja ja jotka pystytään kirjoittamaan yksinkertaiseen muotoon, poikkesivat huomattavasti numeerisista tuloksista, kun väliaine oli merkittävän anisotrooppista.

Työssä tuli vastaan tilanne, jossa säännöllisesti systrooppiselle pallolle lasketut analyttiset tulokset poikkesivat huomattavasti numeerisista tuloksista. RU-pallon tapauksessa havaittiin kuitenkin, että analyttisiä tuloksia on syytä pitää luotetavampina kuin numeerisia. Parempien numeeristen vertailutulosten laskeminen ja analyttisten tulosten vahvistaminen niitten avulla äärimmäisen anisotrooppisen väliaineen tapauksessa vaatii yhä lisätutkimusta.

Pallojen sirontaominaisuuksia selvittäessä tarkasteltiin kahta erikoistapausta, joissa sirottaajan pinnalla toteutui Dirichlet- tai Neumann-reunaehto. Sirottajalle etsittiin väliaineparametrit, joitten avulla reunaehdot pystyttiin toteuttamaan. Tarkastelu otettiin työhön mukaan lähinnä täydellisyyden vuoksi. Kyse ei ole alkuperäis-tutkimuksesta. Havaittiin, että Dirichlet-reunaehdon sai aikaan olettamalla pallon radiaalisen permittiivisyyden äärimmäisen suureksi. Neumann-reunaehdon toteuttaminen tapahtui valitsemalla joko radiaalinen permittiivisyys ϵ_n tai tangentiaalinen permittiivisyys ϵ_t äärimmäisen pieneksi.

Työssä tutkittiin vertailun vuoksi myös kaksiulotteista sirontaongelmaa, jossa äärettömän pitkä PU-ympyrälieriö asetettiin vakiosähkökenttään. Lieriön sähköisen vasteen havaittiin olevan huomattavasti pallon sähköistä vastetta yksinkertaisempi. Havaittiin, että PU-ympyrälieriön polarisoituvuus riippuu ainoastaan väliaineen permittiivisyyden kahden eri komponentin geometrisesta keskiarvosta. Molempien parametrien vaikutus on siis lieriön tapauksessa symmetrinen toisin kuin pallon tapauksessa.

* * *

Tieteellisen teorian tehtävänä on koota yhteen joukko havaintoja ja tuoda ne saman loogisen rakennelman piiriin, jolloin teoriaa pystytään käyttämään apuna paitsi selitettäessä ennestään tunnettuja yllättävänä pidettyjä ilmiöitä myös etsittäessä uusia aikaisemmin havaitsemattomia ilmiöitä. Sähkömagneettinen kenttäteoria on selitysvoimansa kannalta tieteen onnistuneimpia saavutuksia (Schwartz, 1987). Sähkömagneetiikan tutkimus, jonka juuret ovat yksinkertaisissa havainnoissa, on tuottanut yhtenäisen ja kauniin matemaattisen teorian, jonka selitysvoima on suurenmoinen. Sähkömagneetiikan tärkeitä ennustuksia ovat valon aaltoluonne ja valon vakionopeus tyhjiössä (Smith, 1997). Koska klassisessa mekaniikassa valon nopeuden tulisi riippua referenssikoordinaatistosta, sähkömagneetiikkaa on pidettävä klassisesta mekaniikasta riippumattomana teoriana. Michelsonin ja Morleyn tekemät havainnot vahvistivat valon nopeuden vakioksi maapallon pinnalla (Michelson & Morley, 1887). Sähkömagneetiikan ennustusten ja saatujen mittaus-tulosten ristiriitaisuus klassisen mekaniikan kanssa, johti suhteellisuusteorian kehittymiseen (Miller, 1972; Weinberg, 1972).

