Teemu Helenius

Rumin-kompleksi ja Maxwellin yhtälöt Heisenbergin ryhmässä

Perustieteiden korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 3.11.2015.

Työn valvoja ja ohjaaja:

FT Kirsi Peltonen

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

AALTO-YLIOPISTO
PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU

DIPLOMITYÖN TIIVISTELMÄ

Tekijä: Teemu Helenius

Työn nimi: Rumin-kompleksi ja Maxwellin yhtälöt Heisenbergin ryhmässä

Päivämäärä: 3.11.2015 Kieli: Suomi Sivumäärä:6+40

Matematiikan ja systeemianalyysin laitos

Professuuri: Matematiikka Koodi: Mat-1

Valvoja ja ohjaaja: FT Kirsi Peltonen

Tässä työssä esitellään Heisenbergin ryhmän differentiaalimuotojen avaruuden ominaisuuksia, konstruoidaan yksityiskohtaisesti sen aliavaruuteen sopivalla differentiaalikuvauksella varustettu Rumin-kompleksi sekä luodaan konkretiaa kompleksin toimintaan vetämällä yhteyksiä Euklidisen avaruuden differentiaaligeometriaan. Rumin-kompleksi liittyy Heisenbergin ryhmän kontraktirakenteen vektorikenttiin vastaavasti, kuin de Rham -kompleksi kolmiulotteisiin Euklidisiin vektorikenttiin, mikä mahdollistaa gradientin, roottorin ja divergenssin määrittelemisen horisontaalisille vektoreille. Tällaisen vektorianalyysin yleistyminen Heisenbergin ryhmälle puolestaan mahdollistaa Maxwellin yhtälöiden kirjoittamisen Heisenbergin ryhmän horisontaalisille sähkö- ja magneettikentille. Tätä varten muodostetaan reaalisesta aikaulottuvuudesta ja Heisenbergin ryhmästä muodostuva aika-avaruusryhmä, jonka Rumin-kompleksi riippuu Heisenbergin ryhmän Rumin-kompleksista suhteellisen yksinkertaisella tavalla. Maxwellin yhtälöiden formulaatio aika-avaruusryhmän differentiaalimuodoilla toimii muodollisesti samalla tavalla kuin Euklidisista differentiaalimuodoista rakentuvassa pseudo-Riemannin aika-avaruudessa, mutta se osoittautuu ominaisuuksiltaan erilaiseksi. Heisenbergin ryhmän sähkö- ja magneettikentät ovat nimittäin kaksiulotteisia, horisontaalinen roottori on muodoltaan hyvin epätriviaali toisen asteen operaatio, sekä Lorentz-muunnokset eivät sekoita aikaa ja avaruutta keskenään.

Avainsanat: Heisenbergin ryhmä, Rumin-kompleksi, Maxwellin yhtälöt, kontaktirakenne, gradientti, roottori, divergenssi

AALTO UNIVERSITY
SCHOOL OF SCIENCE

ABSTRACT OF THE
MASTER'S THESIS

Author: Teemu Helenius

Title: Rumin-complex and Maxwell's equations in the Heisenberg group

Date: 3.11.2015 Language: Finnish Number of pages:6+40

Department of Mathematics and Systems Analysis

Professorship: Mathematics Code: Mat-1

Supervisor and instructor: D.Sc. Kirsi Peltonen

In this thesis we present some key properties of the space of differential forms in the Heisenberg group, construct in detail the Rumin-complex as its subspace with a suitable differential map, as well as establish some concrete connections to the differential geometry of the Euclidean space. The Rumin-complex connects to the vector fields of the contact structure in the Heisenberg group analogously to how the de Rham complex connects to the three-dimensional Euclidean vector fields. This in turn enables us to define the gradient, curl and divergence operations for the horizontal vectors, which leads to the possibility of writing the Maxwell equations for the horizontal analogues of electric and magnetic fields. For this we construct from a real time dimension and a Heisenberg group a spacetime group whose Rumin-complex will depend on the Rumin-complex of the Heisenberg group in a relatively simple manner. The formulation of the Maxwell's equations in the spacetime group works formally in the same way as in the Euclidean-based pseudo-Riemannian spacetime but its physical properties turn out to differ. For example the electric and magnetic fields are two-dimensional, the horizontal curl operator is of second order and rather non-trivial in its explicit form, and the Lorentz-transformations do not mix space and time.

Keywords: Heisenberg group, Rumin-complex, Maxwell equations,
contact structure, gradient, curl, divergence

Sisältö

1 Johdanto

Sub-Riemannin monistot kuvaavat tietynlaista jäykkyyttä rakenteessa, jossa etäisyyttä voidaan mitata vain pitkin tiettyä aliavaruutta sivuavia käyriä. Yksinkertaisimmassa epätriviaalissa esimerkissä – Heisenbergin ryhmässä – kyseessä on ryhmätoiminnolla varustettu topologisesti kolmiulotteinen avaruus, jossa kierteinen ns. horisontaalinen tasokenttä on tällainen aliavaruus. Michel Ruminin kehittämän teorian perusteella on mahdollista rajata Heisenbergin ryhmän differentiaalimuodot aliavaruuteen, joka muodostaa kompleksin sopivalla differentiaalikuvauksella. Tämä ns. Rumin-kompleksi liittyy taas horisontaalisen tason vektoreihin vastaavalla tavalla kuin de Rham -kompleksi liittyy kolmiulotteisiin Euklidisiin vektoreihin, mahdollistaen gradientin, roottorin ja divergenssin määrittelyn analogisesti Heisenbergin ryhmän horisontaalisille vektoreille.

Klassisen sähkömagnetismin kiteyttävät Maxwellin yhtälöt formuloidaan tavanomaisesti vektorien differentiaalioperaattoreiden avulla. Kuitenkin yhteys de Rham -kompleksiin mahdollistaa yhtälöille yksinkertaisemman esitystavan koordinaattiriippumattomalla tavalla differentiaalimuotojen kielellä. Vastaavanlainen yhteys horisontaalisten vektorioperaatioiden ja Rumin-kompleksin välillä taas viittaa mahdollisuuteen formuloida Maxwellin yhtälöt Heisenbergin ryhmän differentiaalimuotojen avulla. Liittäen aikaulottuvuus Heisenbergin ryhmään sopivasti huomataankin, että yhtälöt toimivat täsmälleen vastaavalla tavalla myös tässä formulaatiossa, joskin ryhmärakenne aiheuttaa oleellisesti Euklidisesta tapauksesta poikkeavia ilmiöitä. Kyseessä on nimittäin tässä tapauksessa kaksiulotteiset analogiat sähkö- ja magneettikentille, ja niiden välillä roottorikin on differentiaalikuvauksena toista astetta ja sellaisenaan perin epätriviaalia muotoa. Ehkä mielenkiintoisin näistä ominaisuuksista on kuitenkin se, ettei tämän formulaation Lorentz-muunnokset sekoita aikaa ja paikkaa keskenään. Näin ollen horisontaaliset sähkö- ja magneettikentät eivät ole muunnettavissa toisikseen koordinaattimuunnoksilla.

Tässä työssä tutkitaan Rumin-kompleksin muodostumista lähtien liikkeelle keskeisistä käsitemäärittelyistä, päätyen lopulta aika-avaruusryhmän kautta Maxwellin yhtälöihin ja niiden ominaisuuksiin. Työ seuraa karkeasti Bruno Franchin ja Maria C. Tesin paperia *Faraday's Form and Maxwell's Equations in the Heisenberg Group* [1]. Käsitemäärittelyissä lähteenä toimii pääasiassa John M. Leen kirja *Introduction to Smooth Manifolds* [2], kun taas Heisenbergin ryhmän perusmääritelmissä lähteenä on käytetty Luca Capognan, Donatella Daniellin, Scott D. Paulsin ja Jeremy T. Tysonin kirjaa *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem* [3]. Tarkemmissa yksityiskohdissa auttoivat niin ikään Franchin ja Tesin paperi *Wave and Maxwell's equations in Carnot groups* [4].

