Homotopiaryhmä

Eeli Harlas

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 20.8.2025

Vastuuopettaja

FT Pekka Alestalo

Työn ohjaaja

FT Pekka Alestalo

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Copyright © 2025 Eeli Harlas

The document can be stored and made available to the public on the open internet pages of Aalto University.
All other rights are reserved.

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Aalto-yliopisto, PL 11000, 00076 AALTO
www.aalto.fi
Tekniikan kandidaatintyön tiivistelmä

Tekijä Eeli Harlas

Työn nimi Homotopiaryhmä

Koulutusohjelma Teknistieteellinen kandidaattiohjelma

Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet **Pääaineen koodi** SCI3029

Vastuuopettaja FT Pekka Alestalo

Työn ohjaaja FT Pekka Alestalo

Päivämäärä 20.8.2025 **Sivumäärä** 41 **Kieli** Suomi

Tiivistelmä

Työssä johdetaan jokaiselle topologiselle avaruudelle ensimmäinen homotopiaryhmä, jota kutsutaan myös perusryhmäksi, ja jokaiselle jatkuvalle kuvaukselle määritellään perusryhmien välinen indusoitu homomorfismi. Perusryhmien ja indusoitujen homomorfismien näytetään muodostavan perusryhmäfunktorin, joka on invariantti homotopiaekvivalenssin suhteen. Sitten perusryhmiä lasketaan erilaisille topologisille avaruuksille – ensin triviaaleissa tapauksissa ja sitten ympyrän ja pallon tapauksessa.

Työn tuloksia sovelletaan kahden eri lauseen, algebran peruslauseen ja Brouwerin kiintopistelauseen, todistamisessa. Ongelman esittäminen topologisten avaruuksien välisenä vaihdannaiskaaviona, jossa se voidaan funktorin avulla kuvata perusryhmien väliseksi vaihdannaiskaavioksi, mahdollistaa ongelman ratkaisemisen algebrallisin menetelmin.

Avainsanat algebrallinen topologia, homotopia, funktori, perusryhmä, brouwerin kiintopistelause, algebran peruslause

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Aalto University, P.O. BOX 11000, 00076 AALTO
www.aalto.fi
Abstract of the bachelor's thesis

Author Eeli Harlas

Title Homotopy group

Degree programme Bachelor's Programme in Science and Technology

Major Mathematics and Systems Sciences **Code of major** SCI3029

Teacher in charge PhD Pekka Alestalo

Advisor PhD Pekka Alestalo

Date 20.8.2025 **Number of pages** 41 **Language** Finnish

Abstract

In this thesis, we derive the first homotopy group, also known as the fundamental group, for each topogical space. To each continuous map, we define the induced homomorphism between fundamental groups. We show that this mapping between topology and algebra defines the fundamental group functor, which is homotopy invariant. We calculate the fundamental groups of various spaces – first in trivial cases and then for the sphere and the ball.

We apply the results in proving two different theorems: the fundamental theorem of algebra and the Brouwer fixed-point theorem. Presenting the problem as a commutative diagram, to which the functor can then be applied to, allows solving the problem in algebraic terms.

Keywords algebraic topology, homotopy, functor, fundamental group, brouwer fixed-point theorem, fundamental theorem of algebra

Sisällys

Tiivistelmä **3**

Tiivistelmä (englanniksi) **4**

Sisällys **5**

1 Johdanto **6**

2 Merkinnät ja terminologia **7**

3 Kategoria ja funktori **8**

4 Homotopia **11**
4.1 Yleisesti 11
4.2 Polkuhomotopia 15

5 Perusryhmä **19**

6 Esimerkit **26**
6.1 Yhdesti yhtenäisyys 26
6.2 Ympyrä tasossa 27
6.3 Pallo ylemmissä ulottuvuuksissa 34

7 Sovellukset **37**
7.1 Algebran peruslause 37
7.2 Brouwerin kiintopistelause 39

1 Johdanto

Algebrallinen topologia ratkaisee topologian ongelmia muuntamalla ne algebrallisiksi ongelmiksi. Tätä varten on hyödyllistä esittää ongelma kaaviona

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[dl, "g"] \\ Z & \end{tikzcd} \tag{1}$$

missä X, Y, Z ovat topologisia avaruuksia ja niiden väliset nuolet f, g, h ovat jatkuvia kuvauksia. Jos $h = g \circ f$, niin kaavio on *vaihdannainen*. Topologiset avaruudet ja niiden väliset jatkuvat kuvaukset muodostavat *kategorian*.

Kun ongelma on esitetty kaaviona, kuten (1), voidaan se muuntaa algebralliseen muotoon *funktorin* avulla, joka kuvaa topologisen avaruuden X joksikin algebralliseksi objektiksi $A(X)$ ja jatkuvan kuvauksen $f : X \to Y$ näiden algebrallisten objektien väliseksi indusoiduksi homomorfismiksi $A(f) : A(X) \to A(Y)$. Funktori säilyttää vaihdannaisuuden, jolloin kaavio (1) kuvautuu muotoon

$$\begin{tikzcd} A(X) \arrow[r, "A(f)"] \arrow[d, "A(h)"'] & A(Y) \arrow[dl, "A(g)"] \\ A(Z) & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Topologian yksi perusongelmista on avaruuksien luokittelu homotopiaa vaille. Koska homeomorfismi on ekvivalenssirelaatio, jakaa se topologiset avaruudet *homeomorfismityyppeihin*, jolloin voidaan kysyä ovatko kaksi topologista avaruutta homeomorfisia, $X \cong Y$, vai ei, $X \ncong Y$. Topologiassa tutkitaan homeomorfismityyppien *invariantteja*: jos $X \cong Y$ ja avaruudella X on tietty invariantti, niin myös avaruudella Y on tämä invariantti.

Algebrallisessa topologiassa käytetään homeomorfismia karkeampaa ekvivalenssirelaatiota, *homotopiaekvivalenssia*, joka ei erota jatkuvalla tavalla toisistaan deformoitavia avaruuksia mutta joka jakaa topologiset avaruudet *homotopiatyyppeihin*. Useat algebrallisessa topologiassa luotavat invariantit ovat homotopiainvariantteja: jos avaruuksilla X ja Y on sama homotopiatyyppi, niin avaruuksien algebralliset objektit ovat isomorfisia, eli $A(X) \cong A(Y)$. Lisäksi useat topologiset invariantit ovat myös laajemmin homotopiainvariantteja.

Algebrallisen topologian yksi funktoreista, *perusryhmäfunktori* π_1, liittää topologiseen avaruuteen X perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$, joka koostuu tietyn kantapisteen $x_0 \in X$ silmukoista, ja jatkuvaan kuvaukseen $f : X \to Y$ näiden ryhmien välisen indusoidun homomorfismin $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, joka kuvaa avaruuden X silmukan avaruuden Y silmukaksi. Tämä funktori on homotopiainvariantti; esimerkiksi pallo S^2 ja torus $S^1 \times S^1$ eivät ole homotopiaekvivalentteja (ja siten homeomorfisia), sillä niiden perusryhmät eivät ole isomorfisia.

Työn päätavoitteena on täydentää J. Rotmanin kirjan [4] perusryhmäfunktoria käsittelevää lukua 3, jossa suuri osa merkittävistä tuloksista on annettu harjoitustehtäviksi, loogisemmaksi kokonaisuudeksi. Lisäksi perusryhmäfunktorille ja sen homotopiainvarianttiudelle luodaan Rotmanin kirjaa perusteellisempi kategoriateoreettinen kehys, joka on saanut vaikutteita S. Mac Lanen kirjasta [3]. Vaikka suurin osa työstä perustuu Rotmanin kirjaan, on siitä myös paikoin poikettu; esimerkiksi ympyrän S^1 perusryhmän laskeminen perustuu yleisiin peiteavaruuksien ja nostojen tuloksiin, joiden todistukset saavat ideansa A. Hatcherin [1] ja E. Spanierin [7] kirjoista.

Kappaleessa 3 määritellään käsitteet kategoria ja funktori sekä luodaan pohjaa perusryhmäfunktoria varten. Kappaleessa 4 käsitellään homotopiaa – ensin yleisesti kappaleessa 4.1 ja sitten polkujen vaatimukset huomioon ottaen kappaleessa 4.2. Homotopiaan perustuen kappaleessa 5 esitellään perusryhmä ja indusoitu homomorfismi, joiden näytetään muodostavan homotopiainvariantti perusryhmäfunktori. Lopuksi tässä kappaleessa näytetään perusryhmäfunktorin ominaisuuksia.

Kappaleessa 6 muodostetaan perusryhmiä erilaisille topologisille avaruuksille. Ensimmäisenä kappaleessa 6.1 suljetaan pois mahdollisimman monta triviaalia perusryhmää, jotka ovat myös triviaaleja laskea. Toisena kappaleessa 6.2 selvitetään ympyrän perusryhmä, joka ei ole triviaali ja sen laskeminen ei ole triviaalia. Viimeisenä kappaleessa 6.3 näytetään, että pallon perusryhmä, toisin kuin ympyrän, on triviaali, mutta sen laskeminen osoittautuu myös epätriviaaliksi.

Kappaleessa 7 työn tuloksia sovelletaan kahteen ongelmaan: kappaleessa 7.1 algebran peruslauseeseen ja kappaleessa 7.2 Brouwerin kiintopistelauseeseen. Molemmissa tapauksissa ensin todistetaan lemma, jonka todistuksessa topologisten avaruuksien vaihdannaiskaavio, kuten (1), muutetaan perusryhmäfunktorin avulla perusryhmien väliseksi kaavioksi, kuten (2). Tämä lemma auttaa puolestaan merkittävästi itse lauseen todistamisessa.

2 Merkinnät ja terminologia

1. Isoilla kirjaimilla X, Y ja Z merkitään topologisia avaruuksia ja pienillä kirjaimilla f, g ja h jatkuvia kuvauksia näiden topologisten avaruuksien välillä. Tarvittaessa voidaan käyttää alaindeksejä – joko numeroituvia, $X_1, X_2, \ldots$, tai yleisemmin $\{X_k\}_{k\in J}$, indeksijoukolla J.

2. Merkintä $X \cong Y$ tarkoittaa, että topologiset avaruudet X ja Y ovat homeomorfisia.

3. Kuvauksien $f, g : X \to Y$ sanotaan **yksimielisiä** osajoukossa $A \subset X$, jos $f|A = g|A$.

4. Avaruutta $\mathbb{R}^n$ kutsutaan n-ulotteiseksi **euklidiseksi avaruudeksi**. Tähän avaruuteen on määritelty kaikille alkioille $x, y \in \mathbb{R}^n$ sisätulo $\langle x, y\rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, mikä puolestaan indusoi normin $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

5. Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukoista

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \quad \text{ja} \quad S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

ovat nimeltään **kuula** ja n-**ympyrä** (pelkästään **ympyrä**, jos $n = 1$, ja **pallo**, jos $n \geq 2$). Kiekon D^n reuna on S^{n-1} ja lisäksi reuna kuuluu kiekkoon, eli kiekko on suljettu.

6. Pallolle $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ määritellään **pohjoisnapa** $N = (0, 0, \ldots, 1) \in S^n$ ja **etelänapa** $S = (0, 0, \ldots, -1) \in S^n$.

7. Reaalilukujen $\mathbb{R}$ osajoukoista $I = [0, 1]$ on suljettu **yksikköväli**. Yksikkövälin reunaa $\{0, 1\}$ merkitään ∂I.

8. Avaruuden polkuja merkitään kreikkalaisilla kirjaimilla α, β ja γ.

9. Poluille on olemassa binäärioperaatio, jota tässä työssä kutsutaan polkutuloksi ja merkitään $\alpha\beta$. Selvyyden vuoksi kuvausten $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ kompositiota merkitään $g \circ f$.

10. Polkutulo on liitännäinen binäärioperaatio (lause 4.27), joten polkujen ekvivalenssiluokkien (äärellisille) tuloille voidaan merkitä

$$\prod_{i=1}^{n} [\alpha_i] = [\alpha_1][\alpha_2] \ldots [\alpha_n].$$

3 Kategoria ja funktori

Määritelmä 3.1. Kategoria $\mathcal{C}$ koostuu

1. kokoelmasta objekteja $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

2. erillisistä joukoista morfismeja $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, yksi jokaiselle parille objekteja $A, B \in \mathrm{Ob}(C)$, ja

3. kompositiosta $\mathrm{Hom}(A, B) \times \mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$, $(u, v) \mapsto v \circ u$ jokaiselle kolmelle objektille $A, B, C \in \mathrm{Ob}(C)$

siten, että

1. kompositio on liitännäinen, eli $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$, ja

2. jokaiselle $A \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ on olemassa sellainen yksikäsitteinen identiteettikuvaus $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$, että $f \circ 1_A = f$ kaikilla $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ja $1_A \circ g = g$ kaikilla $g \in \mathrm{Hom}(C, A)$.

Huomautus. Määritelmässä puhutaan objektien kokoelmasta eikä objektien joukosta, sillä ”kaikkien joukkojen joukko” on ongelmallinen käsite. Jos oletetaan joukon V sisältävän kaikki joukot, niin silloin myös $P(V) \subset V$, eli $|P(V)| \leq |V|$. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että yleisesti $|V| < |P(V)|$. Lisää kerrotaan esimerkiksi artikkelissa [6].

Työssä esiintyy kaksi merkittävää kategoriaa: topologisista avaruuksista ja niiden välisistä jatkuvista kuvauksista koostuva **Top** ja ryhmistä ja niiden välisistä homomofismeista koostuva **Groups**.

Kolmas työssä merkittävä kategoria, $\mathbf{Top}^2$, muodostetaan pareista (X, A) ja (Y, B), jossa X on topologinen avaruus ja $A \subset X$ on aliavaruus, ja morfismeista $f : X \to Y$, jotka ovat jatkuvia ja joille $f(A) \subset B$. Tämän ehdon toteuttavaa morfismia voidaan merkitä tiiviimmin $f : (X, A) \to (Y, B)$.

Määritelmä 3.2. Kategoria $\mathcal{A}$ on kategorian $\mathcal{C}$ **alikategoria**, jos

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ kaikilla $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ ja
3. kompositio kategoriassa $\mathcal{A}$ on yhtenevä kategorian $\mathcal{C}$ komposition kanssa.

Merkittävä alikategoria on kanta-avaruuksista (X, x_0) ja kantapisteitä säilyttävistä kuvauksista $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ muodostettava $\mathbf{Top}_*$. Tässä tapauksessa $f(x_0) = y_0$, mistä seuraa $f(\{x_0\}) \subset \{y_0\}$. Kategorialle $\mathbf{Top}^2$ näytettävät tulokset pätevät siis myös kategorialle $\mathbf{Top}_*$.

Määritelmä 3.3. Morfismia $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ kutsutaan kategorian **ekvivalenssiksi**, jos on olemassa morfismi $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$, jolle $f \circ g = 1_B$ ja $g \circ f = 1_A$.

Kategorian **Top** ekvivalenssit ovat homeomorfismeja ja kategorian **Groups** ryhmäisomorfismeja.

Seuraava rakenne mahdollistaa ekvivalenssia karkeampien luokittelujen muodostamisen.

Määritelmä 3.4. Ekvivalenssirelaatiota $\sim$ luokassa $\bigcup_{(A,B)} \mathrm{Hom}(A, B)$, joka koostuu kaikista morfismeista, kutsutaan kategorian $\mathcal{C}$ **kongruenssiksi**, jos seuraavat ehdot toteutuvat:

1. jos $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ja $f \sim f'$, niin $f' \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ja
2. jos $f \sim f'$ ja $g \sim g'$ sekä $g \circ f$ on määritelty, niin $g \circ f \sim g' \circ f'$.

Ensimmäisestä ehdosta seuraa, että kongruenssi osittaa morfismit $\mathrm{Hom}(A, B)$ ekvivalenssiluokkiin. Toisesta ehdosta seuraa, että kongruenssi on yhteensopiva kuvausten komposition kanssa.