Klassinen sähkömagneetiikka, erotuksena kvanttisähködynamiikasta, tarkastelee arkipäivän mittasuhteissa tapahtuvia ilmiöitä. Tuttuja sähkömagneetiikan ilmiöitä ovat sateenkaaret, kangastukset ja haloilmiö. Myös induktiolieden toiminta perustuu sähkömagneetiikan ilmiöihin. Koska sähkömagneetikka on selitysvomainen teoria ja se kytkeytyy läheisesti arkipäivän ilmiöitten kanssa, ei liene yllättävää, että tutkimusala on poikunut huomattavan määrän käytännön sovelluksia. Radiot, tutka

ja erilaiset optiset laitteet ovat ilmeisiä esimerkkejä sähkömagnetiikkaan perustuvasta teknologiasta. Sähkömagnetiikkaa käytetään apuna myös tutkittaessa jo olemassa olevia materiaaleja ja suunniteltaessa uusia (Sihvola, 1999). Erilaisten lasi-metalli-seosten ja riikinkukon sulkien väri pystytään selittämään sähkömagnetiikan avulla (Weyl, 1951; Zi et al., 2003). Lisäksi pystytään suunnittelemaan syntetettisiä opaaleita, joitten estokaistaa pystytään muokkaamaan sähkökentän avulla (Bogomolov et al., 1997; Li et al., 2003).

Sähkömagneettisen teorian soveltaminen uusiin ongelmiin vaatii usein raskaita laskutoimituksia, joita on vaikeaa tai mahdotonta suorittaa kynällä ja paperilla. Sähkömagnetiikan tutkija huomaakin olevansa samassa tilanteessa kuin vanki Platonin luolavertauksessa. Enimmäkseen sähkömagnetiikan ongelmiin saadaan numeerisin menetelmin tuotettuja likimääräisiä tuloksia, jotka muistuttavat luolaan kahlitun vangin havaitsemia varjoja luolan seinällä. Analyyttisten ratkaisujen käytännön merkitys on siinä, että ne tarjoavat koetinkiven, jonka avulla numeeristen menetelmien luotettavuutta pystytään arvioimaan. Näitten erikoislaatuisten ratkaisujen periaatteellinen merkitys on kuitenkin huomattavasti kauaskantoisempi. Kaikkien mahdollisten lukemattomien sähkömagneettisten ongelmien joukossa suljetussa muodossa ratkeavat tehtävät ovat häviävän pieni osajoukko. Analyttiset tulokset ovat harvinainen lahja matematiikalta sähkömagnetiikalle. Ne tarjoavat tutkijalle kapean ikkunan, jonka kautta hän pystyy kurkistamaan numeerisesta epämääräisten varjojen täyttämästä kammioista ulos täydellisten ideoitten maailmaan.

Kirjallisuutta

- M. Abramowitz & I. Stegun (1964). *Handbook of mathematical functions*. US Government Printing Office.
- R. Adams & C. Essex (2003). *Calculus: a complete course*. Benjamin-Cummings Publishing Company, 5. painos.
- G. Arfken, et al. (1995). *Mathematical methods for physicists*. Academic Press, 4. painos.
- J. Argyris & S. Kelsey (1960). *Energy theorems and structural analysis*. Butterworth.
- K. Bathe & E. Wilson (1976). *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall.
- V. Bogomolov, et al. (1997). 'Photonic band gap phenomenon and optical properties of artificial opals'. *Physical Review E* **55**(6):7619.
- C. Bohren & D. Huffman (1983). *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons.
- COMSOL (2008). '3.5 a Documentation'. Ohjelmiston manuaali.
- Comsol (2010). 'Comsol Release History'. <http://www.comsol.fi/support/releasehistory/>.
- S. Humphries (1997). *Finite-element methods for electromagnetics*. CRC Press.
- J. D. Jackson (2001). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 3. painos.
- J.-M. Jin (2002). *The finite element method in electromagnetics*. John Wiley & Sons, 2. painos.
- H. Kettunen (2006). 'Pienen puolipallon sähköinen vaste'. Diplomityö, Teknillinen korkeakoulu, Sähkö- ja tietoliikennetekniikan osasto.
- E. Kreyszig (1983). *Advanced engineering mathematics*. John Wiley & Sons, 5. painos.
- N. Lebedev & R. Silverman (1972). *Special functions and their applications*. Dover Publications.