2 Heisenbergin ryhmä: keskeiset käsitteet

2.1 Kontaktirakenteet, Lien ryhmä ja Lien algebra

Määritellään ensin myöhemmän teorian osalta keskeisiä käsitteitä. Kaikki mainitut rakenteet ovat sileitä, ellei toisin mainita.

Määritelmä 2.1.1. Olkoon M monisto, jolla on pariton dimensio eli $\dim M = 2n+1,\ n \in \mathbb{Z}$. *Kontaktirakenne* on maksimaalisesti integroitumaton sileä hypertasokenttä ξ, joka määritellään pisteen $p \in M$ ympäristössä $U \subset M$ 1-muodon $\alpha \in \Omega^1(U)$ nolla-avaruutena $\xi_p = \operatorname{Ker}\alpha \subset TU$, missä kontaktirakenteen lokaalisti määrittelevä *kontaktimuoto* α toteuttaa ehdon

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Paria (M, ξ) kutsutaan tällöin *kontaktimonistoksi.*

Lemma 2.1.2. *Jos M on sileä monisto, $\alpha \in \Omega^1(M)$ 1-muoto ja X ja Y vektorikenttiä monistolla M, niin pätee*

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]),$$

missä $[X,Y] := XY - YX$.

Todistus. Yleispätevyyttä menettämättä voidaan merkitä $\alpha = fdg$, missä $f, g \in C^\infty(M)$. Tällöin pätee myös $d\alpha = df \wedge dg$, joten voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
&X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]) = X(fdg(Y)) - Y(fdg(X)) - fdg([X,Y]) \\
&= X(f(Yg)) - Y(f(Xg)) - f([X,Y]g) \\
&= (Xf)(Yg) + \cancel{f(X(Yg))} - (Yf)(Xg) - \cancel{f(Y(Xg))} - \underbrace{f([X,Y]g)}_{=\cancel{f(X(Yg))} - \cancel{f(Y(Xg))}} \\
&= df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) = df \wedge dg(X,Y) = d\alpha(X,Y).
\end{aligned}$$

□

Lause 2.1.3. *Olkoon M kolmiulotteinen monisto* $\dim M = 3$*, jonka jokaisen pisteen p ympäristössä $U \subset M$ on olemassa 1-muoto $\alpha \in \Omega^1(U)$ siten, että pätee $[X_p, Y_p] \notin \xi_p$ kaikille pisteittäin lineaarisesti riippumattomille vektorikentille $X_p, Y_p \in \xi_p$, missä $\xi_p = \operatorname{Ker}\alpha$. Tällöin (M, ξ) on kontaktimonisto.*

Todistus. Lemman 2.1.2 mukaan mielivaltaisessa ympäristössä $U \subset M$ pätee

$$d\alpha(X_p, Y_p) = X_p(\underbrace{\alpha(Y_p)}_{=0}) - Y_p(\underbrace{\alpha(X_p)}_{=0}) - \alpha([X_p, Y_p]) = -\alpha([X_p, Y_p]),$$

mistä seuraa $[X_p, Y_p] \notin \xi_p \quad \forall X_p, Y_p \in \xi_p, p \in U \quad \Leftrightarrow \quad d\alpha|_\xi \neq 0$. Kuitenkin jos evaluoidaan differentiaalimuotoa $\alpha \wedge d\alpha$ kannassa $\{X, Y, Z\}$, missä $Z \notin \operatorname{span}\{X, Y\} = \xi$, saadaan

$$\begin{aligned}\alpha \wedge d\alpha(X,Y,Z) = \frac{1}{2}\big(&\underbrace{\alpha(X)}_{=0} d\alpha(Y,Z) - \underbrace{\alpha(Y)}_{=0} d\alpha(X,Z) + \alpha(Z)d\alpha(X,Y)\\ &- \underbrace{\alpha(X)}_{=0} d\alpha(Z,Y) + \underbrace{\alpha(Y)}_{=0} d\alpha(Z,X) - \alpha(Z)d\alpha(Y,X)\,\big)\\ = \frac{1}{2}&\big(\alpha(Z)d\alpha(X,Y) - \alpha(Z)d\alpha(Y,X)\big).\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että $\alpha \wedge d\alpha(X,Y,Z) = 0 \;\Leftrightarrow\; d\alpha(X,Y) = d\alpha(Y,X) \;\Leftrightarrow\; d\alpha|_\xi = 0$, koska $d\alpha$ on antisymmetrinen. Näin ollen kokonaisuudessaan siis pätee

$$[X,Y] \notin \xi \;\; \forall X,Y \in \xi \;\Leftrightarrow\; d\alpha|_\xi \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha \wedge d\alpha \neq 0. \qquad \square$$

Määritelmä 2.1.4. *Lien ryhmä* $\mathbb{G}$ on sileä monisto, joka on myös ryhmä varustettuna tulokuvauksella $m : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ ja inversiokuvauksella $i : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$

$$m(g,h) = gh, \qquad i(g) = g^{-1},$$

missä m ja i ovat sileitä, sekä $g,h \in \mathbb{G}$. Ryhmähomomorfismia Lien ryhmässä kutsutaan *Lien ryhmän homomorfismiksi.*

Määritelmä 2.1.5. Vektorikenttää X Lien ryhmässä $\mathbb{G}$ kutsutaan *vaseninvariantiksi*, jos se säilyy muuttumattomana kaikissa vasentranslaatioissa $L_g(h) := gh$, missä $g,h \in \mathbb{G}$. Toisin sanoen pätee

$$d(L_g)_{g'}(X_{g'}) = X_{gg'}, \qquad \forall g, g' \in \mathbb{G},$$

missä $d(L_g)$ on translaation L_g Jacobin determinantti. Differentiaalimuotoa ω kutsutaan vaseninvariantiksi, jos pätee

$$L_g^*\omega = \omega \qquad \forall g \in \mathbb{G}.$$

Huomautus 2.1.6. Kuvauksen L_g^* määritelmästä seuraa, että vaseninvariantille vektorikentälle X, vastaavalle 1-muodolle $\alpha := X^\flat \in \Omega^1(\mathbb{G})$, sekä kaikille $g, g' \in \mathbb{G}$ pätee

$$(L_g^*\alpha)_{g'}(X_{g'}) = \underbrace{\alpha_{L_g(g')}}_{\alpha_{gg'}}\big(\underbrace{d(L_g)_{g'}(X_{g'})}_{X_{gg'}}\big) = \alpha_{g'}(X_{g'}).$$

Tästä seuraa, että vaseninvariantin vektorikentän X vastaava 1-muoto $\alpha := X^\flat$ on myös vaseninvariantti. Jos edelleen vaseninvariantit vektorikentät $\{X_1, ..., X_k\}$ virittävät kannan avaruuteen $\mathbb{G}$, ovat kaikki vastaavien 1-muotojen $\theta_1, ..., \theta_k$ ulkotuloista muodostuvat vakiokertoimiset differentiaalimuodot vaseninvariantteja. Tässä ovat kaikki vaseninvariantit differentiaalimuodot, koska niiden täytyy pysyä muuttumattomina vasentranslaatioissa.