Merkitään morfismien $\mathrm{Hom}(A, B)$ ositusta $[A, B]$, kun osittava kongruenssi tiedetään kontekstista. Jos morfismien joukko vaihdetaan sitä vastaavaan ositukseen, saadaan **tekijäkategoria** $\mathcal{C}/\sim$, joka määritellään seuraavalla tavalla.

Lause 3.5. *Jos $\mathcal{C}$ on kategoria ja $\sim$ on kongruenssi tässä kategoriassa, niin seuraava rakenne on kategoria:*

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\sim) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(A, B) = \{[f] : f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)\} = [A, B]$ *kaikille* $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\sim)$;

3. $[g] \circ [f] = [g \circ f]$*, kun* $g \circ f$ *on määritelty,*

missä $[f]$ *viittaa morfismin ekvivalenssiluokaan.*

Todistus. Objektit, morfismit ja kompositio ovat jo hyvin määriteltyjä. Näytetään komposition liitännäisyys ja identitettikuvauksen olemassaolo.

1. Jos $u \circ (v \circ w) = (u \circ v) \circ w$, niin

$$[u] \circ ([v] \circ [w]) = [u \circ (v \circ w)] = [(u \circ v) \circ w] = ([u] \circ [v]) \circ [w].$$

2. Jos $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}/\sim)$, niin $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, jolla on identiteettikuvaus $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$. Jos $[f] \in \mathrm{Hom}(A, B)$, niin $[f] \circ [1_A] = [f \circ 1_A] = [f]$, ja jos $g \in \mathrm{Hom}(C, A)$, niin $[1_A] \circ [g] = [1_A g] = [g]$. Siis $[1_A] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(A, A)$ on objektin A identiteettikuvaus.

□

Kategorioiden välille voidaan myös määritellä kuvauksia.

Määritelmä 3.6. Olkoon C ja D kategorioita. **Funktori** $T : C \to D$ kuvaa

1. kategorian C objektin $A \in \mathrm{obj}\ C$ kategorian D objektiin $T(A) \in \mathrm{obj}\ D$;

2. kategorian C morfismin $f : A \to B$ kategorian D morfismiin $T(f) : T(A) \to T(B)$ siten, että $T(1_A) = 1_{T(A)}$ kaikilla $A \in \mathrm{obj}\ C$ ja $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$, kun $g \circ f$ on määritelty.

Huomautus. Määritelmässä funktorin oletetaan säilyttävän morfismien suunnat, jolloin sanotaan, että funktorit ovat **kovariantteja**. On myös mahdollista, että funktori kääntää morfismit, jolloin puhutaan **kontravarianteista** funktoreista. Tällöin määritelmässä $f : A \to B$ kuvautuu morfismiksi $T(f) : T(B) \to T(A)$ ja $T(g \circ f) = Tf \circ Tg$. Tässä työssä funktorit ovat aina kovariantteja.

Funktori kuvaa ekvivalenssit ekvivalensseiksi.

Lause 3.7. *Olkoon* $T : C \to D$ *funktori kategoriasta* C *kategoriaan* D*. Jos* $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ *on ekvivalenssi kategoriassa* C*, niin* $Tf \in \mathrm{Hom}(T(A), T(B))$ *on ekvivalenssi kategoriassa* D*.*

Todistus. Olkoon $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ekvivalenssi kategoriassa C; ts. on olemassa $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$ siten, että $fg = 1_B$ ja $gf = 1_A$. Siten seuraa, että $(Tf)(Tg) = T(fg) = T(1_B) = 1_{T(B)}$ ja $(Tg)(Tf) = T(gf) = T(1_A) = 1_{T(A)}$, eli $Tf \in \mathrm{Hom}(T(A), T(B))$ on ekvivalenssi kategoriassa D. □

Lauseessa 3.5 esitettiin funktori $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/\sim$. Lauseesta 3.7 saadaan seuraava korollaari.

Korollaari 3.8. *Olkoon* $\sim$ *kategorian* $\mathcal{C}$ *kongruenssi. Jos* f *on ekvivalenssi kategoriassa* $\mathcal{C}$*, niin* $[f]$ *on ekvivalenssi kategoriassa* $\mathcal{C}/\sim$*.*

Kun myöhemmin näytetään homotopiaekvivalenssin olevan kongruenssi kategoriassa **Top**, tästä korollaarista seuraa, että homeomorfismit ovat myös homotopiaekvivalensseja.

Olkoon $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktori ja olkoon $\sim$ kategorian $\mathcal{C}$ kongruenssi. Jos funktorille pätee $T(f) = T(g)$, kun $f \sim g$, niin funktori T pystytään hajottamaan kategorian $\mathcal{C}/\sim$ kautta seuraavalla tavalla.

Lause 3.9. *Olkoot $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategorioita. Olkoon $\sim$ kongruenssi kategoriassa $\mathcal{C}$ ja olkoon $\mathcal{C}/\sim$ vastaava kongruenssikategoria. Jos $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ on funktori, jolle pätee $T(f) = T(g)$ kaikilla $f \sim g$, niin T määrittelee funktorin $T' : \mathcal{C}/\sim \to \mathcal{D}$ seuraavasti: $T'(X) = T(X)$ jokaiselle objektille X ja $T'([f]) = T(f)$ jokaiselle morfismille f.*

Todistus. Jos $[1_A]$ on objektin A identiteettikuvaus, niin

$$T'([1_A]) = T(1_A) = 1_{T(A)} = 1_{T'(A)}.$$

Jos $[f] \circ [g]$ on määritelty, niin

$$T'([f] \circ [g]) = T'([f \circ g]) = T(f \circ g) = T(f) \circ T(g) = T'([f]) \circ T'([g]).$$

□

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "T"'] & \mathcal{C}/\sim \arrow[dl, "T'"] \\
\mathcal{D} &
\end{tikzcd}$$

Kuva 1: Funktori $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ voidaan hajottaa kategorian $\mathcal{C}/\sim$ kautta.

Kuva 1 havainnollistaa lausetta 3.9. Seuraavan kahden kappaleen tavoitteena on luoda diagrammin toteuttava perusryhmäfunktori $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Groups}$, joka on homotopiainvariantti eli hajottuu kategorian $\mathbf{Toph}_*$ kautta.

4 Homotopia

4.1 Yleisesti

Määritelmä 4.1. Kuvaus $f_0 : X \to Y$ on **homotooppinen** kuvauksen $f_1 : X \to Y$ kanssa, jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $F : X \times I \to Y$, nimeltään **homotopia**, jolle

$$F(x, 0) = f_0(x) \quad \text{ja} \quad F(x, 1) = f_1(x)$$

kaikilla $x \in X$.

Huomautus. Jos merkitään $f_t(x) = F(x,t)$ kaikille $t \in I$ ja $x \in X$, niin saadaan perhe $\{f_t\}_{t\in I}$ jatkuvia kuvauksia $f_t : X \to Y$, jonka päätepisteinä ovat nämä homotooppiset kuvaukset. Voidaan siis ajatella, että jatkuvat kuvaukset ovat homotooppisia, jos yksi voidaan jatkuvalla tavalla muuntaa toiseksi jatkuvin välivaihein.

Huomautus. Kuvausten homotooppisuutta merkitään $F : f_0 \simeq f_1$ tai lyhyemmin $f_0 \simeq f_1$.

Seuraava apulause mahdollistaa osajoukoissa määriteltyjen jatkuvien kuvauksien yhdistämisen, olettaen päällekäisyyksien olevan yksikäsitteisesti määriteltyjä.

Lemma 4.2 (Liimauslause)**.** *Olkoon X äärellinen yhdiste suljettuja osajoukkoja, eli $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$. Jos jollekin avaruudelle Y on olemassa jatkuvien kuvauksien $X_i \to Y$ perhe $\{f_i\}_{i=1}^n$, jotka ovat yksimielisiä päällekkäisyyksien suhteen, eli $f_i|X_i \cap X_j = f_j|X_i \cap X_j$ kaikilla $1 \le i, j \le n$, niin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $f : X \to Y$, joka rajoittuu $f|X_i = f_i$ kaikilla $1 \le i \le n$.*

Todistus. Muodostetaan yksikäsitteisen jatkuva kuvaus $f : X \to Y$, joka rajoittuu $f|X_i = f_i$.

Hyvin määritelty: Jos $x \in X_i$, niin määritellään $f(x) = f_i(x)$. Jos myös $x \in X_j$, niin päällekkäisyyksien yksimielisyydestä seuraa $f_i(x) = f_j(x)$. Kuvaus $f : X \to Y$ on siis hyvin määritelty.

Rajoittuminen: Jos $x \in X_i$, niin määritelmän mukaisesti $f(x) = f_i(x)$, jolloin $f|X_i = f_i$.

Yksikäsitteisyys: Olkoon $g : X \to Y$ sellainen kuvaus, joka myös rajoittuu $g|X_i = f_i$ kaikilla $1 \le i \le n$. Jos $x \in X_k$, niin $g(x) = f_k(x) = f(x)$, eli kuvaus f on yksikäsitteinen.

Jatkuvuus: Jos $C \subset Y$ on suljettu joukko avaruuden Y topologiassa, niin

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) &= X \cap f^{-1}(C) \\ &= \bigcup_{i=1}^n X_i \cap f^{-1}(C) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (X_i \cap f_i^{-1}(C)) \\ &= \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C). \end{aligned}$$

Koska kuvaukset f_i ovat jatkuvia ja suljettujen joukkojen äärelliset yhdisteet ovat suljettuja, alkukuva $f^{-1}(C)$ on suljettu ja siten f on jatkuva. □

Liimauslauseesta on toinen yhtäpitävä muoto, jossa käytetään avoimia osajoukkoja.

Lemma 4.3. *Olkoon X (mahdollisesti ääretön) yhdiste avoimia osajoukkoja, eli $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Jos jollekin avaruudelle Y on olemassa jatkuvien kuvauksien $X_i \to Y$ perhe $\{f_i\}_{i\in I}$, jotka ovat yksimielisiä päällekkäisyyksien suhteen, eli $f_i|X_i \cap X_j = f_j|X_i \cap X_j$ kaikilla $i, j \in I$, niin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $f : X \to Y$, joka rajoittuu $f|X_i = f_i$ kaikilla $i \in I$.*

Todistus. Todistus on samanlainen lemman 4.2 todistuksen kanssa. □

Homotopia on relaationa refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

Lause 4.4. *Homotopia on ekvivalenssirelaatio jatkuvien kuvauksien $X \to Y$ joukossa.*

Todistus. Näytetään, että homotopia on relaationa refleksiivinen, symmetrinen ja transitiivinen.

Refleksiivisyys: Kuvaukselle $f : X \to Y$ voidaan määritellä $F : X \times I \to Y$ kaavalla $F(x,t) = f(x)$. Tällöin F on jatkuva, sekä $F(x,0) = f(x)$ ja $F(x,1) = f(x)$ kaikilla $x \in X$. Siis $F : f \simeq f$.

Symmetrisyys: Olkoot $f, g : X \to Y$ kuvauksia ja oletetaan $F : f \simeq g$. Määritellään $G : X \times I \to Y$ kaavalla $G(x,t) = F(x, 1-t)$. Silloin G on jatkuva, $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$ ja $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ kaikilla $x \in X$. Siis $G : g \simeq f$.

Transitiivisuus: Olkoot $f, g, h : X \to Y$ kuvauksia, ja oletetaan $F : f \simeq g$ ja $G : g \simeq h$. Määritellään $H : X \times I \to Y$ kaavalla

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & \text{jos } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & \text{jos } \frac{1}{2} \leq t \leq 1,. \end{cases}$$

Koska välien leikkauskohdassa $t = \frac{1}{2}$ pätee $F(x,2t) = g(x) = F(x,2t-1)$ kaikilla $x \in X$, niin liimauslauseen perusteella (lemma 4.2) kuvaus H on jatkuva. Lisäksi $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ ja $H(x,1) = G(x,1) = h(x)$ kaikilla $x \in X$. Siis $H : f \simeq h$. □

Homotopia ekvivalenssirelaationa osittaa jatkuvien kuvauksien $X \to Y$ joukon ekvivalenssiluokkiin.

Määritelmä 4.5. Kuvauksen $f : X \to Y$ kanssa homotooppiset kuvaukset muodostavat ekvivalenssiluokan

$$[f] = \{g : X \to Y : f \simeq g\},$$

jota kutsutaan **homotopialuokaksi**.

Jatkuvien kuvausten kompositio on yhteensopiva homotopian kanssa.

Lause 4.6. *Olkoot $f_0, f_1 : X \to Y$ ja $g_0, g_1 : Y \to Z$ kuvauksia. Jos $f_0 \simeq f_1$ ja $g_0 \simeq g_1$, niin $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Todistus. Olkoot $F : f_0 \simeq f_1$ ja $G : g_0 \simeq g_1$. Määritellään $H : X \times I \to Z$ kaavalla

$$H(x,t) = G(F(x,t),t).$$

Kuvausten kompositiona H on jatkuva. Lisäksi

$$H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f_0(x),0) = g_0(f_0(x)) = (g_0 \circ f_0)(x)$$

ja

$$H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(f_1(x),1) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$$

kaikilla $x \in X$. Siis $H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. □

Lauseen 4.6 perusteella on mahdollista määritellä kompositio $[f][g] = [f \circ g]$ joukossa $[X, Y]$.

Korollaari 4.7. *Homotopia on kongruenssi kategoriassa Top.*

Todistus. Seuraus lauseista 4.4 ja 4.6. □

Määritelmä 4.8. Määritellään homotopiakategoria **Toph** seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ob}(\mathbf{Toph}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}),\\
&\mathrm{Hom}_{\mathbf{Toph}}(A, B) = [A, B] \text{ kaikille } A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Top}) \text{ ja}\\
&[f][g] = [f \circ g] \text{ , kun } f \circ g \text{ on määritelty.}
\end{aligned}$$

Homotopiakategorian **Toph** objektit ovat samoja topologiakategorian **Top** kanssa, mutta homotopiakategorian morfismit ovat homotopialuokkia, jolloin keskenään homotooppiset kuvaukset on samastettu.

Topologiakategorian **Top** näkökulmasta homotopiakategorian ekvivalenssit ovat niitä morfismeja $f : X \to Y$, joille pätee $f \circ g \simeq 1_Y$ ja $g \circ f \simeq 1_X$ jollain $g : Y \to X$.

Määritelmä 4.9. Kuvaus $f : X \to Y$ on **homotopiaekvivalenssi**, jos on olemassa sellainen $g : Y \to X$ että $g \circ f \simeq 1_X$ ja $f \circ g \simeq 1_Y$.

Jos $f : X \to Y$ on homotopiaekvivalenssi, avaruuksilla X ja Y sanotaan olevan sama **homotopiatyyppi**. Homotopiatyyppi lajittelee avaruuksia karkeammin kuin homeomorfisuus.

Lause 4.10. *Homeomorfisilla avaruuksilla on sama homotopiatyyppi.*

Todistus. Tämä seuraa yleisestä tapauksesta, korollaarista 3.8. □

Määritelmä 4.11. Jos $y_0 \in Y$, **vakiokuvaukseksi** kutsutaan kuvausta $c : X \to Y$, määriteltynä $c(x) = y_0$ jokaiselle $x \in X$.

Määritelmä 4.12. Kuvaus $f : X \to Y$ on **nollahomotooppinen**, jos f on homotooppinen jonkin vakiokuvauksen $c : X \to Y$ kanssa.

Määritelmä 4.13. Avaruus X on **kutistuva**, jos 1_X on nollahomotooppinen.

Kutistuvat avaruudet ovat homotopiakategorian **Toph** yksinkertaisimpia objekteja.