- B. Li, et al. (2003). ‘Ferroelectric inverse opals with electrically tunable photonic band gap’. *Applied Physics Letters* **83**:4704.
- I. Lindell (1992). *Methods for electromagnetic field analysis*. Oxford University Press.
- I. Lindell & A. Sihvola (2009). ‘Electromagnetic boundary and its realization with anisotropic metamaterial’. *Physical Review E* **79**(2):026604.
- L. Lorenz (1890). ‘Lysbevægelsen i og uden for en af plane Lysbølger belyst Kugle’. *Videnskabernes Selskabs Skrifter* **6**:2–62.
- C. Mätzler (2002). ‘MATLAB functions for Mie scattering and absorption’. Institute of Applied Physics, University of Bern, Research Report, No. 2002-11.
- A. Michelson & E. Morley (1887). ‘On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Aether’. *The American Journal of Science* **34**(203).
- G. Mie (1908). ‘Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen’. *Annalen der Physik* **330**(3):377–445.
- C. Miller (1972). *The theory of relativity*. Clarendon Press.
- B. Nilsson (2008). ‘COMSOL Multiphysics 3.5a Roll Out’. <http://www.comsol.com/press/news/article/60/>.
- C.-W. Qiu, et al. (2010). ‘Light scattering from anisotropic particles: propagation, localization, and nonlinearity’. *Laser & Photonics Reviews* **4**(2):268–282.
- C.-W. Qiu, et al. (2007). ‘Scattering by rotationally symmetric anisotropic spheres: Potential formulation and parametric studies’. *Physical Review E* **75**(2):026609.
- M. Schwartz (1987). *Principles of electrodynamics*. Dover Publications.
- SIAM (2005). ‘Obituary: Germund Dahlquist’. <http://www.siam.org/news/news.php?id=54>.
- A. Sihvola (1999). *Electromagnetic mixing formulas and applications*. The Institution of Electrical Engineers.
- A. Sihvola & I. Lindell (1996). *Sähkömagneettinen kenttäteoria: 2. Dynaamiset kentät*. Otatieto Oy.
- G. Smith (1997). *An introduction to classical electromagnetic radiation*. Cambridge University Press.
- M. Turner, et al. (1956). ‘Stiffness and deflection analysis of complex structures’. *Journal of Aeronautical Sciences* **23**(9):805–823.
- S. Weinberg (1972). *Gravitation and cosmology*. John Wiley & Sons.

W. A. Weyl (1951). *Coloured glasses*. Society of Glass Technology.

J. Zi, et al. (2003). 'Coloration strategies in peacock feathers'. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **100**(22):12576.

Liite A

Ohjelmalistaukset

Numeeristen tulosten laskemista varten luotiin COMSOL-malli, jonka Matlab-skripti on tiedostossa *pallo.m*. COMSOL-mallin saa ladattua Matlab-ympäristöön, kun käynnistää Matlabin COMSOLista käsin kohdasta "File – Client/Server/MATLAB – Connect to MATLAB" ja suorittaa sen jälkeen skriptin *pallo.m* Matlabin komentoriviltä. Skriptin suorittamisen jälkeen COMSOL-mallin muuttujanimi Matlabin työtilassa on "*fem*".