Määritelmä 2.1.7. *Lien algebra* $\mathfrak{g}$ on reaalinen vektoriavaruus varustettuna kommutaattorilla $[X,Y] \in \mathfrak{g}$, missä $X,Y \in \mathfrak{g}$, ja kommutaattori toteuttaa seuraavat ehdot kaikille $X,Y,Z \in \mathfrak{g}$

- bilinearisuus: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],\ a, b \in \mathbb{R}$
- antisymmetrisyys: $[X, Y] = -[Y, X]$, sekä
- Jacobin identiteetti: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Lineaarikuvausta $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ kutsutaan *Lien algebran homomorfismiksi*, jos se säilyttää kommutaattorin eli $A[X, Y] = [AX, AY]$.

Huomautus 2.1.8. Jos vektorikentät X ja Y ovat vaseninvariantteja, on kommutaattori $[X, Y]$ myös vaseninvariantti.

Määritelmä 2.1.9. Lien ryhmän $\mathbb{G}$ Lien algebra $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathfrak{g}$ on kaikkien Lien ryhmän $\mathbb{G}$ vaseninvarianttien vektorikenttien joukko.

Lause 2.1.10. *Evaluaatio* $\varepsilon : \mathrm{Lie}(\mathbb{G}) \to T_e\mathbb{G},\ X \mapsto X_e$ *määrittelee lineaarisen isomorfismin.*

Lause 2.1.10 on todistettu kirjassa [2, s. 191].

Määritelmä 2.1.11. Jos Lien algebralle $\mathfrak{g}$ pätee $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \ldots$, missä rekursiivisesti $\mathfrak{g}_{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]$, ja erityisesti $\mathfrak{g}_j = 0$ jollekin indeksille j, kutsutaan Lien algebraa $\mathfrak{g}$ *nilpotentiksi*. Edelleen Lien ryhmää, jonka Lien algebra on nilpotentti, kutsutaan nilpotentiksi Lien ryhmäksi.

Lauseen 2.1.3 valossa on nyt helppo kuvitella kolmiulotteinen nilpotentti Lien ryhmä, joka automaattisesti sisältää kontaktirakenteen.

2.2 Heisenbergin ryhmä

Määritelmä 2.2.1. *Heisenbergin ryhmä* $\mathbb{H}$ on nilpotentti Lien ryhmä, joka on topologialtaan diffeomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanssa ja jonka Lien algebralle $\mathfrak{h}$ pätevät seuraavat ominaisuudet

- $\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2$, missä $\dim(V_1) = 2$ ja $\dim(V_2) = 1$, sekä
- $[V_1, V_1] = V_2,\ [V_1, V_2] = [V_2, V_2] = 0$,

missä V_1 ja V_2 ovat lineaarisia aliavaruuksia.

Koska $\mathfrak{h}$ on nilpotentti, eksponenttikuvaus $\exp : \mathfrak{h} \to \mathbb{H}$ on diffeomorfismi [5]. Näin ollen eksponenttifunktio antaa globaalit koordinaatit Heisenbergin ryhmälle $\mathbb{H}$. Ryhmän laskutoimitus $\cdot$ saadaan pääteltyä eksponenttikuvauksen toiminnasta

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x * y),$$

missä $*$ on toistaiseksi tuntematon Lien algebran $\mathfrak{h}$ operaatio, jonka eksplisiittinen muoto saadaan ratkaistua Campbellin–Hausdorffin kaavalla

$$x * y = \exp^{-1}(\exp(x) \cdot \exp(y)) = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \underbrace{\frac{1}{12}[[x, y], y] - \frac{1}{12}[[x, y], x] + ...}_{=0},$$

missä korkeamman asteen, sisäkkäisiä kommutaattoreita sisältävät termit kumoutuvat, koska määritelmän 2.2.1 mukaan kommutaattorit avaruuden V_2 alkion kanssa häviävät ja ainoat nollasta poikkeavat kommutaattorit tuottavat avaruuden V_2 alkion.

Olkoon $\{\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{T}\}$ avaruuden $\mathfrak{h}$ kanta siten, että $V_1 = \operatorname{span}\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$ ja $\tilde{T} := [\tilde{X}, \tilde{Y}] \in V_2$, jolloin pätee $[\tilde{X}, \tilde{T}] = [\tilde{Y}, \tilde{T}] = [\tilde{T}, \tilde{T}] = 0$. Tällöin mielivaltaisten pisteiden $x = x_1\tilde{X} + x_2\tilde{Y} + x_3\tilde{T} \in \mathfrak{h}$ ja $y = y_1\tilde{X} + y_2\tilde{Y} + y_3\tilde{T} \in \mathfrak{h}$ välinen laskutoimitus $*$ on muotoa

$$\begin{aligned} x * y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] &= (x_1 + y_1)\tilde{X} + (x_2 + y_2)\tilde{Y} + (x_3 + y_3)\tilde{T} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(x_1y_1 \underbrace{[\tilde{X}, \tilde{X}]}_{=0} + (x_1y_2 - x_2y_1) \underbrace{[\tilde{X}, \tilde{Y}]}_{=\tilde{T}} + x_2y_2 \underbrace{[\tilde{Y}, \tilde{Y}]}_{=0} \right) \\ &= (x_1 + y_1)\tilde{X} + (x_2 + y_2)\tilde{Y} + \left(x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \right) \tilde{T}. \end{aligned}$$

Kun vielä valitaan kanoniset koordinaatit Heisenbergin ryhmälle $\mathbb{H}$, eli identifioidaan ryhmän alkio $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$ arvoon $\exp(x_1\tilde{X} + x_2\tilde{Y} + x_3\tilde{T})$, niin saadaan vastaavasti ryhmäoperaatio

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \right), \tag{1}$$

jossa nolla-alkio on $(0, 0, 0)$ ja käänteisalkio on $(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

Lause 2.2.2. *Heisenbergin ryhmän $\mathbb{H}$ vektorikentät*

$$\begin{cases} X = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_t \\ Y = \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_t \\ T = \partial_t \end{cases}$$

ovat vaseninvariantit.

Todistus. Vaseninvariantit vektorikentät X, Y ja T voidaan määritellä vektorien $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ ja $\tilde{T}$ avulla ns. *infinitesimaalisina generaattoreina* [2, s. 526]

$$X_p = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} p \cdot \exp(\varepsilon\tilde{X}), \tag{2}$$

missä $\tilde{X}$ ja X_p ovat avaruuksien $\mathfrak{h}$ ja $T_p\mathbb{H}$ vektoreita, ja $p \in \mathbb{H}$ mielivaltainen piste. Vektorikentiksi saadaan

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} (x, y, t) \cdot (\varepsilon, 0, 0) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} (x + \varepsilon, y, t - \frac{1}{2}y\varepsilon) = \partial_x - \frac{1}{2}y\partial_t, \\ Y &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} (x, y, t) \cdot (0, \varepsilon, 0) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} (x, y + \varepsilon, t + \frac{1}{2}x\varepsilon) = \partial_y + \frac{1}{2}x\partial_t, \\ T &= \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} (x, y, t) \cdot (0, 0, \varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} (x, y, t + \varepsilon) = \partial_t. \end{aligned}$$

□

Huomautus 2.2.3. Myös näin määritellyille vektorikentille pätee vastaavasti pisteittäin $[X, Y] = T$, koska kuvaus (2), joka vie Lien algebran $\mathfrak{h}$ vektorit tangenttiavaruuden $T_p\mathbb{H}$ vektoreiksi on Lien algebran homomorfismi [2, s. 526].

Huomautus 2.2.4. Vektorikentät X, Y ja T ovat määritelmän mukaan vaseninvariantteja, eli pätee $X, Y, T \in \mathfrak{h}$. Voidaan siis identifioida $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = Y$ ja $\tilde{T} = T$.

