Aalto yliopisto Insinööritieteiden korkeakoulu
Virtausmekaniikka / Sovelletun mekaniikan laitos

---

MUISTIO No CFD/MECHA-17-2012 pvm 22. kesäkuuta 2011

OTSIKKO

Hilatiheyden määrittäminen ennen simulointia

LAATIJA(T)

Tuomas Turunen

TIIVISTELMÄ

Tarkoituksena on koota menetelmiä, joilla voi arvioida hilan tiheyden tarvetta seinien läheisyydessä ennen simuloinnin aloittamista

PÄÄKOHDAT

Tämä muistio esittelee joitakin menetelmiä dimensiottoman etäisyyden määrittämiseksi eri virtaustapauksissa ja vertailee niiden käyttökelpoisuutta

SIVUJA

10

AVAINSANAT

hilatiheys

TARKASTANUT

Timo Siikonen 22. kesäkuuta 2011

# Sisältö

# 1 Ensimmäisen kopin korkeuden määrittäminen

Ongelmana hilatiheyden määrittämisessä pintojen lähellä on hilatiheyden riippuvuus virtauskentästä. Virtaustulosta ei luonnollisesti kuitenkaan vielä ole, kun hilaa aletaan tekemään, joten tulevaa laskentatulosta on arvioitava jollain tavalla. Riippuen laskentamenetelmästää vaadittava tiheys määräytyy tietyn dimensiottoman etäisyyden, $y^+$:n (kaava 1), mukaan.

$$y^+ = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}}{\nu} y \tag{1}$$

Sijoittamalla leikkausjännitys kitkakertoimen $C_f$ määritelmästä (kaava 2) $y^+$:n kaavaan voidaan $y^+$ lausua myös kitkakertoimen avulla (kaava 3).

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} \tag{2}$$

$$y^+ = \frac{U\sqrt{\frac{C_f}{2}}}{\nu} y \tag{3}$$

Jotta saadaan laskettua todellinen etäisyys seinästä, jolla $y^+$ saa halutun arvon, tarvitaan siis leikkausjännitys tai kitkakerroin seinällä. Näiden arvioimiseen on alla esitetty erilaisia menetelmiä, jotka kaikki kuitenkin palautuvat rajakerroksen nopeusprofiilin arvioimiseen.

## 1.1 Tasolevy

Tarkastellaan tasolevyn rajakerrosta. Johdetaan lausekkeet sellaiselle etäisyydelle seinästä, jossa dimensioton koordinaatti $y^+$ 1 saa tietyn arvon Reynoldsin luvun 4 funktiona. Lähdetään kitkakertoimen määritelmästä 2.

Ratkaisemalla yhtälöstä 3 $y$ ja manipuloimalla niin, että siihen saadaan sijoitettua Reynoldsin luku (kaava 4) saadaan $y$:lle lauseke kitkakertoimen, $y^+$:n, $Re_x$:n ja $x$:n funktiona

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu} \tag{4}$$

$$y = \frac{y^+\nu}{U\sqrt{\frac{C_f}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \cdot \frac{\nu}{Ux} \cdot x \cdot y^+ = \frac{\sqrt{2} \cdot xy^+}{Re_x\sqrt{C_f}} \tag{5}$$

Nyt on vielä saatava $C_f$:lle arvio.

### 1.1.1 Laminaari tasolevy

Laminaarissa tapauksessa Blasius-ratkaisun mukainen kitkakerroin on [1, Eq. (4-52)]

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \tag{6}$$

Sijoittamalla kitkakerroin yhtälöstä 6 yhtälöön 5 saadaan laminaarille rajakerrokselle yhteys

$$y = 1,7355 Re_x^{-0.75} x y^+ \tag{7}$$

Tämä perustuu siis Blasius-ratkaisuun ja on periaatteessa tarkka.

### 1.1.2 Turbulentti tasolevy

Turbulentissa tapauksessa rajakerroksen sisäsuureiden avulla määritelty kitkakerroin on [1, Eq. (6-76)]

$$C_f = \frac{0,455}{ln^2(0,06 Re_x)} \tag{8}$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön 5 saadaan turbulentille rajakerrokselle yhteys

$$y = \frac{2,0966\ ln(0,06 Re_x)\ x y^+}{Re_x} \tag{9}$$

White suosittelee yhtälöä 8 kitkakertoimelle enemmän tai vähemmän tarkkana ja sama pätee tällöin myös yhtälölle 9.