Listauksen *pallo.m* sisältö aukeaa listauksen sisältämien kommenttien avulla. Kuten mainitaan listauksen *pallo.m* riveillä 1–2, COMSOL-mallin luova skripti on generoitu automaattisesti soveltamalla COMSOL Multiphysics ohjelman käyttöliittymää. Käyttöliittymän avulla laaditun mallin voi muuttaa skriptiksi milloin tahansa tallentamalla mallin muodossa "Model M-file". Tallentaminen kannattaa tehdä varhain, sillä COMSOL tallentaa skriptiin kaikki muutokset, mitä käyttöliittymässä tehdään. Mallin sisemmän ja ulomman pallon mitat määritellään riveillä 17–18. Väliaineparametrit määritellään alustavasti riveillä 30–32, mutta parametrit muuttavat tavallisesti arvoaan ennen varsinaista laskutoimitusta. COMSOL Multiphysics käyttää laskutoimituksissaan karteesta koordinaatistoa, minkä vuoksi permittiivisyysdyadin komponentit on muunnettava pallokoordinaatistosta karteeseen koordinaatistoon. Kaavan (3.79) avulla tapahtuva muunnos tehdään riveillä 53–57.

pallo.m

```
1 % COMSOL Multiphysics Model M-file
2 % Generated by COMSOL 3.5a (COMSOL 3.5.0.608, $Date: 2009/05/11
   07:38:49 $)
3
4 flclear fem
5
6 % COMSOL version
7 clear vrsn
8 vrsn.name = 'COMSOL 3.5';
9 vrsn.ext = 'a';
10 vrsn.major = 0;
11 vrsn.build = 608;
12 vrsn.rcs = '$Name: v35ap $';
13 vrsn.date = '$Date: 2009/05/11 07:38:49 $';
14 fem.version = vrsn;
15
```

```

16 % Geometry
17 g1=sphere3('1','pos',{ '0','0','0'},'axis',{ '0','0','1'},'rot','0');
18 g2=sphere3('3','pos',{ '0','0','0'},'axis',{ '0','0','1'},'rot','0');
19
20 % Analyzed geometry
21 clear s
22 s.objs={g1,g2};
23 s.name={'Sisa','Ulko'};
24 s.tags={'g1','g2'};
25
26 fem.draw=struct('s',s);
27 fem.geom=geomcsg(fem);
28
29 % Constants
30 fem.const = {'err','2', ...
31   'ett','2', ...
32   'epp','2'};
33
34 % Initialize mesh
35 fem.mesh=meshinit(fem, ...
36   'hauto',5);
37
38 % (Default values are not included)
39
40 % Application mode 1
41 clear appl
42 appl.mode.class = 'EmElectrostatics';
43 appl.module = 'ACDC';
44 appl.sshape = 2;
45 appl.assignsuffix = '_emes';
46 clear bnd
47 bnd.type = {'ss','cont'};
48 bnd.Vref = {'-1.5*Ee*x','0'};
49 bnd.dbnd = {'R/2','1'};
50 bnd.ind = [1,1,1,1,2,2,2,2,1,1,2,2,1,2,2,1];
51 appl.bnd = bnd;
52 clear equ
53 equ.epsilonr = {{'1','0','0';'0','1','0';'0','0','1'},{'err*(sin(theta))
54   ^2*(cos(phi))^2+ett*(cos(theta))^2*(cos(phi))^2+epp*(sin(phi))^2',
55   ...
56   '(err*(sin(theta))^2+ett*(cos(theta))^2-epp)*cos(phi)*sin(phi)', '(err
57   -ett)*cos(theta)*sin(theta)*cos(phi)'}; ...
58   '(err*(sin(theta))^2+ett*(cos(theta))^2-epp)*cos(phi)*sin(phi)', 'err
59   *(sin(theta))^2*(sin(phi))^2+ett*(cos(theta))^2*(sin(phi))^2+epp
60   *(cos(phi))^2', ...
61   '(err-ett)*cos(theta)*sin(theta)*sin(phi)'; '(err-ett)*cos(theta)*sin(
62   theta)*cos(phi)', ...
63   '(err-ett)*cos(theta)*sin(theta)*sin(phi)', 'err*(cos(theta))^2+ett*(
64   sin(theta))^2'}};
65 equ.ind = [1,2];
66 appl.equ = equ;
67 fem.appl{1} = appl;
68 fem.frame = {'ref'};
69 fem.border = 1;