Lause 2.2.5. *Vastaavat vaseninvariantit 1-muodot ovat*

$$\begin{cases} X^\flat = dx \\ Y^\flat = dy \\ T^\flat = dt - \frac{1}{2}(xdy - ydx) \end{cases}.$$

Todistus. Oletetaan 1-muotojen olevan yleisintä muotoa

$$X^\flat = A_1dx + B_1dy + C_1dt \Rightarrow \begin{cases} X^\flat(X) = A_1 - \frac{1}{2}yC_1 = 1 \\ X^\flat(Y) = B_1 + \frac{1}{2}xC_1 = 0 \\ X^\flat(T) = C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 1 \\ B_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X^\flat = dx,$$

$$Y^\flat = A_2dx + B_2dy + C_2dt \Rightarrow \begin{cases} Y^\flat(X) = A_2 - \frac{1}{2}yC_2 = 0 \\ Y^\flat(Y) = B_2 + \frac{1}{2}xC_2 = 1 \\ Y^\flat(T) = C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ B_2 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y^\flat = dy,$$

$$T^\flat = A_3dx + B_3dy + C_3dt \Rightarrow \begin{cases} T^\flat(X) = A_3 - \frac{1}{2}yC_3 = 0 \\ T^\flat(Y) = B_3 + \frac{1}{2}xC_3 = 0 \\ T^\flat(T) = C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_3 = \frac{1}{2}y \\ B_3 = -\frac{1}{2}x \\ C_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T^\flat = dt - \frac{1}{2}(xdy - ydx).$$ □

Huomautus 2.2.6. 1-muoto $\theta := dt - \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ on kontaktimuoto avaruudessa $\mathbb{R}^3$, koska se täyttää ehdon

$$\theta \wedge d\theta = \left(dt - \frac{1}{2}(xdy - ydx)\right) \wedge (-dx \wedge dy) = -dx \wedge dy \wedge dt \neq 0.$$

Darboux'n lauseen mukaan kontaktimuoto θ määrittelee lokaalisti kaikki kontaktirakenteet avaruudessa $\mathbb{R}^3$ suunnistusta vaille. Ei olekaan sattumaa, että Heisenbergin ryhmä muodostaa kontaktimoniston $(\mathbb{H}, \xi)$ kontaktirakenteella $\xi = \operatorname{Ker}\theta = \operatorname{span}\{X, Y\}$, nimittäin määritelmän 2.2.1 mukaan pätee $[X, Y] \notin \xi$, mikä puolestaan implikoi lauseen 2.1.3 perusteella kontaktirakennetta. Lisäksi koska pätee $\theta \wedge d\theta = -dx \wedge dy \wedge dt$, missä $dx \wedge dy \wedge dt = dx \wedge dy \wedge \theta$ on tilavuusmuoto, tuottaa Heisenbergin ryhmän tämä koordinaattiesitys kontaktirakenteelle negatiivisen suunnistuksen.

Kontaktirakenteella $\operatorname{Ker}\theta = \operatorname{span}\{X, Y\}$ on hyvin erityinen asema Heisenbergin ryhmässä. Tangenttikimpun $T\mathbb{H}$ vastaavaa alikimppua $H\mathbb{H}$ kutsutaankin *horisontaaliseksi* kimpuksi, ja sen säikeet siis ovat mielivaltaisille pisteille $p \in \mathbb{H}$

$$H\mathbb{H}_p = \operatorname{span}\{X_p, Y_p\} = \operatorname{Ker}\theta_p.$$

Kyseinen alikimppu $H\mathbb{H}$ sopivalla sisätulolla määrittelee Heisenbergin ryhmään sub-Riemannin rakenteen siten, että horisontaaliset vektorit X ja Y koostavat ortonormaalin kannan $\{X, Y\}$ pisteittäin.

Määritelmä 2.2.7. Olkoon $s > 0$, jolloin dilaatio $\delta_s : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ määritellään

$$\delta_s(x_1, x_2, x_3) := (sx_1, sx_2, s^2x_3),$$

missä $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$.

Propositio 2.2.8. *Dilaatiot ovat ryhmäautomorfismeja.*

Todistus.

$$\begin{aligned}
&\delta_s(x_1, x_2, x_3) \cdot \delta_s(y_1, y_2, y_3) = (sx_1, sx_2, s^2x_3) \cdot (sy_1, sy_2, s^2y_3) \\
&= \left(sx_1 + sy_1, sx_2 + sy_2, s^2x_3 + s^2y_3 + \frac{1}{2}(sx_1sy_2 - sx_2sy_1)\right) \\
&= \left(s(x_1 + y_1), s(x_2 + y_2), s^2\big(x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)\big)\right) \\
&= \delta_s\big((x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3)\big).
\end{aligned}$$

□

Dilaation olemassaolo tekee Heisenbergin ryhmästä ns. *homogeenisen Lien ryhmän.*

Yleisemmin dilaatio voidaan määritellä myös vastaavasti stratifioidulle Lien algebralle $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2$ siten, että pätee komponenteittain

$$\delta_s x = \begin{cases} sx, & \text{jos } x \in V_1 \\ s^2x, & \text{jos } x \in V_2 \end{cases}.$$

2.3 Multilineaarista algebraa Heisenbergin ryhmässä

Merkitään $\theta_1 := X_1^\flat := X^\flat = dx$, $\theta_2 := X_2^\flat := Y^\flat = dy$ ja $\theta_3 := X_3^\flat := T^\flat = \theta$, jolloin siis pätee $\Omega^1(\mathbb{H}) = \operatorname{span}\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Olkoon $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sisätulo 1-muotojen avaruudessa $\Omega^1(\mathbb{H})$ siten, että $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ on ortonormaali kanta eli määritellään 1-muodoille $\theta, \phi \in \Omega^1(\mathbb{H})$

$$\langle\theta, \phi\rangle := \langle\theta^\sharp, \phi^\sharp\rangle,$$

missä sisätulo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ avaruudessa $\mathbb{H}$ tekee kannan $\{X, Y, T\}$ ortonormaaliksi.

Avaruuden $\Omega^1(\mathbb{H})$ ulkoalgebra on porrastettu $(n := 3)$

$$\Omega^*(\mathbb{H}) = \bigoplus_{h=0}^{n} \Omega^h(\mathbb{H}),$$

missä $\Omega^0(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.

Voidaan määritellä sisätulo avaruuteen $\Omega^h(\mathbb{H})$ asettamalla

$$\langle \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_h, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_h \rangle := \det\langle \theta_i^\sharp, \phi_j^\sharp \rangle, \quad \theta_1, ..., \theta_h, \phi_1, ..., \phi_h \in \Omega^1(\mathbb{H}),$$

niin, että h-kovektorien joukko $\{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_h \leq n\}$ muodostaa ortonormaalin kannan. Kaikille $1 \leq h \leq n$ pätee [6]

$$\Omega^h(\mathbb{H}) := \operatorname{span}\{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_h \leq n\}.$$

Määritelmä 2.3.1. Hodgen tähti $* : \Omega^h(\mathbb{H}) \to \Omega^{n-h}(\mathbb{H}), 0 \leq h \leq n$ on lineaarinen isomorfismi, joka toteuttaa ehdon

$$\varphi \wedge *\psi = \langle \varphi, \psi \rangle \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n,$$

missä $\varphi, \psi \in \Omega^h(\mathbb{H})$. Differentiaalimuotoja φ ja ϕ kutsutaan tällöin toistensa Hodgen duaaleiksi.