Lause 4.14. *Avaruudella X on sama homotopiatyyppi kuin pisteellä jos ja vain jos X on kutistuva.*

Todistus. Oletetaan, että avaruuksilla X ja $\{y\}$ on sama homotopiatyyppi. On siis olemassa kuvaukset $f : X \to \{y\}$ ja $g : \{y\} \to X$, joille pätee $g \circ f \simeq 1_X$ ja $f \circ g \simeq 1_{\{y\}}$. Kuvaus f on vakiokuvaus pisteeseen y ja $(g \circ f)(x) = g(y)$ on vakio kaikilla $x \in X$, jolloin 1_X on nollahomotooppinen ja X on kutistuva.

Oletetaan $1_X \simeq k$, kun $k(x) = x_0$. Määritellään $f : \{x_0\} \to X$ kaavalla $f(x_0) = x_0$ ja määritellään $g : X \to \{x_0\}$ kaavalla $g(x) = x_0$. Saadaan $g \circ f = 1_{x_0}$ ja $f \circ g = k \simeq 1_X$ oletuksesta. Siis $f : \{x_0\} \to X$ on homotopiaekvivalenssi, ja avaruudella X on sama homotopiatyyppi kuin pisteellä. □

Lause 4.15. *Jos Y on kutistuva, niin kaikki kuvaukset $X \to Y$ ovat nollahomotooppisia.*

Todistus. Oletetaan, että $1_Y \simeq k$, kun $k : Y \to Y$ on vakiokuvaus $k(y) = y_0$ jollain $y_0 \in Y$ kaikille $y \in Y$. Määritellään $g : X \to Y$ kuvaamalla $g(x) = y_0$ kaikille $x \in X$. Jos $f : X \to Y$ on jatkuva, niin

$$f = 1_Y \circ f \simeq k \circ f = g$$

lauseella 4.6. □

4.2 Polkuhomotopia

Määritelmä 4.16. **Polku** on jatkuva kuvaus $\alpha : I \to X$, joka **alkaa** pisteestä $\alpha(0)$ ja **päättyy** pisteeseen $\alpha(1)$.

Kun ensimmäinen polku päättyy pisteeseen, josta toinen alkaa, pystytään nämä polut yhdistämään uudeksi poluksi.

Määritelmä 4.17. Olkoot $\alpha, \beta : I \to X$ polkuja, joille $\alpha(1) = \beta(0)$. Määritellään **polkutulo** $\alpha\beta : I \to X$ kaavalla

$$(\alpha\beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{jos } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1), & \text{jos } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

jokaiselle $t \in I$.

Määritelmä 4.18. Olkoon $p \in X$. **Vakiopolku** $i_p : I \to X$ määritellään $i_p(t) = p$ kaikilla $t \in I$

Määritelmä 4.19. Polun $\alpha : I \to X$ **vastapolku** $\alpha^{-1} : I \to X$ määritellään $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$ kaikilla $t \in I$.

Määritelmissä käytetty merkintätapa viittaisi siihen, että poluista ja polkutulosta voisi muodostaa ryhmän. Vakio- ja vastapolku eivät toimi kuitenkaan neutraali- ja käänteisalkioina: yleisesti $\alpha\alpha^{-1} \neq i_{\alpha(0)}$ ja $i_{\alpha(0)}\alpha \neq \alpha$; vastapolku α^{-1} ei kumoa polkua α ja $i_{\alpha(0)}\alpha$ on polku, jossa $(i_{\alpha(0)}\alpha)(t) = i_{\alpha(0)}(2t)$ kaikilla $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Hyödynnetään homotopialuokkia ja kompositiota algebrallisen rakenteen luomiseen. Jos kuitenkin X on kutistuva, kaikki polut $I \to X$ ovat nollahomotooppisia ja siten homotooppisia keskenään (Lause 4.15). Tarvitaan siis yleisempi versio homotopiasta, jossa tiettyjä avaruuden pisteitä pidetään paikoillaan.

Määritelmä 4.20. Olkoon $f_0, f_1 : X \to Y$ jatkuvia ja $A \subset X$ osajoukko. Tällöin f_0 on **homotooppinen** f_1:n kanssa **osajoukon** A **suhteen**, mikäli on olemassa jatkuva kuvaus $F : X \times I \to Y$, nimeltään **relatiivinen homotopia**, jolle

$$F(x, 0) = f_0(x) \quad \text{ja} \quad F(x, 1) = f_1(x).$$

kaikilla $x \in X$ ja

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$$

kaikilla $a \in A$ ja $t \in I$.

Huomautus. Jos f_0 ja f_1 ovat homotooppisia osajoukon A suhteen, niin merkinnällä $f_t(x) = F(x,t)$ kaikille $t \in I$ ja $x \in X$ saadaan perhe $\{f_t\}_{t\in I}$ jatkuvia kuvauksia $f_t : X \to Y$, ja tämän perheen päätepisteet ovat f_0 ja f_1. Toisesta ehdosta seuraa, että perheen kuvaukset kuvaavat osajoukon A samalla tavoin: $f_t|A = f_s|A$ kaikilla $s, t \in I$. Intuitiivisesti ajateltuna kuvaukset ovat homotooppisia osajoukon A suhteen, jos yksi voidaan muuntaa toiseksi pitämällä osajoukon A pisteitä paikoillaan.

Huomautus. Kuvausten relatiivista homotooppisuutta merkitään $F : f_0 \simeq f_1$ rel A.

Huomautus. Kun $A = \emptyset$, relatiivinen homotopia vastaa aikaisemmin määriteltyä vapaata homotopiaa. Relatiivinen homotopia on siis yleistys vapaasta homotopiasta.

Lause 4.21. *Homotopia* rel A *on ekvivalenssirelaatio kuvausten* $(X, A) \to (Y, B)$ *joukossa.*

Todistus. Täydennetään vapaan homotopian tapauksen todistusta (lause 4.4).

Refleksiivisyys: Jos $f : (X, A) \to (Y, B)$ on jatkuva, voidaan $F : X \times I \to Y$ määritellä kaavalla $F(x,t) = f(x)$. Saadaan $F(a,t) = f(a)$ kaikilla $a \in A$ ja $t \in I$. Siis $F : f \simeq f$ rel A.

Symmetrisyys: Olkoot $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ kuvauksia, joille pätee $F : f \simeq g$ rel A. Määritellään $G : X \times I \to Y$ kaavalla $G(x,t) = F(x, 1-t)$. Saadaan $G(a,t) = F(a, 1-t) = f(a) = g(a)$ kaikilla $a \in A$ ja $t \in I$. Siis $G : g \simeq f$ rel A.

Transitiivisuus: Olkoot $f, g, h : (X, A) \to (Y, B)$ jatkuvia ja oletetaan $F : f \simeq g$ rel A ja $G : g \simeq h$ rel A. Käytetään samaa homotopiaa, $H : X \times I \to Y$, kuin aiemmassa todistuksessa. Jos $0 \le t \le \frac{1}{2}$, niin $H(a,t) = F(a, 2t) = f(a) = G(a, 2t) = h(a)$, ja jos $\frac{1}{2} \le t \le 1$, niin $H(a,t) = G(a, 2t-1) = h(a) = F(a, 2t-1) = f(a)$, kaikilla $a \in A$. Siis $H : f \simeq h$ rel A. □

Lause 4.22. *Olkoot* $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ *ja* $g_0, g_1 : (Y, B) \to (Z, C)$ *kuvauksia. Jos* $f_0 \simeq f_1$ rel A *ja* $g_0 \simeq g_1$ rel B*, niin* $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ rel A.

Todistus. Täydennetään vapaan homotopian tapauksen todistusta (lause 4.6). Olkoot $F : f_0 \simeq f_1$ rel A ja $G : g_0 \simeq g_1$ rel B. Käytetään samaa homotopiaa $H : X \times I \to Z$, joka määritellään

$$H(x,t) = G(F(x,t), t).$$

Jokaisella $a \in A$ ja $t \in I$ saadaan

$$(g_0 \circ f_0)(a) = g_0(f_0(a)) = G(f_0(a), t) = G(F(a,t), t) = H(a,t),$$

sillä $f_0(A) \subset B$, ja

$$(g_1 \circ f_1)(a) = g_1(f_1(a)) = G(f_1(a), t) = G(F(a,t), t) = H(a,t),$$

sillä $f_1(A) \subset B$. Siis $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ rel A. □

Korollaari 4.23. *Relatiivinen homotopia on kongruenssi kategoriassa* $\mathbf{Top}^2$.

Polkujen homotopiaa on mielekästä tutkia, kun polun alku- ja päätepisteitä pidetään paikoillaan, eli rel ∂I. Lauseesta 4.21 seuraa, että homotopia rel ∂I osittaa polut $I \to X$ ekvivalenssiluokkiin.

Määritelmä 4.24. Polun $\alpha : I \to X$ kanssa rel ∂I homotooppiset kuvaukset muodostavat ekvivalenssiluokan

$$[\alpha] = \{\beta : X \to Y : \alpha \simeq \beta \text{ rel } \partial I\},$$

jota kutsutaan **polkuluokaksi**.

Huomautus. Polkujen homotopia on tässä työssä aina päätepisteiden suhteen relatiivinen, joten merkitä $[\alpha]$ ei aiheuta sekaannusta polun vapaan homotopialuokan kanssa.

Polkutulo on yhteensopiva polkuhomotopian kanssa.

Lause 4.25. *Olkoot $\alpha, \alpha', \beta, \beta' : I \to X$ polkuja, joille polkutulo $\alpha\beta$ on määritelty. Jos $[\alpha] = [\beta']$ ja $[\beta] = [\beta']$, niin $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$.*

Todistus. Olkoot $F : \alpha \simeq \alpha'$ rel ∂I ja $G : \beta \simeq \beta'$ rel ∂I. Määritellään homotopia $H : I \times I \to X$ kaavalla

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s), & \text{jos } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(2t-1,s), & \text{jos } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Koska polkutulo $\alpha\beta$ on määritelty, pisteissä $(t,s) \in \{\frac{1}{2}\} \times I$ pätee $F(2t,s) = \alpha(1) = \beta(0) = G(2t-1,s)$, eli liimauslauseen perusteella (lemma 4.2) H on jatkuva. Saadaan $H(t,0) = (\alpha\beta)(t)$ ja $H(t,1) = (\alpha'\beta')(t)$ kaikilla $t \in I$. Lisäksi $H(0,s) = (\alpha\beta)(0) = (\alpha'\beta')(0)$ ja $H(1,s) = (\alpha\beta)(1) = (\alpha'\beta')(1)$ kaikilla $s \in I$. Siis $\alpha\beta \simeq \alpha'\beta'$ rel ∂I. $\square$

Polkuluokille on nyt mahdollista luoda tulo $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ polkutulon $\alpha\beta$ pohjalta, joka riippuu vain polkuluokasta.

Merkitään polkuluokan $[\alpha]$ alku- ja päätepisteitä $p = \alpha(0)$ ja $q = \alpha(1)$. Kun alku- ja loppupisteiden vakiopolkujen polkuluokkia merkitään $[i_p]$ ja $[i_q]$ ja vastapolun polkuluokkaa $[\alpha^{-1}]$, saadaan seuraava lause.

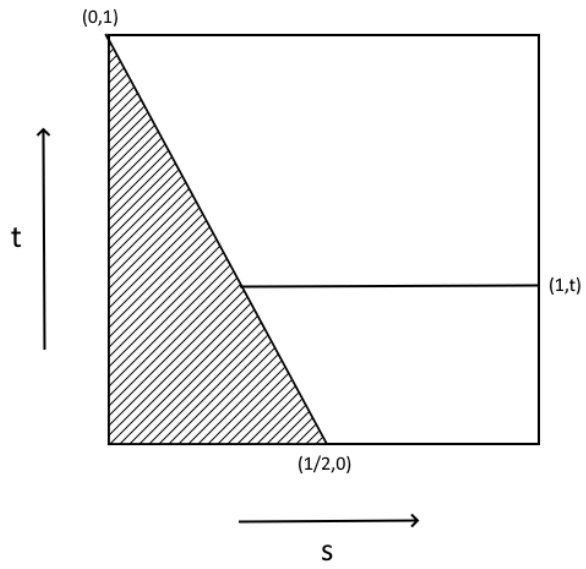
Lause 4.26. *Polkuluokalle $[\alpha]$ pätee*

1. $[i_p][\alpha] = [\alpha] = [\alpha][i_q]$,
2. $[\alpha][\alpha^{-1}] = [i_p]$ *ja* $[\alpha^{-1}][\alpha] = [i_q]$.

Todistus. Jos $t \in I$, niin merkitään $\theta_t : [(1-t)/2, 1] \to [0,1]$ jatkuvaa kuvausta reaaliakselin väliltä $[(1-t)/2, 1]$ reaaliakselin välille $[0,1]$, joka määritellään

$$\theta_t(s) = \frac{s - (1-t)/2}{1 - (1-t)/2}$$

kaikille $s \in I$. Huomataan, että $\theta_t((1-t)/2) = 0$ ja $\theta_t(1) = 1$.



Kuva 2: Miten polkuparametri $s \in I$ ja homotopiaparametri $t \in I$ riippuvat toisistaan.

1. Näytetään $i_p\alpha \simeq \alpha$ rel ∂I. Toinen puoli todistetaan samalla tavalla.

   Kun $t \in I$ on homotopiaparametri, jaetaan yksikköväli $[0,1]$ kahteen osaan: $[0,(1-t)/2]$ ja $[(1-t)/2,1]$. Jos $s \in [0,(1-t)/2]$, eli $s \leq (1-t)/2$, niin (s,t) kuuluu kuvan 2 mukaisesti suoran alapuolelle, viivatulle alueelle. Jos $s \in [(1-t)/2,1]$, eli $s \geq (1-t)/2$, niin (s,t) kuuluu suoran yläpuolelle. Määritellään kuvaus $H : I \times I \to X$ seuraavasti:

   $$H(s,t) = \begin{cases} p, & \text{jos } s \leq (1-t)/2, \\ \alpha(\theta_t(s)), & \text{jos } s \geq (1-t)/2, \end{cases}$$

   kun $s \in I$ on polku- ja $t \in I$ on homotopiaparametri. Liimauslauseen perusteella (lemma 4.2) kuvaus H on jatkuva. Huomataan, että $H(s,0) = i_p\alpha(s)$ ja $H(s,1) = \alpha(s)$ kaikilla $s \in I$. Lisäksi

   $$H(0,t) = p = \alpha(0) \quad \text{ja} \quad H(1,t) = \theta_t(1) = 1,$$

   jolloin saadaan $i_p\alpha \simeq \alpha$ rel ∂I.

2. Näytetään $\alpha\alpha^{-1} \simeq i_p$ rel ∂I. Toinen puoli todistetaan samalla tavalla. Tapausta voi havainnollistaa kuvalla, kuten kuvassa 2, mutta näytetään tässä vain tarpeellinen relatiivinen homotopia (kuvan löytää esimerkiksi kirjasta [9, s. 159]). Määritellään $H : I \times I \to X$ seuraavasti:

   $$H(s,t) = \begin{cases} \alpha(2s(1-t)), & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \alpha(2(1-s)(1-t)), & \text{jos } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

kun $s \in I$ on polku- ja $t \in I$ on homotopiaparametri. Liimauslauseen perusteella kuvaus on jatkuva. Huomataan, että

$$H(s,0) = \begin{cases} \alpha(2s) & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \alpha(2-2s) & \text{jos } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

ja

$$H(s,1) = \begin{cases} \alpha(0) & \text{jos } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \alpha(0) & \text{jos } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eli $H(s,0) = (\alpha\alpha^{-1})(s)$ ja $H(s,1) = i_p(s)$. Lisäksi $H(0,t) = i_p(0) = (\alpha\alpha^{-1})(0)$ ja $H(1,t) = i_p(1) = (\alpha\alpha^{-1})(1)$ kaikilla $t \in I$, jolloin saadaan $\alpha\alpha^{-1} \simeq i_p$ rel ∂I.

□

Tulo $([\alpha][\beta])[\gamma]$ on määritelty, kun $[\alpha]$ päättyy pisteeseen, josta $[\beta]$ alkaa, ja kun $[\alpha][\beta]$ päättyy pisteeseen, josta $[\gamma]$ alkaa. Tällaisessa tapauksessa tulo on liitännäinen ja voidaan merkitä $[\alpha][\beta][\gamma]$ ilman sekaannusta.