### 1.1.3 Muita tapoja

Kohtaa, jossa $y^+$ saa arvon 1, voidaan arvioida suhteessa rajakerroksen paksuuteen. Tällöin laminaarissa tapauksessa arviota voidaan hakea muodossa

$$y(a) = a\frac{5,0x}{\sqrt{Re_x}} \tag{10}$$

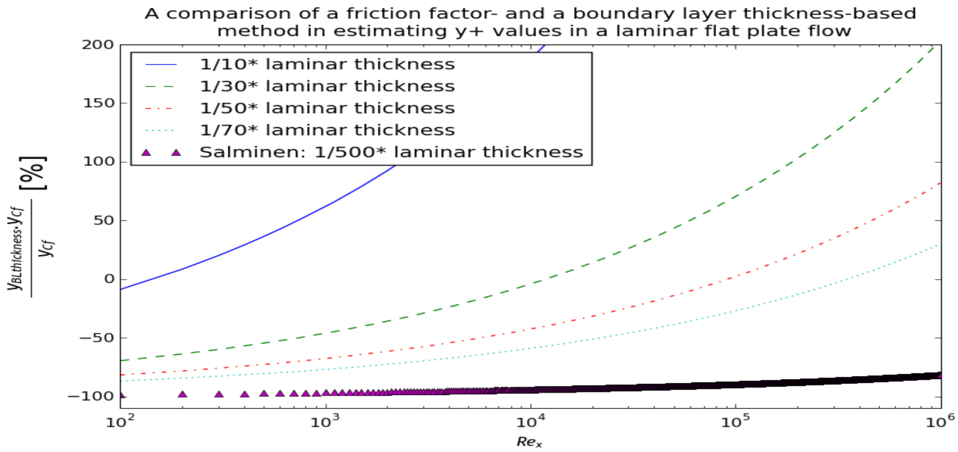
ja turbulentissa tapauksessa muodossa

$$y(b) = b\frac{0,16x}{Re_x^{\frac{1}{7}}} \quad , \tag{11}$$

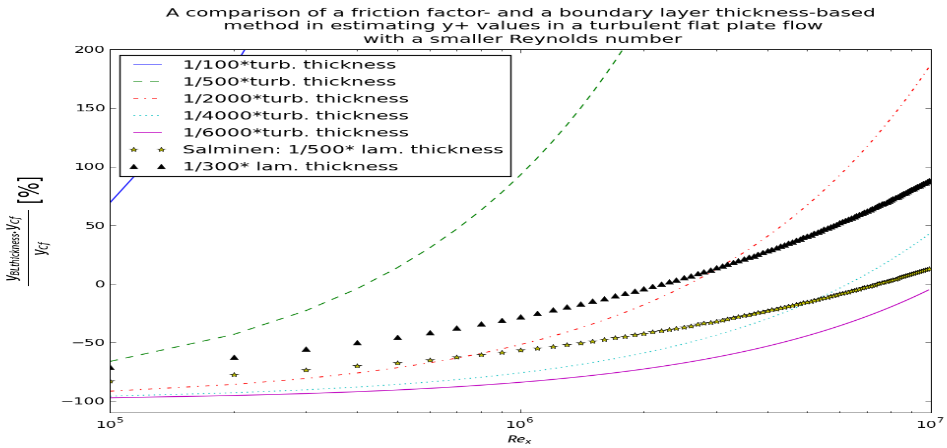
missä $a$ ja $b$ ovat vakioita. Laminaarin tapauksen yhtälö 10 perustuu Blasius-ratkaisun mukaiseen rajakerroksen paksuuteen [1, Eq. (4-49)] ja yhtälö 11 turbulentin nopeusprofiilin power-law -sovitteeseen [1, Eq. (6-70)]

Esa Salmisen esittämä kaava vastaa tapausta $a = \frac{1}{500}$. Kuvassa 1 on vertailtu kitkakertoimeen perustuvaa ja rajakerroksen paksuuteen perustuvaa menetelmää keskenään laminaarissa tapauksessa. Kuvaan on piirretty menetelmien antamien tulosten suhteellinen ero $\frac{y(a)-y_{Cf}}{y_{Cf}}$ $a$:n arvoilla $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{50}$ ja $\frac{1}{70}$. Nähdään, että arvolla $a = \frac{1}{30}$ ero kitkakertoimeen perustuvaan arvoon välillä $10^3 < Re_x < 3 \cdot 10^5$ on $-50\%... + 100\%$. Olettamalla kitkakertoimeen perustuva etäisyys oikeaksi rajakerroksen paksuuteen perustuva menetelmä osuisi siis arvolla $a = \frac{1}{30}\ y^+$ annetulla $Re_x$ alueella välille $0,5 < y^+ < 2$.

Kuviin 2 ja 3 on piirretty kaavan 11 ja kitkakertoimeen perustuvan kaavan 9 antamien etäisyyksien suhteellinen ero $\frac{y(b)-y_{Cf}}{y_{Cf}}$. Lisäksi Salmisen kaavaa on vertailtu kitkakertoimeen perustuvaan ratkaisuun. Nähdään, että kaavan 11 mukainen arvio toimii kullakin $b$:n arvolla vain tietyllä $Re_x$ alueella, jonka loppu- ja alkupään suhde on alle 10. Salmisen kaava, joka on siis yhdenmuotoinen *laminaarin* rajakerroksen kanssa (kaava 10), antaa käyttökelpoisia arvoja *turbulentissa* tapauksessa noin välillä $10^6 < Re_x < 2 \cdot 10^7$. Arvolla $a = \frac{1}{300}$ saadaan $y^+$ välillä $10^6 < Re_x < 10^7$ välille $0,5 < y^+ < 2$.