Koska avaruuden $\Omega^h(\mathbb{H})$ kanta on ortonormaali, voidaan kantakovektoreille määrittää operaation toiminta ehdosta

$$\begin{aligned} & * \varphi := *(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) =: A\theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_{n-h}} \\ \Rightarrow \quad & \varphi \wedge *\varphi = A\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} \wedge \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_{n-h}} = \underbrace{\langle \varphi, \varphi \rangle}_{=1} \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n, \end{aligned}$$

missä $\varphi \in \Omega^h(\mathbb{H})$. Selvästi siis A on sen permutaation σ merkki, mikä kuvaa indeksijoukon $\{i_1, ..., i_h, j_1, ..., j_{n-h}\}$ indeksijoukkoon $\{1, ..., n\}$ (määritellään permutaatioiden yhteydessä aaltosulkeet $\{\}$ säilyttämään järjestyksen) eli pätee

$$*(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) = (\operatorname{sgn} \sigma)\theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_{n-h}},$$

missä $\sigma\{i_1, ..., i_h, j_1, ..., j_{n-h}\} = \{1, ..., n\}$, ja $\operatorname{sgn} \sigma$ on transpositioiden lukumäärä permutaatiossa σ.

Esimerkki 2.3.2. Voidaan luetella kaikkien Heisenbergin ryhmän $\mathbb{H}$ kantakovektorien Hodgen duaalit:

$$\begin{aligned} *(1) &= dx \wedge dy \wedge \theta, & *(dx \wedge dy) &= \theta, \\ *dx &= dy \wedge \theta, & *(dx \wedge \theta) &= -dy, \\ *dy &= -dx \wedge \theta, & *(dy \wedge \theta) &= dx, \\ *\theta &= dx \wedge dy, & *(dx \wedge dy \wedge \theta) &= 1. \end{aligned}$$

Propositio 2.3.3. *Pätee* $* * \varphi = (-1)^{h(n-h)}\varphi$, *missä* $\varphi \in \Omega^h(\mathbb{H})$.

Todistus. Hodgen tähti on lineaarinen isomorfismi, joten riittää, että todistetaan tämä mielivaltaiselle kantakovektorille $\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}$

$$\begin{aligned} * * (\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) &= *((\operatorname{sgn} \sigma_1)\theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_{n-h}}) \\ &= (\operatorname{sgn} \sigma_2 \operatorname{sgn} \sigma_1)\theta_{k_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{k_h} = (\operatorname{sgn} \sigma_3 \operatorname{sgn} \sigma_2 \operatorname{sgn} \sigma_1)\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}, \end{aligned}$$

missä permutaatiot σ_1, σ_2 ja σ_3 määritellään

$$\begin{aligned}
&\sigma_1\{i_1,...,i_h,j_1,...,j_{n-h}\} := \{1,...,n\},\\
&\sigma_2\{j_1,...,j_{n-h},k_1,...,k_h\} := \{1,...,n\},\\
&\sigma_3\{j_1,...,j_{n-h},i_1,...,i_h\} := \{j_1,...,j_{n-h},k_1,...,k_h\}.
\end{aligned}$$

Jos määritellään lisäksi permutaatio σ_4 siten, että

$$\sigma_4\{i_1,...,i_h,j_1,...,j_{n-h}\} = \{j_1,...,j_{n-h},i_1,...,i_h\},$$

jolloin selvästikin pätee $\operatorname{sgn}\sigma_4 = (-1)^{h(n-h)}$, voidaan selvittää

$$\begin{aligned}
&\sigma_1\{i_1,...,i_h,j_1,...,j_{n-h}\} = \{1,...,n\} = \sigma_2\{j_1,...,j_{n-h},k_1,...,k_h\}\\
\Rightarrow\quad &\sigma_2^{-1}\sigma_1\{i_1,...,i_h,j_1,...,j_{n-h}\} = \{j_1,...,j_{n-h},k_1,...,k_h\}\\
= {}&\sigma_3\{j_1,...,j_{n-h},i_1,...,i_h\} = \sigma_3\sigma_4\{i_1,...,i_h,j_1,...,j_{n-h}\}\\
\Rightarrow\quad &\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \sigma_4\\
\Rightarrow\quad &\operatorname{sgn}\sigma_3\operatorname{sgn}\sigma_2\operatorname{sgn}\sigma_1 = \operatorname{sgn}(\sigma_3^{-1})\operatorname{sgn}(\sigma_2^{-1})\operatorname{sgn}\sigma_1\\
= {}&\operatorname{sgn}(\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1) = \operatorname{sgn}\sigma_4 = (-1)^{h(n-h)},
\end{aligned}$$

missä on käytetty yhteyttä, joka pätee kaikille permutaatioille σ_1 ja σ_2

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1\sigma_2) = \operatorname{sgn}\sigma_1\operatorname{sgn}\sigma_2 \;\Rightarrow\; \operatorname{sgn}(\sigma_1^{-1}) = (\operatorname{sgn}\sigma_1)^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma_1.$$

Näin ollen saadaan

$$**(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_h}) = (\operatorname{sgn}\sigma_3\operatorname{sgn}\sigma_2\operatorname{sgn}\sigma_1)\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_h} = (-1)^{h(n-h)}\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_h}. \quad \square$$

Huomautus 2.3.1. Heisenbergin ryhmässä $\mathbb{H}$ pätee $n = 3$, jolloin eksponentin $h(3-h)$ toinen kerroin on aina parillinen, joten pätee erityisesti

$$**\varphi = \varphi \qquad \forall\varphi\in\Omega^h(\mathbb{H}).$$

Korollaari 2.3.4. *Pätee* $\langle *\varphi, *\psi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle$, *missä* $\varphi,\psi\in\Omega^h(\mathbb{H})$.

Todistus.

$$\begin{aligned}
&\langle *\varphi, *\psi\rangle\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_n = *\varphi\wedge**\psi = *\varphi\wedge(-1)^{h(n-h)}\psi = (-1)^{h(n-h)}*\varphi\wedge\psi\\
= {}&\left((-1)^{h(n-h)}\right)^2\psi\wedge*\varphi = \psi\wedge*\varphi = \langle\psi,\varphi\rangle\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_n = \langle\varphi,\psi\rangle\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_n. \quad \square
\end{aligned}$$

Määritelmä 2.3.5. Lineaarikuvausta $L:\mathbb{G}\to\mathbb{M}$, missä $\mathbb{G}$ ja $\mathbb{M}$ ovat Lien ryhmiä, kutsutaan H-lineaariseksi, jos pätee

- L on Lien ryhmän homomorfismi,
- L on homogeeninen, eli $\delta_r(Lx) = L(\delta_r x) \quad \forall r>0$.

Tällöin merkitään $L\in HL(\mathbb{G},\mathbb{M})$.

H-lineaarinen kuvaus L indusoi Lien algebran homomorfismin $l : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$, jos Lien ryhmiä $\mathbb{G}$ ja $\mathbb{M}$ vastaavat Lien algebrat $\mathfrak{g}$ sekä $\mathfrak{m}$. Kuvaus on lineaarinen ja se voidaan konstruoida suoraan kuvauksen L avulla: $l := (\exp^{-1}) \circ L \circ \exp$.