```

```

63 clear units;
64 units.basesystem = 'SI';
65 fem.units = units;
66
67 % Global expressions
68 fem.globalexpr = {
69     'R', '3', ...
70     'Ee', '1', ...
71     'r', 'sqrt(x^2+y^2+z^2)', ...
72     'phi', 'atan2(y,x)', ...
73     'theta', 'acos(z/r)'};
74
75 % ODE Settings
76 clear ode
77 clear units;
78 units.basesystem = 'SI';
79 ode.units = units;
80 fem.ode=ode;
81
82 % Multiphysics
83 fem=multiphysics(fem);
84
85 % Extend mesh
86 fem.xmesh=meshextend(fem);
87
88 % Solve problem
89 fem.sol=femstatic(fem, ...
90     'solcomp', {'V'}, ...
91     'outcomp', {'V'}, ...
92     'blocksize', 'auto', ...
93     'linsolver', 'cg', ...
94     'prefun', 'amg');
95
96 % Save current fem structure for restart purposes
97 fem0=fem;

```

Luotua mallia pystytään soveltamaan polarisoituvuuden laskemiseen. Mallin ratkaiseminen antaa tulokseksi sähkökentän pallon sisällä ja sen välittömässä ympäristössä, mutta yksinkertaisuuden vuoksi on helpointa tarkastella pelkkää polarisoituvuutta. Normalisoitu polarisoituvuus pystytään laskemaan dipolimomentista kaavan (3.66) avulla:

$$\alpha_{n,\perp} = \frac{p_{\perp}/E^P}{\epsilon_0 V} \quad (\text{A1})$$

COMSOL laskee dipolimomentin sirottajan sisäkentän perusteella, integroimalla (2.66):

$$\mathbf{p} = \int_V \epsilon_0 \left(\bar{\bar{\epsilon}} - \bar{\bar{I}} \right) \cdot \mathbf{E}_{\text{sisä}} dV$$

fem_pol.m

```

1 function a = fem_pol(fem, err, ett, epp, ada)
2
3     % Function uses Comsol to calculate

```

```

4   % the polarizability of an systropic sphere.
5   % input: fem, radial permittivity, theta permittivity,
6   %         phi permittivity, adaption (true || false)
7
8   % Author: Tommi Rimpilainen
9   % File created: 27.10.2010
10  % Last change: 7.6.2011 Adaptional mesh optional
11
12  % Constants
13  fem.const = {'err', num2str(err), ...
14             'ett', num2str(ett), ...
15             'epp', num2str(epp)};
16
17  if ada
18      fem = adaption(fem);
19  end
20  fem.sol = femstatic(fem, ...
21                  'solcomp', {'V'}, ...
22                  'outcomp', {'V'}, ...
23                  'blocksize', 'auto', ...
24                  'linsolver', 'cg', ...
25                  'prefun', 'amg');
26
27  % Integrate
28  p = postint(fem, 'Px_emes', ...
29            'unit', 'C*m', ...
30            'recover', 'off', ...
31            'dl', 2);
32
33  a = normalizepol(p);
34
35 end

```

Ohjelma *fem_pol.m* palauttaa normalisoidun polarisoituvuuden $\alpha_{\perp,n}$, jonka määritelmä on (3.33)

$$\alpha_n = \frac{p/E^p}{\epsilon_0 V}$$

Listauksessa *fem_pol.m* käytetään aliohjelmaa *normalizepol.m* muuntamaan absoluuttinen polarisoituvuus α_{\perp} normalisoiduksi polarisoituvuudeksi $\alpha_{\perp,n}$.

normalizepol.m

```

1 function a = normalizepol(p)
2
3   % Program calculates the normalized polarizability of
4   % a sphere, when the polarisation is known.
5   %
6   % File created: 3.8.2010
7   % Author: Tommi Rimpilainen
8   % Last change: none
9
10  eps0 = 8.854188e-12;
11  V = 4*pi/3;
12  a = p/V/eps0;

```

13 |
14 | **end**