Lause 4.27. *Jos* $([\alpha][\beta])[\gamma]$ *ja* $[\alpha]([\beta][\gamma])$ *ovat määriteltyjä, niin*

$$([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma]).$$

Todistus. Kts. [4, s. 43]. Todistus on hyvin samanlainen lauseen 4.26 todistuksen kanssa. □

5 Perusryhmä

Mielekäs tapa muodostaa topologisen avaruuden X polkuluokista ryhmä on tutkia tietyn kantapisteen $x_0 \in X$ kautta kulkevien silmukoiden polkuluokkia. Tällöin relevantti kategoria on $\mathbf{Top}_*$, jonka objektit ovat pareja (X, x_0) ja jonka morfismit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ säilyttävät kantapisteen, eli $f(x_0) = y_0$.

Määritelmä 5.1. Polku $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ on **silmukka**, jos $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$.

Huomautus. Silmukan polkuluokkaa kutsutaan **silmukkaluokaksi**.

Määritelmä 5.2 (Ryhmä)**.** Olkoon G joukko ja olkoon $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, binäärioperaatio. Joukkoa G ja siihen liittyvää binäärioperaatiota kutsutaan ryhmäksi, jos

1. binäärioperaatio on liitännäinen, eli $a(bc) = (ab)c$ kaikilla $a, b, c \in G$,
2. joukkoon kuuluu neutraalialkio $e \in G$, jolle $xe = ex = x$ kaikilla $x \in G$ ja
3. jokaiselle $x \in G$ on olemassa käänteisalkio $x^{-1} \in G$, jolle $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.

Huomautus. Jos neutraalialkio ja käänteisalkio ovat olemassa, ne ovat myös yksikäsitteisiä.

Koska silmukka alkaa ja päättyy samaan pisteeseen, polkutulo on aina määritelty. Tällöin lauseesta 4.27 seuraa, että silmukkaluokkien tulo on liitännäinen ja lauseesta 4.26, että $[i_{x_0}]$ on neutraalialkio ja että jokaisella silmukkaluokalla $[\alpha]$ on käänteisalkio $[\alpha^{-1}]$. Silmukkaluokat ja niille määritelty tulo muodostavat ryhmän.

Määritelmä 5.3. Kantapisteavaruuden (X, x_0) **perusryhmä** on

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] : [\alpha] \text{ on polkuluokka, jolle } \alpha(0) = x_0 = \alpha(1)\},$$

kun binäärioperaatio on $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$.

Koska avaruuden $\mathbf{Top}_*$ morfismit $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ovat jatkuvia ja säilyttävät kantapisteen, voidaan avaruuden (X, x_0) silmukka $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ muuntaa avaruuden (Y, y_0) silmukaksi kompositiolla: $h \circ \alpha : (I, \partial I) \to (Y, y_0)$.

Lause 5.4. *Kuvaus $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ indusoi homomorfismin*

$$\begin{aligned} \pi_1(h) : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\mapsto [h \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Huomautus. Indusoitua homomorfismia merkitään myös lyhyemmin h_*.

Todistus. Olkoot $\alpha, \beta : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ silmukoita, joille pätee $[\alpha] = [\beta]$ eli $\alpha \simeq \beta$ rel ∂I. Jos $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ on jatkuva kuvaus, niin lauseen 4.22 perusteella $h \circ \alpha \simeq h \circ \beta$ rel ∂I eli $[h \circ \alpha] = [h \circ \beta]$. Indusoitu homomorfismi on hyvin määritelty.

Olkoot $\alpha, \beta : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ silmukoita ja olkoon $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ jatkuva. Saadaan

$$\pi_1(h)([\alpha][\beta]) = [h \circ (\alpha\beta)] \quad \text{ja} \quad \pi_1(h)([\alpha])\pi_1(h)([\beta]) = [(h \circ \alpha)(h \circ \beta)].$$

Jos $t \in [0, \frac{1}{2}]$, niin $h \circ (\alpha\beta) = h \circ \alpha$ ja $(h \circ \alpha)(h \circ \beta) = h \circ \alpha$. Samoin jos $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, niin $h \circ (\alpha\beta) = h \circ \beta$ ja $(h \circ \alpha)(h \circ \beta) = h \circ \beta$. Saadaan $h \circ (\alpha\beta) = (h \circ \alpha)(h \circ \beta)$. Siis

$$\pi_1(h)([\alpha][\beta]) = \pi_1(h)([\alpha])\pi_1(h)([\beta]),$$

eli indusoitu homomorfismi on ryhmähomomorfismi. □

Lause 5.5. *1. Identiteettikuvauksen $1_{(X,x_0)}$ indusoima homomorfismi $\pi_1(1_{(X,x_0)})$ on ryhmän $\pi_1(X, x_0)$ identiteettikuvaus: $\pi_1(1_{(X,x_0)}) = 1_{\pi_1(X,x_0)}$.*

2. Jos $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$, niin $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$.

Todistus. 1. Jos $[\alpha]$ on silmukkaluokka, niin

$$\pi_1(1_{(X,x_0)})[\alpha] = [1_{(X,x_0)} \circ \alpha] = [\alpha] = 1_{\pi_1(X,x_0)}[\alpha].$$

2. Jos $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ on silmukka, niin

$$\pi_1(g \circ f)[\alpha] = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = \pi_1(g)[f \circ \alpha] = (\pi_1(g) \circ \pi_1(f))[\alpha].$$

□

Korollaari 5.6. *Kuvaus* $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Groups}$ *on funktori.*

Kun kantapisteavaruuksien väliset kuvaukset $h, k : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ovat homotooppisia, kantapiste pysyy homotopiassa paikoillaan, eli kyseessä on relatiivinen homotopia.

Funktori π_1 on homotopiainvariantti kantapisteen suhteen.

Lause 5.7. *Jos* $h, k : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *ovat kuvauksia ja* $h \simeq k$ rel x_0*, niin* $\pi_1(h) = \pi_1(k)$.

Todistus. Olkoot $h, k : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ kuvauksia, joille pätee $h \simeq k$ rel x_0. Jos $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ on silmukka, niin lauseesta 4.22 seuraa $h \circ \alpha \simeq k \circ \alpha$ rel x_0, eli $\pi_1(h) = \pi_1(k)$. □

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Top}_* \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbf{Toph}_* \arrow[dl, "\pi_1'"] \\
\mathbf{Groups}, &
\end{tikzcd}$$

Kuva 3: Perusryhmäfunktori $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Groups}$ voidaan hajottaa homotopiakategorian $\mathbf{Toph}_*$ kautta.

Kantapistehomotopiassa homotopiakategoriaa merkitään $\mathbf{Toph}_*$. Lauseen 3.8 mukaisesti π_1 toteuttaa kuvan 3 kaavion, missä $\pi_1'(X) = \pi_1(X)$ ja $\pi_1'([f]) = \pi_1(f)$.

Kantapisteen valinnalla voi olla merkitystä, jos avaruus ei ole polkuyhtenäinen.

Lause 5.8. *Jos* $x_0 \in X$ *piste, joka kuuluu* X*:n polkukomponenttiin* X_0*, niin*

$$\pi_1(X_0, x_0) \cong \pi_1(X, x_0). \tag{3}$$

Todistus. Olkoon $j : (X_0, x_0) \to (X, x_0)$ inkluusiokuvaus. Näytetään, että indusoitu homomorfismi

$$\begin{aligned} j_* = \pi_1(j) : \pi_1(X_0, x_0) &\to \pi_1(X, x_0) \\ [\alpha] &\mapsto [j \circ \alpha] \end{aligned}$$

on isomorfismi.

Injektiivisyys: Olkoon $[\alpha] \in \ker j_*$, eli $F : j \circ \alpha \simeq i_{x_0}$ rel ∂I, missä $i_{x_0} : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ on vakiopolku avaruudessa (X, x_0). Koska $F(I \times I)$ on polkuyhtenäinen, niin $F(I \times I) \subset X_0$. Kun homotopia $G : I \times I \to X_0$ määritellään kaavalla $G(s,t) = F(s,t)$, niin saadaan $G : \alpha \simeq i'_{x_0}$ rel ∂I, missä $i'_{x_0} : (I, \partial) \to (X_0, x_0)$ on vakiopolku avaruudessa (X_0, x_0). Siis $\ker j_* = \{i'_{x_0}\}$, eli j_* on injektiivinen.

Surjektiivisuus: Jos $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ silmukka, eli suljettu polku, niin $\alpha(I) \subset X_0$. Jos määritellään silmukka $\alpha' : (I, \partial I) \to (X_0, x_0)$ kaavalla $\alpha'(t) = \alpha(t)$, niin $j \circ \alpha' = \alpha$, jolloin $j_*[\alpha'] = [j \circ \alpha'] = [\alpha]$. Siis j_* on surjektiivinen. □

Polkuyhtenäisissä avaruuksissa kantapiste voidaan valita vapaasti.

Lause 5.9. *Jos X polkuyhtenäinen, niin*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1) \tag{4}$$

kaikilla $x_0, x_1 \in X$.

Todistus. Olkoon ϕ polku pisteestä x_0 pisteeseen x_1. Jos $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, niin

$$[\phi^{-1}][\alpha][\phi] \in \pi_1(X, x_1),$$

sillä polkutulot $\phi^{-1}\alpha$ ja $(\phi^{-1}\alpha)\phi$ ovat määriteltyjä. Näytetään, että kuvaus

$$\begin{aligned} j : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, x_1) \\ [\alpha] &\mapsto [\phi^{-1}][\alpha][\phi] \end{aligned}$$

on isomorfismi.

Homomorfisuus: Jos $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, niin

$$j([\alpha][\beta]) = [\phi^{-1}][\alpha][\beta][\phi] = [\phi^{-1}][f][\phi][\phi^{-1}][g][\phi] = j([f])j([g]).$$

Bijektiivisyys: Näytetään, että kuvauksella j on kaksipuolinen käänteiskuvaus

$$\begin{aligned} j^{-1} : \pi_1(X, x_1) &\to \pi_1(X, x_0) \\ [\beta] &\mapsto [\phi][\beta][\phi^{-1}]. \end{aligned}$$

Siis

$$j(j^{-1}([\beta])) = j([\phi][\beta][\phi^{-1}]) = ([\phi^{-1}][\phi])[\beta]([\phi][\phi^{-1}]) = [\beta]$$

kaikille $[\beta] \in \pi_1(X, x_1)$ ja

$$j^{-1}(j([\alpha])) = j^{-1}([\phi^{-1}][\alpha][\phi]) = [\phi][\phi^{-1}][\alpha][\phi^{-1}][\phi] = [\alpha]$$

kaikille $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, joten kuvaus $j : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ on isomofismi. □

Karteesitulolla $X \times Y$ on kaksi projektiokuvausta, $p : X \times Y \to X$ ja $q : X \times Y \to Y$, jotka määritellään $p(x, y) = x$ ja $q(x, y) = y$. Jos $f : Z \to X$ ja $g : Z \to Y$ ovat kuvauksia, niin on myös olemassa kuvaus $(f, g) : Z \to X \times Y$, joka määritellään $(f, g)(z) = (f(z), g(z))$ kaikille $z \in Z$. Tilannetta havainnollistaa seuraava kaavio:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X & & Y \\
 & Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[uu, dashed, "(f,g)"] &
\end{tikzcd}$$

Jos $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ on silmukka avaruudessa (X, x_0) ja $\beta : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ silmukka avaruudessa (Y, y_0), niin ylläolevan mukaan on olemassa silmukka

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) : (I, \partial I) &\to (X \times Y, (x_0, y_0)) \\ t &\mapsto (\alpha(t), \beta(t)).\end{aligned}$$

avaruudessa $(X \times Y, (x_0, y_0))$.

Lemma 5.10. *Jos $F : \alpha \simeq \alpha'$ rel ∂I ja $G : \beta \simeq \beta'$ rel ∂I, niin $(\alpha, \beta) \simeq (\alpha', \beta')$ rel ∂I.*

Todistus. Homotopioille $F : I \times I \to X$ ja $G : I \times I \to Y$ on olemassa kuvaus $(F, G) : I \times I \to X \times Y$, jolle pätee $(F, G)(s, 0) = (F(s, 0), G(s, 0)) = (\alpha(s), \beta(s))$ ja $(F, G)(1, t) = (F(s, 1), G(s, 1)) = (\alpha'(s), \beta'(s))$ kaikilla $s \in I$. Lisäksi $(F, G)(0, t) = (F(0, t), G(0, t)) = (x_0, y_0)$ ja $(F, G)(1, t) = (F(1, t), G(1, t)) = (x_0, y_0)$ kaikilla $t \in I$. Kuvaus (F, G) on siis relatiivinen homotopia, eli $(\alpha, \beta) \simeq (\alpha', \beta')$ rel ∂I. $\square$

Lause 5.11. *Jos (X, x_0) ja (Y, y_0) ovat kantapisteavaruuksia, niin*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Todistus. Jos $p : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (X, x_0)$ ja $q : (X \times Y, (x_0, y_0)) \to (Y, y_0)$ ovat projektiokuvauksia, niin

$$\begin{aligned}p_* = \pi_1(p) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\to \pi_1(X, x_0) \\ [(\alpha, \beta)] &\mapsto [p \circ (\alpha, \beta)] = [\alpha]\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}q_* = \pi_1(q) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [(\alpha, \beta)] &\mapsto [q \circ (\alpha, \beta)] = [\beta]\end{aligned}$$

ovat indusoituja homomorfismeja. Näytetään seuraavaksi, että kuvaus

$$\begin{aligned}(p_*, q_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) &\to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \\ [(\alpha, \beta)] &\mapsto ([\alpha], [\beta])\end{aligned}$$

on isomorfismi.

Homomorfisuus Olkoot $[(\alpha_0, \beta_0)]$ ja $[(\alpha_1, \beta_1)]$ perusryhmän $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ silmukkaluokkia. Koska

$$p_*([(\alpha_0, \beta_0)][(\alpha_1, \beta_1)]) = [\alpha_0][\alpha_1] \quad \text{ja} \quad q_*([(\alpha_0, \beta_0)][(\alpha_1, \beta_1)]) = [\beta_0][\beta_1],$$

niin

$$\begin{aligned}
(p_*, q_*)([(\alpha_0, \beta_0)][(\alpha_1, \beta_1)]) &= (p_*([(\alpha_0, \beta_0)][(\alpha_1, \beta_1)]), q_*([(\alpha_0, \beta_0)][(\alpha_1, \beta_1)])) \\
&= ([\alpha_0][\alpha_1], [\beta_0][\beta_1]) \\
&= ([\alpha_0\alpha_1], [\beta_0\beta_1]) \\
&= ([\alpha_0], [\beta_0])\,([\alpha_1], [\beta_1]) \\
&= (p_*, q_*)([(\alpha_0, \beta_0)])(p_*, q_*)([(\alpha_1, \beta_1)]),
\end{aligned}$$

eli (p_*, q_*) on homomorfismi.

Isomorfisuus: Näytetään, että kuvauksella (p_*, q_*) on seuraava kaksipuolinen käänteiskuvaus

$$\begin{aligned}
(p_*, q_*)^{-1} : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) &\to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \\
([\alpha], [\beta]) &\mapsto [(\alpha, \beta)].
\end{aligned}$$

Lemman 5.10 mukaan tämä käänteiskuvaus on hyvin määritelty, joten

$$\begin{aligned}
(p_*, q_*)^{-1}((p_*, q_*)[(\alpha, \beta)]) &= (p_*, q_*)^{-1}(p_*[(\alpha, \beta)], q_*[(\alpha, \beta)]) \\
&= (p_*, q_*)^{-1}([\alpha], [\beta]) \\
&= [(\alpha, \beta)]
\end{aligned}$$

kaikilla $[(\alpha, \beta)] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ ja

$$\begin{aligned}
(p_*, q_*)((p_*, q_*)^{-1}([\alpha], [\beta])) &= (p_*, q_*)[(\alpha, \beta)] \\
&= ([\alpha], [\beta])
\end{aligned}$$

kaikilla $([\alpha], [\beta]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. □

Kun myöhemmin näytetään, että $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, niin tästä lauseesta seuraa, että toruksen $S^1 \times S^1$ perusryhmä on isomorfinen additiivisen ryhmän $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kanssa.