Lemma 2.3.6. *Kaikki Heisenbergin ryhmän H-lineaariset kuvaukset $L \in HL(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ ovat muotoa*

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

missä $a_{33} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Todistus. Oletetaan, että $L \in HL(\mathbb{H}, \mathbb{H})$ on yleisintä muotoa $L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, jolloin homogeenisuusehto määrää, että mielivaltaiselle $r > 0$ pätee

$$\begin{aligned}
&\delta_r \left(L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = L \left(\delta_r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \\
\Rightarrow \quad &\begin{pmatrix} ra_{11}x_1 + ra_{12}x_2 + ra_{13}x_3 \\ ra_{21}x_1 + ra_{22}x_2 + ra_{23}x_3 \\ r^2a_{31}x_1 + r^2a_{32}x_2 + r^2a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}rx_1 + a_{12}rx_2 + a_{13}r^2x_3 \\ a_{21}rx_1 + a_{22}rx_2 + a_{23}r^2x_3 \\ a_{31}rx_1 + a_{32}rx_2 + a_{33}r^2x_3 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad &a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0.
\end{aligned}$$

Kuvauksen L on kuitenkin oltava lisäksi ryhmäendomorfismi, eli mielivaltaisille pisteille $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ja $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ pätee $L(x \cdot y) = Lx \cdot Ly$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ a_{33}y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad &\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + y_1) + a_{12}(x_2 + y_2) \\ a_{21}(x_1 + y_1) + a_{22}(x_2 + y_2) \\ a_{33}\big(x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ a_{33}x_3 + a_{33}y_3 + \frac{1}{2}\big((a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2)\big) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad a_{33}(x_1y_2 - x_2y_1) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \\
&= \cancel{a_{11}a_{21}x_1y_1} - \cancel{a_{21}a_{11}x_1y_1} + a_{12}a_{21}x_2y_1 - a_{22}a_{11}x_2y_1 \\
&\quad + a_{11}a_{22}x_1y_2 - a_{21}a_{12}x_1y_2 + \cancel{a_{12}a_{22}x_2y_2} - \cancel{a_{22}a_{12}x_2y_2} \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1y_2 - (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2y_1 \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(x_1y_2 - x_2y_1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \equiv \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Lemma 2.3.7. *Jos Lien ryhmien* $\mathbb{G}$ *ja* $\mathbb{M}$ *vastaavat Lien algebrat* $\mathfrak{g}$ *ja* $\mathfrak{m}$ *ovat stratifioituja, eli* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\kappa_1} V_i$ *ja* $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i=1}^{\kappa_2} W_i$*, niin H-lineaarisen kuvauksen* $L \in HL(\mathbb{G}, \mathbb{M})$ *indusoimalla kuvauksella* $l : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ *on kontaktiominaisuus*

$$l(V_i) \subset W_i \quad i = 1, ..., \kappa_1.$$

Lemma 2.3.7 on todistettu paperissa [7].

3 Rumin-kompleksi

3.1 Rumin-kompleksi Heisenbergin ryhmälle

Määritellään aluksi stratifioidun Lien ryhmän differentiaalimuodoille puhtaan painon käsite.

Määritelmä 3.1.1. Jos Lien ryhmän $\mathbb{G}$ Lien algebra $\mathfrak{g}$ on stratifioitu siten, että $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\kappa$, niin 1-muodolla $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{G}), \alpha \neq 0$, jolle pätee $\alpha^\sharp \in V_k$, sanotaan olevan *puhdas paino* k, jota merkitään $w(\alpha) = k$.
Yleisemmin differentiaalimuodolla $\beta \in \Omega^h(\mathbb{G})$ sanotaan olevan puhdas paino k, mikäli pätee $w(\theta_{i_1}) + \cdots + w(\theta_{i_h}) = k$ kaikille niille kantakovektoreille $\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}$, joiden lineaarikombinaationa differentiaalimuoto β muodostuu

$$\beta = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n} b_{i_1 \ldots i_h} \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}.$$

Esimerkki 3.1.2. Heisenbergin ryhmässä $\mathbb{H}$ Lien algebralle pätee $\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2$, missä $V_1 = \operatorname{span}\{X, Y\}$ ja $V_2 = \operatorname{span}\{T\}$, sekä $dx^\sharp = X$, $dy^\sharp = Y$ ja $\theta^\sharp = T$. Painokertoimet eri kantakovektoreille ovat näin ollen

$$\begin{array}{ccc} w(dx) = 1, & w(dy) = 1, & w(\theta) = 2, \\ w(dx \wedge dy) = 2, & w(dx \wedge \theta) = 3, & w(dy \wedge \theta) = 3, \\ & w(dx \wedge dy \wedge \theta) = 4, & \end{array}$$

missä saman painon kantakovektoreista muodostuvat differentiaalimuodot saavat vastaavan puhtaan painon, esimerkiksi pätee

$$w(dx \wedge \theta + 4x dy \wedge \theta) = 3.$$

Propositio 3.1.3. *Jos h-muotojen $\alpha, \beta \in \Omega^h(\mathbb{H})$ painot ovat erisuuret $w(\alpha) \neq w(\beta)$, niin pätee $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$.*

Todistus. Olkoot

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n} a_{i_1 \ldots i_h} \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}, \qquad \beta = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_h \leq n} b_{j_1 \ldots j_h} \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_h},$$

jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \left\langle \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n} a_{i_1 \ldots i_h} \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}, \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_h \leq n} b_{j_1 \ldots j_h} \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_h} \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_h \leq n}} a_{i_1 \ldots i_h} b_{j_1 \ldots j_h} \left\langle \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}, \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_h} \right\rangle. \end{aligned}$$

Toisaalta koska differentiaalimuotojen painot ovat erisuuret $w(\alpha) \neq w(\beta)$, niin kaikilla $1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n$ ja $1 \leq j_1 < \ldots < j_h \leq n$ pätee $\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} \neq \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_h}$. Tällöin kyseessä ovat ortonormaalin kannan eri kantakovektorit, eli sisätulo häviää $\langle \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}, \theta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_h} \rangle = 0$ jokaisessa summan termissä ja saadaan

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 0. \qquad \square$$

Korollaari 3.1.4. *h-muotojen avaruus voidaan esittää suorana summana eri puhtaiden painojen aliavaruuksia*

$$\Omega^h(\mathbb{H}) = \bigoplus_{p=M_h^{min}}^{M_h^{max}} \Omega^{h,p}(\mathbb{H}),$$

missä $\Omega^{h,p}(\mathbb{H}) = \operatorname{span}\{\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_h} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_h \le n, w(\theta_{i_1})+\cdots+w(\theta_{i_h}) = p\}$, *sekä* M_h^{min} *ja* M_h^{max} *ovat vaseninvarianttien h-muotojen pienin ja suurin paino.*

Esimerkki 3.1.5. Heisenbergin ryhmän 2-muodoille pätee $\Omega^2(\mathbb{H}) = \Omega^{2,2}(\mathbb{H}) \oplus \Omega^{2,3}(\mathbb{H})$, missä puhtaiden painojen aliavaruudet ovat

$$\Omega^{2,2}(\mathbb{H}) = \operatorname{span}\{dx \wedge dy\}, \qquad \Omega^{2,3}(\mathbb{H}) = \operatorname{span}\{dx \wedge \theta, dy \wedge \theta\}.$$

Propositio 3.1.6. *Olkoon* $\alpha \in \Omega^{h,p}(\mathbb{H})$ *vaseninvariantti h-muoto, jonka puhdas paino on p. Jos pätee* $d\alpha \neq 0$, *niin pätee myös* $w(d\alpha) = w(\alpha)$ *eli*

$$d\left(\Omega^{h,p}(\mathbb{H})\right) \subset \Omega^{h+1,p}(\mathbb{H}).$$

Todistus. Riittää osoittaa tämä kaikille Heisenbergin ryhmän $\mathbb{H}$ vaseninvarianteille kantakovektoreille, koska loput vaseninvariantit differentiaalimuodot muodostuvat näistä vakiokertoimisina lineaariyhdisteinä

$$\begin{aligned} d(dx) &= d(dy) = d(dx \wedge dy) = 0, \\ d(dx \wedge \theta) &= -dx \wedge d\theta = -dx \wedge (-dx \wedge dy) = 0, \\ d(dy \wedge \theta) &= -dy \wedge d\theta = -dy \wedge (-dx \wedge dy) = 0, \\ d(dx \wedge dy \wedge \theta) &= dx \wedge dy \wedge d\theta = dx \wedge dy \wedge (-dx \wedge dy) = 0, \text{ kun taas} \\ w(d\theta) &= w(-dx \wedge dy) = 2 = w(\theta). \end{aligned}$$

□

Olkoon puhtaan painon p h-muoto

$$\alpha := \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1})+\cdots+w(\theta_{i_h})=p}} a_{i_1\ldots i_h}\, \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}.$$

Sen differentiaalille $d\alpha$ pätee

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1})+\cdots+w(\theta_{i_h})=p}} d(a_{i_1\ldots i_h}\, \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) \\ &= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1})+\cdots+w(\theta_{i_h})=p}} a_{i_1\ldots i_h}\, d(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) \quad + \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1})+\cdots+w(\theta_{i_h})=p}} (da_{i_1\ldots i_h}) \wedge (\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) \\ &= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1})+\cdots+w(\theta_{i_h})=p}} a_{i_1\ldots i_h}\, d(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) + \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1})+\cdots+w(\theta_{i_h})=p}} \sum_{X_j \in V_k} (X_j a_{i_1\ldots i_h})\, \theta_j \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}, \end{aligned}$$

missä edelleen on määritelty $X_1 := X$, $X_2 := Y$ ja $X_3 := T$.