**Kuva 1**: Kitkakertoimeen ja rajakerroksen paksuuteen perustuvien menetelmien vertailu laminaarissa tapauksessa.



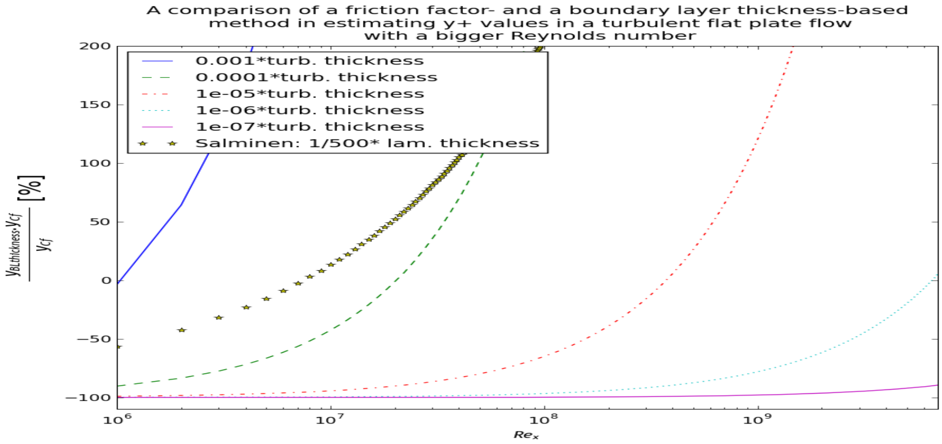

**Kuva 2**: Kitkakertoimeen ja rajakerroksen paksuuteen perustuvien menetelmien vertailu turbulentissa tapauksessa pienemmillä $Re_x$ arvoilla.

## 1.2 Kanavavirtaus

Kanavavirtaus on sisäpuolinen virtaus, eikä määräävä Reynoldsin luku muutu virtauksen suunnassa, vaan se määritetään kanavan korkeuden mukaan. Laminaarille tapaukselle on olemassa analyyttineeen ratkaisu ja turbulentissa tapauksessa kitkakerroin voidaan määrittää logaritmilain mukaista nopeusprofiilia käyttäen. Seuraavaksi tarkastellaan kanavaa, jonka korkeus on $2h$, alareuna kohdassa $y = 0$ ja jossa virtaus on $x$-akselin suuntaista.

### 1.2.1 Laminaari kanavavirtaus

Täysin kehittyneen kanavavirtauksen nopeusprofiili voidaan laminaarissa tapauksessa johtaa analyyttisesti. Tällöin myös kitkakertoimelle ja $y^+$:lle voidaan määrittää analyyttiset lausekkeet. Seuraavakkksi ko. lausekkeet johdetaan lähtienn




**Kuva 3**: Kitkakertoimeen ja rajakerroksen paksuuteen perustuvien menetelmien vertailu turbulentissa tapauksessa suuremmilla $Re_x$ arvoilla.

Navier-Stokes yhtälöistä, jotka laminaarin 2D kanavavirtauksen tapauksessa supistuvat muotoon

$$\frac{\partial u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \;, \tag{12}$$

missä $\mu$ on virtaaavan aineen dynaaminen viskositeetti ja $p$ on paine. Integroimalla kahdesti ja käyttämällä reunaehdot $u(y = 0) = u(y = 2h) = 0$ saadaan nopeusprofiilille lauseke

$$u(y) = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \cdot (\frac{1}{2}y^2 - hy) \tag{13}$$

Ratkaisemalla painegradientti keskimääräisen nopeuden suhteen

$$u_{average} = \frac{1}{2h}\int_0^{2h} u(y)dy = \frac{-1}{3\mu}(\frac{dp}{dx})h^2 \tag{14}$$

saadaan nopeusprofiilille lauseke

$$u(y) = \frac{-3}{h^2}u_{average}(\frac{1}{2}y^2 - hy) \;\; . \tag{15}$$

Tästä voidaan ratkaista leikkausjännitys seinällä

$$\tau_w = \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = \left[\frac{-3\mu}{h}u_{average}(y-1)\right]_{y=0} = \frac{3\mu u_{average}}{h} \tag{16}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{3\,\nu\,u_{average}}{h} \;\; , \tag{17}$$

jolloin

$$y^+ = \frac{\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}y}{\nu} = \sqrt{\frac{3u_{average}}{\nu h}} \cdot y \tag{18}$$

ja

$$y\left(y^+, h, u_{average}, \nu\right) = y^+\sqrt{\frac{\nu h}{3u_{average}}} \tag{19}$$

### 1.2.2 Turbulentti kanava- ja putkivirtaus

White esittää useita menetelmiä kitkakertoimen määrittämiseksi turbulenteille kanava- ja putkivirtauksille, jotka käsittävät erimuotoisia poikkileikuksia ja pinnankarheusia. $y^+$ arvoa on mahdollista arvioida sijoittamalla kulloinenkin kitkakertoimen arvo kaavaan 3

# Viitteet

[1] White Frank M., “Viscous Fluid Flow”, McGraw Hill, 3rd edition, ISBN 007-124493-X, 2006