Perusryhmäfunktori π_1 on luotu kantapistehomotopialle. Seuraavaksi selvitetään, miten perusryhmä riippuu vapaasta homotopiasta.

Lemma 5.12. *Olkoot $f_1, f_2 : X \to Y$ vapaasti homotooppisia kuvauksia, eli $F : f_1 \simeq f_2$. Jos valitaan kantapiste $x_0 \in X$ ja määritellään polku $\lambda : I \to Y$ pisteestä $f_1(x_0)$ pisteeseen $f_2(x_0)$ kaavalla $\lambda(t) = F(x_0, t)$ kaikille $t \in I$, niin $\psi : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(Y, y_0)$, joka määritellään kuvaamalla $[\alpha] \mapsto [\lambda][\alpha][\lambda]^{-1}$, on isomorfismi ja toteuttaa vaihdannaiskaavion*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_{2*}"] \arrow[dr, "f_{1*}"'] & \pi_1(Y, f_2(x_0)) \arrow[d, "\psi"] \\
& \pi_1(Y, f_1(x_0)).
\end{tikzcd}$$

Todistus. Kts. [4], joka muistuttaa lauseen 4.26 todistusta. □

Vapaasti homotooppiset kuvaukset eivät siis välttämättä indusoi samaa homomorfismia, vaan ne poikkeavat isomorfismilla ψ. Seuraavasta lauseesta seuraa kuitenkin, että vapaa homotopiaekvivalenssi indusoi isomorfismin.

Lause 5.13. *Jos $f : X \to Y$ on homotopiaekvivalenssi, niin indusoitu homomorfismi $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ on isomorfismi kaikilla $x_0 \in X$.*

Todistus. Oletetaan, että $f \circ g \simeq 1_X$ ja $g \circ f \simeq 1_Y$ jollain $g : Y \to X$. Olkoon $x_0 \in X$ kantapiste. Tarkatellaan vaihdannaiskaaviota

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y, g(x_0)) \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(X, x_0) \arrow[ur, "g_*"] \arrow[rr, "(f\circ g)_*"] \arrow[dr, "1"'] & & \pi_1(X, (f \circ g)(x_0)) \arrow[dl, "\psi"] \\
 & \pi_1(X, x_0), &
\end{tikzcd}$$

missä ylempi kolmio on seuraus kovariantin funktorin määritelmästä 3.6 ja alempi kolmio lemmasta 5.12.

Koska ψ ja 1 ovat isomorfismeja, niin vaihdannaiskaaviosta seuraa, että

$$\psi^{-1} \circ 1 = (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

on isomorfismi. Yleisestä tuloksesta (kts. [2, s. 5]) seuraa, että g_* on injektiivinen ja f_* on surjektiivinen. Kun luodaan samanlainen vaihdannaiskaavio tapaukselle $g \circ f \simeq 1_Y$, saadaan vastaavasti näytettyä, että g_* on surjektiivinen ja f_* on injektiivinen. Siten f_* on isomorfismi. □

Korollaari 5.14. *Jos X ja Y ovat polkuyhtenäisiä avaruuksia ja niillä on sama homotopiatyyppi, niin*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0) \tag{5}$$

kaikilla $x_0 \in X$ ja $y_0 \in Y$.

Todistus. Jos $f : X \to Y$ on homotopiaekvivalenssi, niin lauseen 5.13 perusteella

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, f(x_0))$$

kaikilla $x_0 \in X$. Koska Y on polkuhtenäinen, haluttu tulos seuraa lauseesta 5.9. □

Seuraava määritelmä ja korollaari ovat tarpeellisia kappaleessa 7.1, kun todistetaan algebran peruslausetta.

Määritelmä 5.15. Ryhmien G ja H välinen homomorfismi $f : G \to H$ on **triviaali**, jos $f(x) = 1$ kaikilla $x \in G$, missä 1 on ryhmän H neutraalialkio.

Korollaari 5.16. *Jos on $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ on vapaasti nollahomotooppinen, niin indusoitu homomorfismi $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ on triviaali.*

Todistus. Olkoon $f \simeq k$, missä $k : (X, x_0) \to (Y, y_1)$ määritellään $k(x) = y_1$ kaikille $x \in X$ jollain $y_1 \in Y$. Siten indusoitu homomorfismi $k_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$, joka määritellään $k_*[\alpha] = [k \circ \alpha]$ kaikille $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ ja jonka lausekkeessa $[k \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y_1)$ on vakiopolku, on triviaali.

Lemman 5.12 mukaan on olemassa isomorfismi $\psi : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(Y, y_0)$, joka toteuttaa $\psi \circ f_* = k_*$. Siten $f_* = \psi^{-1} \circ k_*$, jolloin f_* on triviaali. □

6 Esimerkit

6.1 Yhdesti yhtenäisyys

Määritelmä 6.1. Avaruus X on **yhdesti yhtenäinen**, jos se on polkuyhtenäinen ja jos $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$ kaikilla $x_0 \in X$.

Huomautus. Kun merkitään $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$, niin tarkoitetaan sitä, että jokaiselle silmukkaluokalle pätee $[\alpha] = [i_{x_0}]$.

Yhdesti yhtenäisyys on polkuyhtenäisyyttä vahvempi topologinen invariantti.

Lause 6.2. *Jos $X \cong Y$ ja X on yhdesti yhtenäinen, niin Y on yhdesti yhtenäinen.*

Todistus. Lauseesta 4.10 seuraa, että avaruuksilla X ja Y on sama homotopiatyyppi. Korollaarista 5.14 seuraa, että $\pi_1(Y, y_0) \cong \{1\}$ kaikilla $y_0 \in Y$, eli Y on yhdesti yhtenäinen. □

Lemma 6.3. *Yhden pisteen avaruus $X = \{x_0\}$ on yhdesti yhtenäinen.*

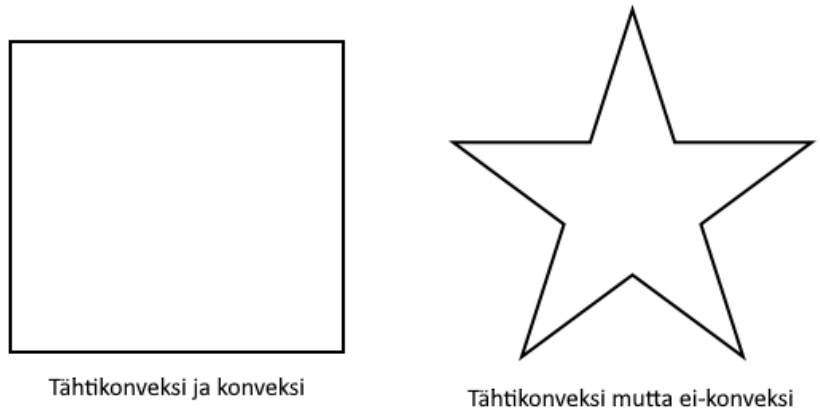
Todistus. Yhden pisteen avaruuden $\{x_0\}$ ainoa silmukka on i_{x_0}. □

Lemma 6.4. *Kutistuva avaruus on polkuyhtenäinen.*

Todistus. Olkoon X kutistuva, eli $H : 1_X \simeq k$, missä $k(x) = x_0$ on vakiokuvaus. Jos $x_1 \in X$, niin polku $I \to X$, $t \mapsto H(x_1, t)$, yhdistää pisteen x_1 pisteeseen x_0. □

Lause 6.5. *Kutistuvat avaruudet ovat yhdesti yhtenäisiä.*

Todistus. Jos X on kutistuva, niin $1_X \simeq k$, missä $k : X \to X, x \mapsto x_0$, on vakiokuvaus. Lauseen 4.14 seurauksena avaruudella X ja yhden pisteen avaruudella $\{x_0\}$ on sama homotopiatyyppi. Korollaarista 5.14 ja apulauseesta 6.3 seuraa, että $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$. Apulauseen 6.4 seurauksena avaruus X on yhdesti yhtenäinen. □



Kuva 4: Esimerkkejä tähtikonvekseista tason $\mathbb{R}^2$ aliavaruuksista.

Määritelmä 6.6. Osajoukko $X \subset \mathbb{R}^n$ on **tähtikonveksi**, jos on olemassa sellainen $x_0 \in X$, että jana pisteestä x_0 mihin tahansa muuhun pisteeseen $x \in X$ sisältyy joukkoon X.

Huomautus. Tämä jana voidaan parametrisoida muodossa $t \mapsto (1-t)x_0 + tx$, kun $t \in I$.

Lause 6.7. *Tähtikonveksit avaruudet ovat yhdesti yhtenäisiä.*

Todistus. Valitaan määritelmän mukainen $x_0 \in X$, ja määritellään homotopia $H : X \times I \to X$ kaavalla $H(x,t) = (1-t)x_0 + tx$. Saadaan $H(x,0) = x_0$ ja $H(x,1) = x$, eli X on kutistuva ja siten yhdesti yhtenäinen. $\square$

Tähtikonvekseihin avaruuksiin kuuluvat muun muassa kaikki konveksit avaruudet (yksikköväli I^n, reaaliavaruus $\mathbb{R}^n$, kiekko D^n, simpleksi Δ^n, jne.) mutta myös tähtimäiset, ei-konveksit avaruudet (kuva 4).

6.2 Ympyrä tasossa

Määritellään yksikköympyrä S^1 siten, että se koostuu niistä kompleksitason pisteistä, joiden moduli on yksi:

$$S^1 = \{x + iy : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Määritelmä 6.8. Ryhmää G kutsutaan **topologiseksi ryhmäksi**, jos sen perustana olevalla joukolla G on sellainen topologia, että

1. kertolasku $\mu : G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$, on jatkuva, kun joukolla $G \times G$ on tulotopologia;

2. kuvaus $i : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, on jatkuva.

Kun yksikköympyrän S^1 pisteitä kerrotaan keskenään kompleksitulolla, tulos pysyy yksikköympyrän sisällä.

Lemma 6.9. *Yksikköympyrä S^1 ja kompleksitulo muodostavat (topologisen) ryhmän.*

Todistus. Kompleksitulo ja käänteiskuvaus ovat molemmat jatkuvia määritelmässä 6.8 vaaditulla tavalla. Näytetään, että tulo ja käänteiskuvaus voidaan myös rajoittaa yksikköympyrään.

Jos $z = e^{i\theta} \in S^1$ ja $w = e^{i\psi} \in S^1$, niin $z^{-1} = e^{i(-\theta)}$ ja $zw = e^{i(\theta+\psi)}$. Tällöin $|z^{-1}| = 1$ ja $|zw| = 1$, eli $z^{-1} \in S^1$ ja $zw \in S^1$. □

Jos piste $1 \in S^1$ valitaan kantapisteeksi, voidaan ympyrälle määritellä silmukka $\omega_n : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ kuvaamalla $\omega_n(t) = e^{i2\pi nt}$ kaikilla $t \in I$, joka kiertää sen kokonaisluvun n kertaa vastapäivään (negatiivisilla kierrosluvuilla itseisarvon kertoja myötäpäivään).

Määritelmä 6.10. Olkoon $p : X \to Y$ kuvaus topologisten avaruuksien välillä. Kuvaus p **peittää tasaisesti** avoimen joukon $V \subset Y$, jos $p^{-1}(V)$ on yhdiste erillisiä avoimia joukkoja $U_i \subset X$ ja $p|U_i : U_i \to Y$ on homeomorfismi.

Määritelmä 6.11. Topologisen avaruuden X **peiteavaruus** koostuu avaruudesta $\widetilde{X}$ sekä kuvauksesta $p : \widetilde{X} \to X$, joka toteuttaa seuraavan ehdon: jokaiselle $x \in X$ on olemassa avoin ympäristö $U \subset X$, jonka p peittää tasaisesti.

Huomautus. Peiteavaruutta voidaan merkitä lyhyesti järjestettynä parina $(\widetilde{X}, p)$.

Ympyrällä S^1 on seuraava peiteavaruus.

Lemma 6.12. *Jos eksponenttikuvaus* $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ *määritellään asettamalla* $t \mapsto e^{i2\pi t}$*, niin* $(\mathbb{R}, \exp)$ *on ympyrän* S^1 *peiteavaruus.*

Todistus [9, s. 67]. Jos $z \in S^1$, niin määritellään puoliympyrä

$$V_z = \left\{ e^{i\alpha} : |\arg z - \alpha| < \frac{\pi}{2} \right\} \subset S^1,$$

joka on pisteen z avoin ympäristö. Huomataan, että $\exp^{-1}(z) = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\arg z}{2\pi} + k \right\}$, jolloin

$$\exp^{-1}(V_z) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\frac{\arg z}{2\pi} + k - \frac{1}{4}, \frac{\arg z}{2\pi} + k + \frac{1}{4} \right)}_{U_k}.$$

Siis $\exp^{-1}(V_z)$ on yhdiste erillisiä avoimia joukkoja U_k, ja $p|U_k : U_k \to V_z$ on homeomorfismi kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. □

Seuraavissa tuloksissa (lemmoissa 6.14 ja 6.15 sekä lauseessa 6.16) oletetaan avaruuden X peiteavaruuden olevan $(\widetilde{X}, p)$. Kun puhutaan silmukan $\alpha : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ nostoista, niin peiteavaruudeksi oletetaan $(\mathbb{R}, \exp)$.

Määritelmä 6.13. Jos $f : Y \to X$ on kuvaus, niin kuvausta $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ kutsutaan kuvauksen f **nostoksi**, jos sille pätee $p \circ \widetilde{f} = f$.

Jos Y on yhtenäinen, niin kuvauksen nosto on yksikäsitteinen seuraavalla tavalla.

Lemma 6.14. *Olkoot $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 : Y \to \widetilde{X}$ kuvauksen $f : Y \to X$ nostoja, joille pätee $\widetilde{f}_1(y_0) = \widetilde{f}_2(y_0)$ jollain $y_0 \in Y$. Jos Y on yhtenäinen, niin $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$.*

Todistus [7, s. 67]. Merkitään

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \widetilde{f}_1(y) = \widetilde{f}_2(y)\} \quad \text{ja} \quad Y_2 = \{y \in Y \mid \widetilde{f}_1(y) \neq \widetilde{f}_2(y)\}.$$

Nämä joukot ovat selkeästi erillisiä ja muodostavat avaruuden Y peitteen. Näytetään, että ne ovat myös avoimia.

Olkoon $y \in Y_1$. Tällöin alkiolle $f(y) = (p \circ \widetilde{f}_1)(y) = (p \circ \widetilde{f}_2)(y) \in X$ on olemassa avoin ympäristö $U \subset X$, jonka p peittää tasaisesti. Valitaan sellainen avoin joukko $\widetilde{U} \subset \widetilde{X}$, että $p|\widetilde{U} \to U$ on homeomorfismi. Tällöin

$$(p^{-1} \circ (p \circ \widetilde{f}_1))(y) = \widetilde{f}_1(y) \in \widetilde{U} \quad \text{ja} \quad (p^{-1} \circ (p \circ \widetilde{f}_2))(y) = \widetilde{f}_2(y) \in \widetilde{U},$$

joten $y \in \widetilde{f}_1^{-1}(\widetilde{U}) \cap \widetilde{f}_2^{-1}(\widetilde{U})$, eli y kuuluu avoimeen joukkoon $\widetilde{f}_1^{-1}(\widetilde{U}) \cap \widetilde{f}_2^{-1}(\widetilde{U})$. Jos $y' \in \widetilde{f}_1^{-1}(\widetilde{U}) \cap \widetilde{f}_2^{-1}(\widetilde{U})$, niin $(p \circ \widetilde{f}_1)(y') = f(y') = (p \circ \widetilde{f}_2)(y') \in U$, jolloin $\widetilde{f}_1(y') = \widetilde{f}_2(y')$, eli $y' \in Y_1$. Koska $y \in \widetilde{f}_1^{-1}(\widetilde{U}) \cap \widetilde{f}_2^{-1}(\widetilde{U})$ ja $\widetilde{f}_1^{-1}(\widetilde{U}) \cap \widetilde{f}_2^{-1}(\widetilde{U}) \subset Y_1$, niin Y_1 on avoin joukko avaruudessa Y.