Määritelmä 3.1.7. Olkoon $\alpha \in \Omega^{h,p}(\mathbb{H})$ puhtaan painon p h-muoto määriteltynä kuten yllä. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$d\alpha = d_0\alpha + d_1\alpha + d_2\alpha,$$

missä

$$d_0\alpha := \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1}) + \cdots + w(\theta_{i_h}) = p}} a_{i_1 \ldots i_h}\, d(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) \quad \in \Omega^{h+1,p}(\mathbb{H}),$$

ja

$$d_k\alpha := \sum_{\substack{1 \le i_1 < \ldots < i_h \le n \\ w(\theta_{i_1}) + \cdots + w(\theta_{i_h}) = p}} \sum_{X_j \in V_k} (X_j a_{i_1 \ldots i_h})\, \theta_j \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} \quad \in \Omega^{h+1,p+k}(\mathbb{H}),$$

kun $k = 1, 2$.

Huomautus 3.1.8. Koska pätee $\theta_j^\sharp \in V_1 \Rightarrow w(\theta_j) = 1$ ja $\theta_j^\sharp \in V_2 \Rightarrow w(\theta_j) = 2$, operaattori d_1 kasvattaa h-muodon painoa yhdellä, ja d_2 kahdella. Näin ollen puhtaan painon differentiaalimuodon differentiaalilla ei yleensä ole puhdasta painoa.

Lemma 3.1.9. *Jos differentiaalimuoto $\alpha \in \Omega^h(\mathbb{H})$ on vaseninvariantti, niin sen differentiaalille $d\alpha$ pätee $d\alpha = d_0\alpha$, ja se on vaseninvariantti.*

Todistus. Epätriviaalissa tapauksessa $\alpha \neq 0$ voidaan korollaarin 3.1.4 perusteella merkitä $\alpha = \alpha_{M_h^{min}} + \ldots + \alpha_{M_h^{max}}$ missä $\alpha_i \in \Omega^{h,i}(\mathbb{H})$, jolloin edelleen proposition 3.1.6 mukaan pätee $w(d\alpha_i) = w(\alpha_i)\ \ \forall i = M_h^{min}, \ldots, M_h^{max}$. Kuitenkin differentiaalioperaation $d\alpha$ termeistä ainoastaan $d_0\alpha$ säilyttää painon, joten $d\alpha = d_0\alpha$. Lisäksi α on vaseninvariantti, eli mielivaltaiselle $g \in \mathbb{H}$ pätee $L_g^*\alpha = \alpha$, jolloin saadaan

$$L_g^*(d_0\alpha) = L_g^*(d\alpha) = d(L_g^*\alpha) = d\alpha = d_0\alpha.$$

Näin ollen myös $d_0\alpha$ on vaseninvariantti. □

Lemma 3.1.10. (Ω^*, d_0) *on kompleksi eli* $d_0^2 = 0$.

Todistus. Olkoon $\alpha \in \Omega^{h,p}(\mathbb{H})$ mielivaltainen puhtaan painon p h-muoto

$$\begin{aligned} 0 = d^2\alpha &= (d_0 + d_1 + d_2)^2\alpha \\ &= \underbrace{d_0^2\alpha}_{\in \Omega^{h+1,p}(\mathbb{H})} + \underbrace{(d_0d_1 + d_1d_0)\alpha}_{\in \Omega^{h+1,p+1}(\mathbb{H})} + \underbrace{(d_1^2 + d_0d_2 + d_2d_0)\alpha}_{\in \Omega^{h+1,p+2}(\mathbb{H})} + \underbrace{(d_1d_2 + d_2d_1)\alpha}_{\in \Omega^{h+1,p+3}(\mathbb{H})} + \underbrace{d_2^2\alpha}_{\in \Omega^{h+1,p+4}(\mathbb{H})}, \end{aligned}$$

kuitenkin proposition 3.1.3 mukaan eri painojen differentiaalimuodot ovat ortogonaalisia. Näin ollen jokainen termi häviää, ja erityisesti $d_0^2 = 0$. □

Määritelmä 3.1.11. Kodifferentiaali $\delta_i : \Omega^{h,p}(\mathbb{H}) \to \Omega^{h-1,p-i}(\mathbb{H})$ on operaattorin d_i formaali L^2-adjungaatti, eli differentiaalimuodoille $\alpha \in \Omega^{h,p}(\mathbb{H})$, $\beta \in \Omega^{h-1,p-i}(\mathbb{H})$ pätee

$$(\delta_i\alpha, \beta) := \int \langle \delta_i\alpha, \beta \rangle dV = \int \langle \alpha, d_i\beta \rangle dV = (\alpha, d_i\beta),$$

missä $dV = dx \wedge dy \wedge \theta$ on tilavuusmuoto, ja pätee $h = 0, \ldots, n = 3$, $M_h^{min} \le p \le M_{h-1}^{max}$, sekä $i = 0, 1, 2,\ i \le p - M_{h-1}^{min}$.

Huomautus 3.1.12. Kodifferentiaali δ_i todella tuottaa differentiaalimuodoista $\alpha \in \Omega^{h,p}(\mathbb{H})$ $(h-1)$-muotoja painolla $p-i$ eli $\delta_i(\Omega^{h,p}(\mathbb{H})) \subset \Omega^{h-1,p-i}(\mathbb{H})$, koska

$$(\delta_i\alpha, \beta) := \int \langle \delta_i\alpha, \beta \rangle dV = \int \langle \alpha, d_i\beta \rangle dV \neq 0$$

pätee vain, jos differentiaalimuodon β paino on $p-i$. Lisäksi h-muodon α painolle pätee $M_h^{min} \leq p \leq M_h^{max}$, ja differentiaalimuodon β painolle pätee $p-i \geq M_{h-1}^{min} \Leftrightarrow i \leq p - M_{h-1}^{min}$.

Huomautus 3.1.13. δ-symboolilla merkitään tässä dilaation sijasta kodifferentiaalia. Kodifferentiaali kuitenkin toimii differentiaalimuotojen tasolla, joten asiayhteyden perusteella lienee selvää, kumpaa tarkoitetaan missäkin tapauksessa.