Olkoon $y \in Y_2$. Tällöin alkiolle $f(y) = (p \circ \widetilde{f}_1)(y) = (p \circ \widetilde{f}_2)(y) \in X$ on olemassa avoin ympäristö $U \subset X$, jonka p peittää tasaisesti. Koska $\widetilde{f}_1(y) \neq \widetilde{f}_2(y)$, niin voidaan valita erilliset avoimet joukot $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2 \subset \widetilde{X}$, joille pätee $\widetilde{f}_1(y) \in \widetilde{U}_1$ ja $\widetilde{f}_2(y) \in \widetilde{U}_2$ ja jotka p kuvaa homeomorfisesti avoimelle ympäristölle U. Siis $y \in \widetilde{f}_1(\widetilde{U}_1) \cap \widetilde{f}_2(\widetilde{U}_2)$ ja jos $y' \in \widetilde{f}_1(\widetilde{U}_1) \cap \widetilde{f}_2(\widetilde{U}_2)$, niin $\widetilde{f}_1(y) \neq \widetilde{f}_2(y)$, eli $y' \in Y_2$. Siten Y_2 on avoin joukko avaruudessa Y.

Koska $Y = Y_1 \cup Y_2$, missä Y_1 ja Y_2 ovat erillisiä avoimia joukkoja, niin avaruuden Y yhtenäisyydestä seuraa, että joko $Y_1 = \emptyset$ tai $Y_1 = Y$. Koska oletuksesta saadaan $Y_1 \neq \emptyset$, niin $Y_1 = Y$, joten $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2$. $\square$

Myös homotopioita voidaan nostaa.

Lemma 6.15. *Jos kuvauksella $f : Y \to X$ on nosto $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ ja jos $F : Y \times I \to X$ on sellainen kuvaus, että $F(y, 0) = f(y)$ kaikilla $y \in Y$, niin on olemassa kuvaus $\widetilde{F} : Y \times I \to \widetilde{X}$, jolle pätee $F = p \circ \widetilde{F}$ ja $\widetilde{F}(y, 0) = \widetilde{f}(y)$ kaikilla $y \in Y$. Jos Y on yhtenäinen, niin $\widetilde{F}$ on myös yksikäsitteinen.*

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] & \\
Y \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X & Y \times I \arrow[l, "F"] \arrow[ul, dotted, "\widetilde{F}"']
\end{tikzcd}$$

Todistus ([1, s. 30–31] ja [7, s. 67]). Näytetään, että jokaiselle $y \in Y$ on olemassa avoin ympäristö V_y ja kuvaus $\widetilde{F}_y : V_y \to \widetilde{X}$, jolle pätee $\widetilde{F}_y(y', 0) = \widetilde{f}(y)$ kaikilla $y' \in Y$ ja jolle pätee $p \circ \widetilde{F}_y = F|V_y \times I$. Oletetaan ensin näiden ympäristöjen ja kuvauksien olemassaolo. Jos $y'' \in V_y \cap V_{y'}$, niin $\widetilde{F}_y|\{y''\} \times I$ ja $\widetilde{F}_{y'}|\{y''\} \times I$ ovat sellaisia kuvauksia, että

$$(p \circ \widetilde{F}_y|\{y''\} \times I)(y'', t) = F(y'', t) = (p \circ \widetilde{F}_{y'}|\{y''\} \times I)(y'', t)$$

kaikilla $t \in I$. Koska

$$(\widetilde{F}_y|\{y''\} \times I)(y'', 0) = \widetilde{f}(y'') = (\widetilde{F}_{y'}|\{y''\} \times I)(y'', 0),$$

niin lemmasta 6.14 seuraa, että $\widetilde{F}_y|(\{y''\} \times I) = \widetilde{F}_{y'}|(\{y''\} \times I)$. Siten $\widetilde{F}_y|(V_y \cap V_{y'}) \times I = \widetilde{F}_y|(V_y \cap V_{y'}) \times I$, joten liimauslauseen perusteella (lemma 4.3) todetaan, että on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $\widetilde{F} : Y \times I \to X$, jolle $\widetilde{F}|(V_y \times I) = \widetilde{F}_y$ kaikilla $y \in Y$ ja joka on sellainen kuvauksen F nosto, että $\widetilde{F}(y, 0) = \widetilde{f}(y)$ kaikilla $y \in Y$. Jos Y on yhtenäinen, niin myös $Y \times I$ on yhtenäinen, jolloin lemmasta 6.14 seuraa, että nosto $\widetilde{F}$ on yksikäsitteinen.

Jäljelle jää näyttää kyseisten ympäristöjen ja kuvauksien olemassaolo. Olkoon $(y, t) \in Y \times I$. Pisteelle $F(y, t) \in X$ on olemassa avoin ympäristö $U_t \subset X$, jonka p peittää tasaisesti. Kuvauksen F jatkuvuudesta seuraa, että pisteellä (y, t) on olemassa sellainen avoin ympäristö $V_t \times (a_t, b_t) \subset Y \times I$, että $F(V_t \times (a_t, b_t)) \subset U_t$; ts. ympäristö $F(V_t \times (a_t, b_t))$ on osana jotain kuvauksen p tasaisesti peittämää ympäristöä.

Koska $\{V_t \times (a_t, b_t)\}_{t \in I}$ muodostaa avaruuden $\{y\} \times I$ avoimen peitteen, niin avaruuden kompaktisuuden perusteella sillä on äärellinen avoin osapeite. Siksi on mahdollista valita yksittäinen pisteen y ympäristö V_y ja jakaa yksikköväli osiin

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$$

siten, että $F(V_y \times [t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ jokaisella $k = 1, 2, \ldots, m$ on osana kuvauksen p tasaisesti peittämää ympäristöä $U_k \subset X$.

Jos jokaiselle $i = 1, 2, \ldots, m$ määritellään sellainen kuvaus $G_i : V_y \times [t_{i-1}, t_i] \to \widetilde{X}$, joka nostaa kuvauksen $F|V_y \times [t_{i-1}, t_i]$ ja joille

$$G_1(y', 0) = \widetilde{f}(y') \quad \text{sekä} \quad G_{j-1}(y', t_{j-1}) = G_j(y', t_{j-1})$$

kaikilla $y' \in V_y$, kaikilla $i = 1, 2, \ldots, m$ ja kaikilla $j = 2, 3, \ldots, m$, niin liimauslauseen perusteella saadaan yksikäsitteinen $\widetilde{F}_y : V_y \times I \to \widetilde{X}$, joka toteuttaa vaaditut ominaisuudet.

Kuvaukset G_i määritellään induktiivisesti. Kun $i = 1$, niin $F(V_y \times [t_0, t_1]) \subset U_1$, missä avoin joukko $U_1 \subset X$ on kuvauksen p tasaisesti peittämä. Siten on olemassa perhe $\{\widetilde{U}_k\}_{k \in J}$ erillisiä avoimia joukkoja $\widetilde{U}_k \subset \widetilde{X}$, joille pätee $\bigcup_{k \in J} \widetilde{U}_k = p^{-1}(U_1)$ ja joilla $p|\widetilde{U}_k : \widetilde{U}_k \to U_1$ on homeomorfismi.

Jos $y \in V_y$, niin $(p \circ \widetilde{f})(y) = f(y) = F(y, 0) \in U_1$, jolloin $((p|\widetilde{U}_k)^{-1} \circ f)(y) \in \widetilde{U}_k$ jollain $k \in I$. Siis $\widetilde{f}(y) \in \bigcup_{k \in J} \widetilde{U}_k$, eli $y \in \bigcup_{k \in J} \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}_k)$. Noston $\widetilde{f} : Y \to \widetilde{X}$ jatkuvuudesta seuraa, että erilliset joukot $\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}_k)$ muodostavat joukon V_y avoimen peitteen.

Jokaiselle $k \in J$ muodostetaan kuvaus $G_1|\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}_k) \times [t_0, t_1]$, joka kuvaa $(y', t) \mapsto ((p|\widetilde{U}_k)^{-1} \circ F)(y', t)$. Liimaamalla (lemma 4.3) nämä kuvaukset yhteen saadaan kuvaus $G_1 : V_y \times [t_0, t_1] \to \widetilde{X}$. Olkoon $(y', t) \in V_y \times [t_0, t_1]$. Tällöin $y \in \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}_k)$ jollain $k \in J$, joten

$$\begin{aligned}(p \circ G_1)(y', t) &= \left(p \circ G_1|\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}_k) \times [t_0, t_1]\right)(y', t) \\ &= \left(p \circ (p|\widetilde{U}_k)^{-1} \circ F\right)(y', t) \\ &= (F|V_y \times [t_0, t_1])\,(y', t),\end{aligned}$$

eli G_1 nostaa kuvauksen $F|V_y \times [t_0, t_1]$. Lisäksi

$$\begin{aligned}G_1(y', 0) &= \left(G_1|\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{U}_k)\right)(y', 0) \\ &= \left(p|\widetilde{U}_k^{-1} \circ F\right)(y', 0) \\ &= p|\widetilde{U}_k^{-1}(f(y')) \\ &= \widetilde{f}(y'),\end{aligned}$$

joten kuvaus G_1 toteuttaa halutut ominaisuudet.

Oletetaan, että G_{i-1} on määritelty jollain $i = 2, \ldots, m$. Tällöin $F(V_y \times [t_{i-1}, t_i]) \subset U_i$, missä avoin joukko $U_i \subset X$ on kuvauksen p tasaisesti peittämä. Siten on olemassa perhe $\{\widetilde{U}_k\}_{k \in J}$ erillisiä avoimia joukkoja $\widetilde{U}_k \subset \widetilde{X}$, joille pätee $\bigcup_{k \in J} \widetilde{U}_k = p^{-1}(U_i)$ ja joilla $p|\widetilde{U}_k : \widetilde{U}_k \to U_i$ on homeomorfismi. Jokaiselle $k \in J$ määritellään joukko

$$V_k = \{y' \in V_y \mid G_{i-1}(y', t_{i-1}) \in \widetilde{U}_k\} = (G|V_y \times \{t_{i-1}\})^{-1}(\widetilde{U}_k) \subset V_y,$$

jotka ovat erillisiä ja avoimia sekä muodostavat avaruuden V_y peitteen. Kuten tapauksessa $i = 0$, jokaiselle $k \in J$ muodostetaan kuvaus $G_i|V_k \times [t_{i-1}, t_i]$, joka kuvaa $(y', t) \mapsto ((p|\widetilde{U}_k)^{-1} \circ F)(y', t)$. Liimaamalla (lemma 4.3) nämä kuvaukset yhteen saadaan kuvaus $G_i : V_y \times [t_{i-1}, t_i] \to \widetilde{X}$. Samalla päättelyllä kuin tapauksessa $i = 1$ kuvaus G_i nostaa kuvauksen $F|V_y \times [t_{i-1}, t_i]$. Jos $y' \in V_y$, niin $y' \in V_k$ jollain $k \in J$. Tällöin $G_{i-1}(y', t_{i-1}) \in \widetilde{U}_k$ ja

$$G_{i-1}(y', t_{i-1}) = ((p|\widetilde{U}_k)^{-1} \circ F)(y', t_{i-1}) = G_i(y', t_{i-1}),$$

eli kuvaus G_i toteuttaa halutut ominaisuudet. □

Lemmasta 6.15 seuraa, että peiteavaruudet $(\widetilde{X}, p)$ toteuttavat "homotopian nosto-ominaisuuden" kaikilla avaruuksilla Y. Tällöin peiteavaruuksia kutsutaan ovat **Hurewiczin säieavaruuksiksi**. Jos $x \in X$, niin alkukuvaa $p^{-1}(x)$, joka on diskreetti joukko, kutsutaan alkion x **säikeeksi**.

Koska yksikköväli I on yhtenäinen, niin polun $\alpha : I \to X$ nosto (jos se on olemassa) on yksikäsitteinen (lemma 6.14), jolloin sitä voidaan merkitä $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$.

Lause 6.16 (Nostolause)**.** *Olkoon $(\widetilde{X}, p)$ peiteavaruus avaruudelle X.*

1. *Jos $\alpha : I \to X$ on polku, niin jokaista säikeen alkiota $b \in p^{-1}(\alpha(0))$ kohden on olemassa sellainen yksikäsitteinen polku $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$, että $\widetilde{\alpha}(0) = b$ ja $\alpha = p \circ \widetilde{\alpha}$.*

2. *Olkoot* $\alpha, \beta : I \to X$ *polkuja, joille pätee* $\alpha \simeq \beta$ rel ∂I. *Jos* $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0)$, *niin* $\widetilde{\alpha} \simeq \widetilde{\beta}$ rel ∂I.

Todistus. 1. Sovelletaan lemmaa 6.15 tapauksessa $Y = \{1\}$. Jos $f : \{1\} \to X$ määritellään $1 \mapsto \alpha(0)$, niin tällä kuvauksella on nosto $\widetilde{f} : \{1\} \to \widetilde{X}$, joka kuvaa $1 \mapsto b$. Määritellään lisäksi kuvaus $F : \{1\} \times I \to X$ kuvaamalla $(1, t) \mapsto \alpha(t)$. Lemman 6.15 mukaan on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $\widetilde{F} : \{1\} \times I \to \widetilde{X}$, joka nostaa kuvauksen F ja jolle $\widetilde{F}(1, 0) = \widetilde{f}(0) = b$. Tällöin $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}$ määritellään $t \mapsto \widetilde{F}(1, t)$.

2. Olkoot $\alpha, \beta : I \to X$ polkuja, joille $F : \alpha \simeq \beta$ rel ∂I. Olkoot $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} : I \to \widetilde{X}$ samasta pisteestä $b \in \widetilde{X}$ alkavia, kohdan 1. mukaan yksikäsitteisiä, polkujen α ja β nostoja. Homotopia $F : I \times I \to X$ on sellainen kuvaus, että $F(s, 0) = \alpha(s)$ kaikilla $s \in I$. Tapauksessa $Y = I$ lemman 6.15 mukaan on olemassa yksikäsitteinen kuvaus $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$, joka nostaa homotopian F ja jolle $\widetilde{F}(s, 0) = \widetilde{\alpha}(s)$ kaikilla $s \in I$. Koska

$$(p \circ \widetilde{F})(s, 1) = F(s, 1) = \beta(s),$$

niin polun noston yksinkäsitteisyyden perusteella $\widetilde{F}(s, 1) = \widetilde{\beta}(s)$ kaikilla $s \in I$. Koska

$$(p \circ \widetilde{F})(0, t) = F(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$$

ja

$$(p \circ \widetilde{F})(1, t) = F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$$

niin polun noston yksikäsitteisyydestä (vakiopoluille) seuraa

$$\widetilde{F}(0, t) = \widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\beta}(0) \quad \text{ja} \quad \widetilde{F}(1, t) = \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1).$$

kaikilla $t \in I$. Saadaan $\widetilde{F} : \widetilde{\alpha} \simeq \widetilde{\beta}$ rel ∂I.

□

Määritellään jokaiselle kokonaisluvulle n polku $\widetilde{\omega}_n : I \to S^1$ kaavalla $\widetilde{\omega_n}(t) = nt$ kaikille $t \in I$. Tällöin $\widetilde{\omega}_n(0) = 0$ ja $(\exp \circ \widetilde{\omega}_n)(t) = e^{i2\pi nt} = \omega_n(t)$ kaikilla $t \in I$. Kyseessä on silmukan ω_n yksikäsitteinen, pisteestä 0 alkava nosto.

Kaikki ympyrän S^1 silmukat ovat homotooppisia jonkin yksikäsitteisen silmukan ω_n kanssa.

Lemma 6.17. *Jokaiselle silmukalle* $\alpha : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ *on olemassa sellainen yksikäsitteinen kokonaisluku* $n \in \mathbb{Z}$, *että* $\alpha \simeq \omega_n$ rel ∂I.

Todistus. Olkoon $\alpha : (I, \partial I) \to (S^1, 1)$ ympyrän silmukka.

Olemassaolo: Jos valitaan $0 \in p^{-1}(\alpha(0))$, niin nostolauseen mukaan on olemassa yksikäsitteinen, pisteestä 0 alkava nosto $\widetilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$. Koska

$$(\exp \circ \widetilde{\alpha})(1) = e^{i2\pi\widetilde{\alpha}(1)} = 1,$$

niin $\widetilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$. Valitaan $n = \widetilde{\alpha}(1)$ ja tarkastellaan silmukkaa ω_n, jonka pisteestä 0 alkava nosto on muotoa $\widetilde{\omega}_n(t) = nt$. Nosto $\widetilde{\omega}_n$ on polku, joka alkaa pisteestä 0 ja päättyy pisteeseen n, samoin kuin $\widetilde{\alpha}$. Määritellään jatkuva kuvaus $F : I \times I \to \mathbb{R}$ kaavalla $F(s,t) = (1-t)\widetilde{\alpha}(s) + t\widetilde{\omega}_n(s)$, missä $s \in I$ on polkuparametri ja $t \in I$ homotopiaparametri. Tällöin $F(s,0) = \widetilde{\alpha}(s)$ ja $F(s,1) = \widetilde{\omega}_n(s)$ kaikilla $s \in I$ sekä $F(0,t) = 0$ ja $F(1,t) = n$ kaikilla $t \in I$, eli kyseessä on homotopia rel ∂I. Muodostetaan uusi jatkuva kuvaus $p \circ F : I \times I \to S^1$. Huomataan, että homotopiaparametrin päätepisteissä tälle kuvaukselle pätee

$$(p \circ F)(s,0) = (p \circ \widetilde{\alpha})(s) = \alpha(s) \quad \text{sekä} \quad (p \circ F)(s,1) = (p \circ \widetilde{\omega}_n)(s) = \omega_n(s)$$

kaikilla $s \in I$ ja polkuparametrin päätepisteissä pätee $(p \circ F)(0,t) = 1 = (p \circ F)(1,t)$ kaikilla $t \in I$. Lopputuloksena saadaan $\alpha \simeq \omega_n$ rel ∂I.

Yksikäsitteisyys: Olkoon m ja n sellaisia kokonaislukuja, että $\alpha \simeq \omega_n$ rel ∂I ja $\alpha \simeq \omega_m$ rel ∂I. Transitiivisuuden perusteella $F : \omega_n \simeq \omega_m$ rel ∂I ja nostolauseen perusteella $\widetilde{\omega}_n \simeq \widetilde{\omega}_m$ rel ∂I pisteestä 0 alkaville nostoille. Siis $\widetilde{\omega}_n(1) = n = m = \widetilde{\omega}_m(1)$. □

Lemman 6.17 kokonaislukua kutsutaan silmukan **kierrosluvuksi** ja merkitään $\deg \alpha$. Jos $[\alpha] = [\omega_n]$ ja $[\beta] = [\alpha]$, niin transitiivisuuden perusteella $[\beta] = [\omega_n]$. Ympyrän silmukkaluokalla on siis yksikäsitteinen kierrosluku, jota voidaan merkitä $\deg[\alpha]$.

Lause 6.18. *Jos n ja m ovat kokonaislukuja, niin*

1. $[\omega_n \omega_m] = [\omega_{n+m}]$,
2. $[\omega_n]^{-1} = [\omega_{-n}]$.

Todistus. Olkoot n ja m kokonaislukuja.

1. Koska
$$(\omega_n \omega_m)(s) = e^{i2\pi ns} e^{i2\pi ms} = e^{i2\pi(n+m)s} = \omega_{n+m}(s)$$
kaikilla $s \in I$, niin $[\omega_n \omega_m] = [\omega_{n+m}]$.
2. Koska $\omega_n^{-1}(s) = e^{i2\pi(-n)s} = \omega_{-n}(s)$ kaikilla $s \in I$, niin $[\omega_n]^{-1} = [\omega_{-n}]$.

□

Lause 6.19. *Ympyrän perusryhmä $\pi_1(S^1, 1)$ on silmukkaluokan $[\omega_1]$ virittämä ääretön syklinen ryhmä.*

Todistus. Näytetään, että ympyrän perusryhmä on syklinen ja ääretön.

Syklisyys: Näytetään induktiolla muuttujaan $n \in \mathbb{Z}$, että $[\omega_1]^n = [\omega_n]$. Jos $n = 0$, niin väite on selkeästi tosi. Jos oletetaan $[\omega_1]^n = [\omega_n]$ jollain $n \geq 0$, niin

$$[\omega_1]^{n+1} = [\omega_1]^n [\omega_1] = [\omega_n][\omega_1] = [\omega_{n+1}].$$

Jos $n < 0$, niin $[\omega_1]^n = ([\omega_1]^{-n})^{-1} = ([\omega_{-n}])^{-1} = [\omega_n]$.

Äärettömyys: Jos $[\omega_1]^n = [\omega_1]^m$, niin $[\omega_n] = [\omega_m]$. Silmukkaluokan kierrosluku on yksikäsitteinen (Lemma 6.17), joten $n = m$. □

Yksikköympyrä S^1 on polkuyhtenäinen, mutta se ei ole yhdesti yhtenäinen.

Korollaari 6.20. $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$.

6.3 Pallo ylemmissä ulottuvuuksissa

Tason ympyrä S^1 ei ole yhdesti yhtenäinen, mutta sen sijaan n-ulotteinen pallo S^n, kun $n \geq 2$, on yhdesti yhtenäinen.

Lausetta 6.24 varten tarvitaan ensin aputuloksia silmukan $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ yksikkövälista I. Suljettuna ja rajoitettuna avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukkona I on kompakti.

Määritelmä 6.21. Metrisessä avaruudessa (X, d) osajoukolle $S \subset X$ voidaan määritellä **halkaisija**

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}.$$

Suljetulla välillä $[a, b]$ on äärellinen halkaisija $b - a$, kun $a \leq b$. Tällöin siis $\operatorname{diam}(I) = 1$ ja osaväleille $[s_j, s_{j+1}] \subset I$ pätee $\operatorname{diam}([s_j, s_{j+1}]) = s_{j+1} - s_j \leq 1$.

Lemma 6.22. *Jokaiselle kompaktin metrisen avaruuden X avoimelle peitteelle $\mathcal{U}$ on olemassa sellainen positiivinen reaaliluku λ, että jos $S \subset X$ ja* $\operatorname{diam}(S) < \lambda$, *niin $S \subset U$ jollain $U \in \mathcal{U}$.*

Todistus. Kts. [8, s. 104]. □

Huomautus. Lemman 6.22 reaalilukua λ kutsutaan **Lebesgue-luvuksi**.

Lemma 6.23. *Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus kompaktista metrisestä avaruudesta X topologiseen avaruuteen Y. Jos $\mathcal{U}$ on avaruuden Y avoin peite, niin on olemassa sellainen reaaliluku $\lambda > 0$, että jokaiselle joukolle $S \subset X$, jolle pätee* $\operatorname{diam}(S) < \lambda$, *on olemassa sellainen $U \in \mathcal{U}$ että $f(S) \subset U$.*

Todistus. Koska $\mathcal{U}$ peittää avaruuden Y, niin jokaiselle $x \in X$ on olemassa sellainen $U \in \mathcal{U}$, että $f(x) \in U$, eli $x \in f^{-1}(U)$. Peitteen $\mathcal{U}$ avointen joukkojen alkukuvat muodostavat siis avoimen peitteen kompaktille metriselle avaruudelle X. Lemman 6.22 mukaisesti peitteelle on olemassa Lebesgue-luku. Jos $S \subset X$ ja $\operatorname{diam}(S) < \lambda$, niin on olemassa sellainen $U \in \mathcal{U}$, että $S \subset f^{-1}(U)$ eli $f(S) \subset U$. □

Jos $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ on silmukka ja $\mathcal{U}$ on avaruuden (X, x_0) avoin peite, niin lemman 6.23 perusteella Lebesguen lukua λ halkaisijaltaan pienemmät osavälit kuvautuvat yhdelle $U \in \mathcal{U}$. Jaetaan yksikköväli osiin

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1,$$

missä $s_{j+1} - s_j < \lambda$. Tällöin $\alpha([s_j, s_{j+1}]) \subset U_j$ jollain $U_j \in \mathcal{U}$ ja silmukan rajoitus tähän osaväliin voidaan nähdä polkuna $\alpha|_{[s_j, s_{j+1}]} : I \to U_j$ avoimessa joukossa U_j. Jos $i_j : U_j \to X$ on inkluusiokuvaus, niin silmukka $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ voidaan esittää polkutulona seuraavasti:

$$\alpha = (i_0 \circ \alpha|_{[s_0, s_1]})(i_1 \circ \alpha|_{[s_1, s_2]}) \ldots (i_{m-1} \circ \alpha|_{[s_{m-1}, s_m]}). \tag{6}$$

Lause 6.24. *Jos $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ on sellainen avaruuden (X, x_0) avoin peite, että $x_0 \in U_j$ kaikilla $j \in J$ ja $U_j \cap U_k$ on polkuyhtenäinen kaikilla $j, k \in J$, niin*

1. *avaruus (X, x_0) on polkuyhtenäinen ja*
2. *aliryhmät* im $\pi_1(i_j)$ *virittävät perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$, kun $i_j : (U_j, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ on inkluusiokuvaus.*

Todistus. 1. Jos $x \in U_{j_1}$ ja $y \in U_{j_2}$ ovat avaruuden (X, x_0) pisteitä, niin on olemassa polku pisteestä x pisteeseen x_0 ja polku pisteestä x_0 pisteeseen y. Polkutulolla saadaan polku pisteestä x pisteeseen y, eli (X, x_0) on polkuyhtenäinen.

2. Selkeästi aliryhmät im $\pi_1(i_j)$ virittävät jonkin perusryhmän $\pi_1(X, x_0)$ aliryhmistä. Näytettäväksi jää, että tämä aliryhmä on perusryhmä itse. On siis näytettävä, että jokainen silmukkaluokka $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ voidaan esittää äärellisenä polkutulona

$$[\alpha] = [\beta_1]^{e_1} \dots [\beta_m]^{e_m}, \tag{7}$$

missä $e_i = \pm 1$ ja $\beta_i \in$ im $\pi_1(i_j)$ jollain $j \in J$.

Silmukka $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ voidaan yhtälön (6) tavoin esittää polkutulona muodossa

$$\alpha = (i_0 \circ \alpha|_{[s_0,s_1]})(i_1 \circ \alpha|_{[s_1,s_2]}) \dots (i_{m-1} \circ \alpha|_{[s_{m-1},s_m]}).$$

missä $\alpha|_{[s_j,s_{j+1}]} : I \to U_j$ on polku avoimessa joukossa $U_j \in \mathcal{U}$.

Koska x_0 kuuluu jokaiseen $U_j \in \mathcal{U}$ ja koska avoimen peitteen kahden joukon yhdiste on polkuyhtenäinen, niin voidaan määritellä polku

$$\phi_k : I \to U_{k-1} \cap U_k$$

pisteestä x_0 pisteeseen $\alpha(s_k)$ kaikille $k = 1, \dots, m-1$. Aliavaruuksien U_{k-1} ja U_k inkluusiokuvaukset ovat yksimielisiä päällekkäisyyksien suhteen, eli

$$i_{k-1}|_{U_{k-1}\cap U_k} = i_k|_{U_{k-1}\cap U_k}.$$

Määritellään silmukat $\psi_0 = \alpha|_{[s_0,s_1]}\phi_1^{-1}$ ja $\psi_{m-1} = \phi_{m-1}\alpha|_{[s_{m-1},s_m]}$ avaruuksissa U_0 ja U_{m-1} sekä silmukat

$$\psi_k = \phi_k \alpha|_{[s_k,s_{k+1}]}\phi_{k+1}^{-1}$$

avaruudessa U_k, kun $k = 1, 2, \dots, m-2$. Tällöin $[\psi_k] \in \pi_1(U_k, x_0)$ kaikilla $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, ja inkluusiokuvauksen i_k indusoimalla homomorfismilla $i_k^* = \pi_1(i_k) : \pi_1(U_k, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ saadaan $i_k^*[\psi_k] \in \pi_1(X, x_0)$.

Tarkastellaan tuloa $\prod_{k=0}^{m-1} i_k^*[\psi_k]$, joka ensinnäkin saadaan avattua muotoon

$$[i_0 \circ (\alpha|_{[s_0,s_1]}\phi_1^{-1})] \left(\prod_{k=1}^{m-2} [i_k \circ (\phi_k \alpha|_{[s_k,s_{k+1}]}\phi_{k+1}^{-1})] \right) [i_{m-1} \circ (\phi_{m-1}\alpha|_{[s_{m-1},s_m]})] \tag{8}$$

missä ensimmäinen ja viimeinen termi saadaan muotoon

$$[i_0 \circ \alpha|_{[s_0,s_1]}][i_0 \circ \phi_1^{-1}] \quad \text{ja} \quad [i_{m-1} \circ \phi_{m-1}][i_{m-1} \circ \alpha|_{[s_{m-1},s_m]}]$$

ja keskimmäinen muotoon

$$\prod_{k=1}^{m-2} [i_k \circ \phi_k][i_k \circ \alpha|_{[s_k,s_{k+1}]}][i_k \circ \phi_{k+1}^{-1}].$$

Inkluusiokuvausten päällekäisyyksien yksimielisyydestä seuraa, että tulo (8) saadaan muotoon

$$[i_0 \circ \alpha|_{[s_0,s_1]}][i_0 \circ (\psi_1^{-1}\psi_1)][i_1 \circ \alpha|_{[s_1,s_2]}] \dots [i_{m-1} \circ (\psi_{m-1}^{-1}\psi_{m-1})][i_{m-1} \circ \alpha|_{[s_{m-1},s_m]}]$$

missä termit $[i_0 \circ (\psi_k^{-1}\psi_k)]$ kumoutuvat pois, eli

$$[i_0 \circ \alpha|_{[s_0,s_1]}][i_1 \circ \alpha|_{[s_1,s_2]}] \dots [i_{m-1} \circ \alpha|_{[s_{m-1},s_m]}] = [\alpha].$$

Saadaan siis $[\alpha] = \prod_{k=1}^{m-1} i_k^*[\psi_k]$, missä $i_k^*[\psi_k] \in \operatorname{im} \pi_1(i_k)$.

□

Jos pallolle $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ valitaan pohjoisnapa N projektiopisteeksi, kaikki muut pallon pisteet $x \in S^2$ on mahdollista projisoida tasoon $\mathbb{R}^2$ siihen pisteeseen, jossa pisteen N ja x kautta kulkeva suora leikkaa tason $\mathbb{R}^2$.

Jos puolestaan annetaan tason piste $x \in \mathbb{R}^2$, niin se voidaan kuvata pallolle S^2 siihen pisteeseen, jossa projektiopisteen N ja pisteen x kautta kulkeva suora leikkaa pallon.

Nämä kuvaukset ovat toistensa käänteiskuvauksia ja lisäksi jatkuvia.

Lemma 6.25. *Stereografinen projektio $S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ on homeomorfismi.*

Todistus. Stereografinen projektio $\rho : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ kuvaa

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

Projektiolla on kaksipuolinen käänteiskuvaus $\rho^{-1} : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$, joka kuvaa

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{2x_1}{||x||^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{||x||^2 + 1}, \frac{||x||^2 - 1}{||x||^2 + 1} \right).$$

Molemmat näistä kuvauksista ovat jatkuvia, joten $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$. □

Koska $\mathbb{R}^n$ on yhdesti yhtenäinen, seuraa lemmasta 6.25, että $\pi_1(S^n \setminus \{N\}) \cong \{1\}$ ja symmetrialla myös että $\pi_1(S^n \setminus \{S\}) \cong \{1\}$. Pallon inkluusiokuvaukset ovat

$$\begin{tikzcd}
S^n \setminus \{N, S\} \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d, hook, "i_1"] & S^n \setminus \{S\} \arrow[d, hook, "j_2"] \\
S^n \setminus \{N\} \arrow[r, hook, "j_1"] & S^n.
\end{tikzcd}$$

Jos valitaan $x_0 \in S^n \setminus \{N, S\}$, niin funktorilla π_1 saadaan

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^n \setminus \{N,S\}, x_0) \arrow[r, "\pi_1(i_2)"] \arrow[d, "\pi_1(i_1)"] & \pi_1(S^n \setminus \{S\}, x_0) \arrow[d, "\pi_1(j_2)"] \\
\pi_1(S^n \setminus \{N\}, x_0) \arrow[r, "\pi_1(j_1)"] & \pi_1(S^n, x_0).
\end{tikzcd}$$

Lauseen 6.24 mukaan im $\pi_1(j_1)$ ja im $\pi_1(j_2)$ virittävät perusryhmän $\pi_1(S^n, x_0)$.

Lause 6.26. *Jos $n \geq 2$, niin avaruus S^n on yhdesti yhtenäinen.*

Todistus. Merkitään $V_1 = S^n \setminus \{N\}$ ja $V_2 = S^n \setminus \{S\}$, sekä valitaan kantapiste $x_0 \in V_1 \cap V_2$. Tällöin $\{V_1, V_2\}$ on sellainen avaruuden (S^n, x_0) peite, että $x_0 \in V_1 \cap V_2$ ja $V_1 \cap V_2$ on polkuyhtenäinen.

Lauseesta 6.24 seuraa, että $S^n = V_1 \cup V_2$ on polkuyhtenäinen ja että

$$\pi_1(S^n, x_0) = \langle \text{im } \pi_1(j_1) \cup \text{im } \pi_1(j_2) \rangle.$$

Silmukkaluokka $[\alpha] \in \pi_1(S^n, x_0)$ voidaan esittää äärellisenä polkutulona

$$[\alpha] = [\beta_1]^{e_1} \dots [\beta_m]^{e_m}, \tag{9}$$

missä $e_i = \pm 1$ ja $[\beta_i] \in \text{im } \pi_1(j_1) \cup \text{im } \pi_1(j_2)$ kaikilla $i = 1, \dots, m$.

Jos $[\beta_i] \in \text{im } \pi_1(j_1)$, niin on olemassa sellainen $[\gamma_i] \in \pi_1(S^n \setminus \{N\}, x_0)$, että $[\beta_i] = \pi_1(j_1)([\gamma_i])$. Koska perusryhmä $\pi_1(S^n \setminus \{N\}, x_0)$ on triviaali (lemma 6.25), niin $[\gamma_i] = [i_{x_0}]$ ja homomorfismin ominaisuuksista seuraa $[\beta_i] = \pi_1(j_1)([i_{x_0}]) = [i_{x_0}]$. Sama päättely pätee myös, jos $[\beta_i] \in \text{im } \pi_1(j_2)$. Polkutulo (9) saadaan muotoon $[\alpha] = [i_{x_0}]$, jolloin $\pi_1(S^n, x_0) \cong \{1\}$. □

7 Sovellukset

7.1 Algebran peruslause

Tässä kappaleessa $S^1(\rho) \subset \mathbb{C}$ viittaa origokeskeiseen ympyrään, jonka säde on $\rho > 0$, ja $f_\rho^n : S^1(\rho) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ viittaa potenssifunktion $z \mapsto z^n$, rajoittumaan tälle ympyrälle, kun $n \geq 1$.

Lemma 7.1. *Olkoon $n \geq 1$ ja $\rho > 0$. Kuvaus f_ρ^n ei ole nollahomotooppinen.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että f_ρ^n on nollahomotooppinen. Määritellään kuvaus $h : S^1 \to S^1$ seuraavan vaihdannaiskaavion mukaisesti:

$$\begin{tikzcd}
S^1(\rho) \arrow[r, "f_\rho^n"] & \mathbb{C} \setminus \{0\} \arrow[d, "z \mapsto \frac{z}{||z||}"] \\
S^1 \arrow[u, "z \mapsto \rho z"] \arrow[r, "h"] & S^1
\end{tikzcd}$$

Kaaviosta seuraa, että $h(z) = z^n$ kaikilla $z \in S^1$. Koska f_ρ^n on nollahomotooppinen, niin myös h on nollahomotooppinen (lause 4.6). Korollaarista 5.16 seuraa, että $h_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, 1)$ on triviaali. Siis myös $h_*[\omega_1] = [h][\omega_1] = [\omega_n] = [\omega_0]$, mistä saadaan $n = 0$. Tämä on ristiriidassa oletuksen $n \geq 1$ kanssa. □

Kun ympyrällä $S^1(\rho)$ on tarpeeksi suuri säde ρ, jokainen ei-vakio, kompleksikertoiminen polynomi rajoitettuna tähän ympyrään on homotooppinen kuvauksen f_ρ^n kanssa.

Lemma 7.2. *Olkoon $g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ kompleksikertoiminen, ei-vakio polynomi. Jos ympyrän $S^1(\rho)$ säteelle pätee $\rho > \max(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|)$, niin $g|S^1(\rho) \simeq f_\rho^n$.*

Todistus. Olkoon $\rho > \max(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|)$ ja määritellään $F : S^1(\rho) \times I \to \mathbb{C}$ kaavalla

$$F(z,t) = z^n + \sum_{i=0}^{n-1} (1-t) a_i z^i, \tag{10}$$

jolloin $F(z,0) = g(z)$ ja $F(z,1) = z^n = f_\rho^n(z)$ kaikilla $z \in S^1(\rho)$. Koska F on polynomi, niin se on myös aina jatkuva.

Jos pystymme näyttämään, että $F(S^1(\rho) \times I) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, eli $F(z,t) \neq 0$ kaikilla $z \in S^1(\rho)$ ja $t \in I$, niin muodostamamme homotopia on kuvaus $S^1(\rho) \times I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja saamme johtopäätöksen $g|S^1(\rho) \simeq f_\rho^n$. Oletetaan vastoin väitettä, että $F(z,t) = 0$ jollain $z \in S^1(\rho)$ ja $t \in I$. Tällöin yhtälöstä (10) saadaan $\rho^n = \left|\sum_{i=0}^{n-1} (1-t) a_i z^i\right|$. Sitten

$$\rho^n \leq \sum_{i=0}^{n-1} (1-t)|a_i||z|^i \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\rho^i \leq \left[\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|\right] \rho^{n-1}, \tag{11}$$

missä ensimmäinen epäyhtälö on seuraus kolmioepäyhtälöstä ja viimeinen oletuksesta $\rho > 1$. Kun epäyhtälö 11 jaetaan puolittain luvulla ρ^{n-1}, saadaan $\rho \leq \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$, mikä on ristiriita. Siis $g|S^1(\rho) \simeq f_\rho^n$. □

Algebran peruslause voidaan nyt todistaa käyttämällä apulauseita 7.1 ja 7.2.

Lause 7.3 (Algebran peruslause)**.** *Jokaisella ei-vakiolla, kompleksikertoimisella polynomilla on kompleksinen juuri.*

Todistus. Ilman yleisyyden menetystä oletetaan polynomin g olevan ei-vakio, kompleksikertoiminen ja mooninen; ts.

$$g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0. \tag{12}$$

Oletetaan, että polynomilla g ei ole kompleksista juurta. Valitaan $\rho > \max(1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|)$ ja määritellään $G : S^1(\rho) \times I \to \mathbb{C}$ kaavalla $G(z,t) = g((1-t)z)$. Määritelmästä seuraa, että $G(z,0) = g(z)$ ja $G(z,1) = g(0) = a_0$ kaikilla $z \in S^1(\rho)$. Lisäksi jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena G on jatkuva. Koska polynomilla g ei ole juurta, niin $G(S^1(\rho) \times I) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $G : g|S^1(\rho) \simeq k$, kun $k : S^1(\rho) \to \mathbb{C}$ määritellään $k(z) = a_0$. Kuvaus $g|S^1(\rho)$ on siis nollahomotooppinen ja transitiivisuudesta seuraa (Lemma 7.2), että f_ρ^n on nollahomotooppinen, mikä on ristiriita (lemma 7.1). Siis polynomilla g on kompleksinen juuri. □

7.2 Brouwerin kiintopistelause

Kuvauksella $f : X \to X$ on kiintopiste, jos $f(x) = x$ jollain $x \in X$. Näytetään kiintopisteen olemassaolo kuvauksille $D^2 \to D^2$, kun D^2 on tason kiekko.

Seuraava lause todistaa, että kiekkoa D^2 ei voida kuvata sen reunaan jatkuvalla tavalla niin, että reuna pystyy paikoillaan.

Lause 7.4. *Ei ole olemassa retraktiota $D^2 \to S^1$.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa retraktio $r : D^2 \to S^1$, joka toteuttaa vaihdannaiskaavion

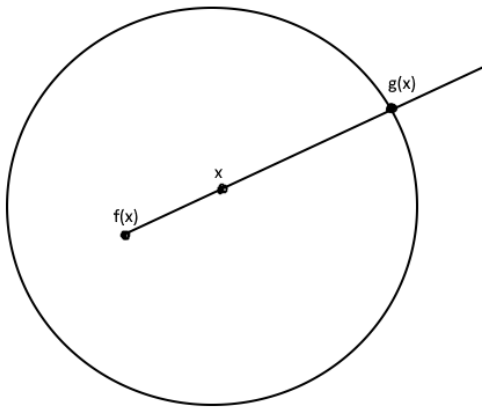
$$\begin{tikzcd} D^2 \arrow[dr, "r"] & \\ S^1 \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "1_{S^1}"'] & S^1, \end{tikzcd}$$

missä $i : S^1 \to D^2$ on inkluusiokuvaus ja $1_{S^1} : S^1 \to S^1$ on joukon S^1 identiteettikuvaus.

Koska π_1 on kovariantti funktori ja siten säilyttää vaihdannaisuuden, saadaan vaihdannaiskaavio

$$\begin{tikzcd} \pi_1(D^2) \arrow[dr, "\pi_1(r)"] & \\ \pi_1(S^1) \arrow[u, "\pi_1(i)"] \arrow[r, "\pi_1(1_{S^1})"'] & \pi_1(S^1), \end{tikzcd}$$

mistä vaihdannaisuudella $\pi_1(1_{S^1}) = \pi_1(r) \circ \pi_1(i)$. Koska $\pi_1(D^2) \cong \{1\}$, niin $\pi_1(1_{S^1}) = 0$. Kuitenkin tiedetään, että $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, jolloin $\pi_1(1_{S^1}) \neq 0$, mikä on ristiriita. Ei siis ole olemassa retraktiota $D^2 \to S^1$. $\square$



Kuva 5: Jos Brouwerin kiintopistelause tapauksessa $D^2 \to D^2$ oletetaan epätodeksi, niin on olemassa retraktio $D^2 \to S^1$.

Brouwerin kiintopistelause saadaan retraktiolauseen seurauksena.

Lause 7.5 (Brouwerin kiintopistelause)**.** *Jokaisella jatkuvalla $f : D^2 \to D^2$ on kiintopiste.*

Todistus. Oletetaan, että $f : D^2 \to D^2$ on sellainen kuvaus, jolla ei ole kiintopistettä, eli $f(x) \neq x$ kaikilla $x \in D^2$. Määritellään kuvaus $g : D^2 \to S^1$ siten, että $x \in D^2$ kuvautuu siihen yksikäsitteiseen pisteeseen, jossa ympyrä S^1 ja pisteestä $f(x)$ alkava ja pisteen x kautta kulkeva puolisuora leikkaavat toisensa, kuten nähdään kuvassa 5. Kaikille $x \in S^1$ selkeästi pätee $g(x) = x$. Lisäksi tämä kuvaus on jatkuva (todistetaan myöhemmin), joten g on retraktio. Ympyrä S^1 on kiekon D^2 retrakti, mikä on ristiriidassa lauseen 7.4 kanssa. □

Merkitään $\mathrm{Diag} = \{(x, x) : x \in D^2\} \subset D^2 \times D^2$ niitä pareja kiekon pisteitä, joiden kautta ei pystytä muodostamaan yksikäsitteistä puolisuoraa. Kuvaus $\rho : (D^2 \times D^2) \setminus \mathrm{Diag} \to S^1$ määritellään siten, että kaksi erillistä pistettä $x \in D^2$ ja $y \in D^2$ kuvautuvat siihen yksikäsitteiseen pisteeseen, jossa ympyrä S^1 ja puolisuora pisteestä y pisteen x kautta leikkaavat, kuten kuvassa 5. Tälle kuvaukselle pätee $\rho(x, y) = x$ kaikilla $x \in S^1$ ja $y \neq x$.

Pisteen olemassaolo ja yksikäsitteisyys voidaan nähdä kuvasta 5, mutta ne voidaan myös todistaa formaalimmin (kts. esim. [5]). Tällöin näytetään, että tietyllä toisen asteen yhtälöllä on aina kaksi juurta ja että haluttu juuri on plusmerkillinen.

Näytetään seuraavaksi kuvauksen ρ jatkuvuus, josta puolestaan sitten seuraa lauseen 7.5 retraktion $g : D^2 \to S^1$ jatkuvuus, kun kuvaus $g : D^2 \to S^1$ määritellään kaavalla $g(x) = \rho(x, f(x))$.

Lause 7.6. *Kuvaus $\rho : (D^2 \times D^2) \setminus \mathrm{Diag} \to S^1$ on jatkuva.*

Todistus [5]. Kun $x, y \in D^2$ ovat erillisiä pisteitä, voidaan puolisuora pisteestä y pisteen x kautta parametrisoida

$$t \mapsto y + t(x - y)$$

kun $t \geq 0$. Leikkauspisteessä $t' \geq 1$ pätee

$$||y + t'(x - y)||^2 = \langle y + t'(x - y), y + t'(x - y)\rangle = 1.$$

Tämä yhtälö saadaan muotoon

$$||x - y||^2 t'^2 + 2\langle y, x - y\rangle t' + (||y||^2 - 1) = 0,$$

joka on toisen asteen yhtälö muuttujan t' suhteen. Ratkaisemalla yhtälö muuttujan t' suhteen saadaan

$$t' = \frac{-\langle y, x - y\rangle \pm \sqrt{\langle y, x - y\rangle^2 + ||x - y||^2(1 - |y|^2)}}{||x - y||^2},$$

missä haluttu leikkauspiste vastaa positiivista juurta. Leikkauspisteen t' lausekkeeksi saadaan

$$t' = \frac{-\langle y, x - y\rangle + \sqrt{\langle y, x - y\rangle^2 + ||x - y||^2(1 - ||y||^2)}}{||x - y||^2},$$

joka on pisteiden x ja y rationaalisena funktiona jatkuva. □

Viitteet

[1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[2] Thomas W. Hungerford. *Algebra*. Springer-Verlag, 1974.

[3] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, 1978.

[4] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1988.

[5] R. Schultz. Comments on the Brouwer Fixed Point Theorem, 2007. URL https://math.ucr.edu/~res/math246A/brouwer.pdf. [Online; luettu 15.10.2025].

[6] Michael A. Shulman. Set theory for category theory, 2008. URL https://arxiv.org/abs/0810.1279.

[7] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1981.

[8] Jussi Väisälä. *Topologia I*. Limes, 1999.

[9] Jussi Väisälä. *Topologia II*. Limes, 1999.