Propositio 3.1.14. *Jos valitaan* $h = 0, ..., n = 3$, $M_h^{min} \leq p \leq M_{h-1}^{max}$, *sekä* $i = 0, 1, 2$, $i \leq p - M_{h-1}^{min}$, *niin pätee operaattorille* $\delta_i : \Omega^{h,p}(\mathbb{H}) \to \Omega^{h-1,p-i}(\mathbb{H})$

$$\delta_i = (-1)^{n(h+1)+1} * d_i * .$$

Todistus. Tiedetään, että tavanomaiselle kodifferentiaalioperaattorille pätee $\delta = (-1)^{n(h+1)+1} * d*$, joten mielivaltaiselle h-muodolle $\alpha \in \Omega^{h,p}(\mathbb{H})$ pätee

$$\begin{aligned}\underbrace{\delta_0\alpha}_{\in\Omega^{h-1,p}(\mathbb{H})} + \underbrace{\delta_1\alpha}_{\in\Omega^{h-1,p-1}(\mathbb{H})} + \underbrace{\delta_2\alpha}_{\in\Omega^{h-1,p-2}(\mathbb{H})} &= \delta\alpha = (-1)^{n(h+1)+1} \underbrace{*d*\alpha}_{\in\Omega^{h-1}(\mathbb{H})} \\ &= \underbrace{(-1)^{n(h+1)+1} * d_0 * \alpha}_{\in\Omega^{h-1,p}(\mathbb{H})} + \underbrace{(-1)^{n(h+1)+1} * d_1 * \alpha}_{\in\Omega^{h-1,p-1}(\mathbb{H})} + \underbrace{(-1)^{n(h+1)+1} * d_2 * \alpha}_{\in\Omega^{h-1,p-2}(\mathbb{H})}.\end{aligned}$$

Koska eri painojen differentiaalimuodot ovat ortogonaaliset, pätee yhtäsuuruus termeittäin. □

Huomautus 3.1.15. Heisenbergin ryhmässä pätee $n = 3$, jolloin kodifferentiaali sievenee muotoon

$$\delta_i = (-1)^{n(h+1)+1} * d_i * = (-1)^{3h+4} * d_i * = (-1)^h * d_i * .$$

Esimerkki 3.1.16. Lasketaan 2-muodon $(xy+2t)dx \wedge dy$ kodifferentiaalit

$$\begin{aligned}\delta_0\big((xy+2t)dx \wedge dy\big) &= (-1)^2 * d_0 * \big((xy+2t)dx \wedge dy\big) = *d_0\big((xy+2t)\theta\big) \\ &= *\big(-(xy+2t)dx \wedge dy\big) = -(xy+2t)\theta, \\ \delta_1\big((xy+2t)dx \wedge dy\big) &= *d_1\big((xy+2t)\theta\big) = *\big(X(xy+2t)dx \wedge \theta + Y(xy+2t)dy \wedge \theta\big) \\ &= *\left((\partial_x - \frac{1}{2}y\partial_t)(xy+2t)dx \wedge \theta + (\partial_y + \frac{1}{2}x\partial_t)(xy+2t)dy \wedge \theta\right) \\ &= *\big((y-y)dx \wedge \theta + (x+x)dy \wedge \theta\big) = *(2xdy \wedge \theta) = 2xdx, \\ \delta_2\big((xy+2t)dx \wedge dy\big) &= *d_2\big((xy+2t)\theta\big) = *\big(T(xy+2t)\theta \wedge \theta\big) = 0.\end{aligned}$$

Määritellään seuraavaksi ns. *sisäisten* differentiaalimuotojen avaruus. Avaruuden yksimuotoihin tulee kuulua horisontaalisten vektorien duaalit, ja sen on oltava suljettu Hodgen tähtioperaation suhteen. Horisontaaliset duaalit kuuluvat differentiaalioperaattorin d_0 nolla-avaruuteen, ja niiden Hodgen duaalien kuuluminen tähän nolla-avaruuteen on yhtäpitävää kodifferentiaalin δ_0 nolla-avaruuteen kuulumisen kanssa.

Määritelmä 3.1.17. Määritellään avaruus E_0^h asettamalla

$$E_0^h(\mathbb{H}) := \operatorname{Ker} d_0 \cap \operatorname{Ker} \delta_0 = \operatorname{Ker} d_0 \cap (\operatorname{Im} d_0)^\perp \subset \Omega^h(\mathbb{H}).$$

Huomautus 3.1.18. Todella pätee $\operatorname{Ker} \delta_0 = (\operatorname{Im} d_0)^\perp$, koska mielivaltaisille differentiaalimuodoille $\alpha \in \Omega^{h,p}(\mathbb{H})$ ja $\beta \in \Omega^{h-1,p}(\mathbb{H}) \setminus \operatorname{Ker} d_0$ pätee

$$\alpha \in \operatorname{Ker} \delta_0 \;\Leftrightarrow\; \delta_0 \alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; (\alpha, d_0\beta) = (\delta_0\alpha, \beta) = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha \in (\operatorname{Im} d_0)^\perp.$$

Huomautus 3.1.19. Mielivaltaiselle kertoimelle α ja vaseninvariantille kantakovektorille ϑ pätee

$$\begin{cases} d_0(\alpha\vartheta) = 0 \\ \delta_0(\alpha\vartheta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha d\vartheta = 0 \\ *d_0(\alpha * \vartheta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha d_0\vartheta = 0 \\ \alpha\delta_0\vartheta = 0 \end{cases},$$

joten vaseninvariantit kantakovektorit, jotka kuuluvat avaruuteen E_0, muodostavat sisäisten differentiaalimuotojen avaruuden E_0 kannan. Avaruuteen periytyy näin ollen puhtaan painon käsite ja sisätulo, joka tekee kannasta ortonormaalin.

Proposition 3.1.6 todistuksessa huomattiin, että vaseninvarianteista kantakovektoreista ξ ainoastaan θ ei ole suljettu eli pätee $d_0\xi = d\xi \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \xi = \theta$. Edelleen $\delta_0\xi \neq 0 \;\Leftrightarrow\; d_0 * \xi \neq 0$ pätee vain kantakovektorille $dx \wedge dy$, jonka Hodgen tähti tuottaa 1-muodon $\theta = *(dx \wedge dy)$ eli saadaan $\delta_0\xi \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \xi = dx \wedge dy$. Näin ollen loput vaseninvarianteista kantakovektoreista kuuluvat avaruuteen $E_0 = \operatorname{Ker} d_0 \cap \operatorname{Ker} \delta_0$

$$\begin{aligned} E_0^1(\mathbb{H}) &= \operatorname{span}\{dx, dy\} \\ E_0^2(\mathbb{H}) &= \operatorname{span}\{dx \wedge \theta, dy \wedge \theta\} \\ E_0^3(\mathbb{H}) &= \operatorname{span}\{dx \wedge dy \wedge \theta\}. \end{aligned}$$

Lemma 3.1.20. *Jos $\beta \in \Omega^{h+1}(\mathbb{H})$, niin on olemassa yksikäsitteinen $\alpha \in \Omega^h(\mathbb{H}) \cap (\operatorname{Ker} d_0)^\perp$ siten, että $\delta_0 d_0 \alpha = \delta_0 \beta$ pätee. Määritellään näin pseudo-käänteisoperaatio $d_0^{-1}\beta := \alpha$. Tällöin siis seuraava ekvivalenssi pätee*

$$\alpha = d_0^{-1}\beta \;\Leftrightarrow\; d_0\alpha - \beta \in \operatorname{Ker} \delta_0.$$

Lisäksi d_0^{-1} säilyttää painot.

Todistus. Differentiaalimuotojen avaruus $\Omega^h(\mathbb{H})$ varustettuna L^2-tulolla on Hilbertin avaruus, joten isomorfismi $(\operatorname{Ker} d_0)^\perp \cong \Omega^h(\mathbb{H})/\operatorname{Ker} d_0$ pätee. Edelleen ensimmäisen isomorfialauseen perusteella pätee $\operatorname{Im} d_0 \cong \Omega^h(\mathbb{H})/\operatorname{Ker} d_0$, joten jokaista $\gamma \in \operatorname{Im} d_0$ kohti on olemassa yksikäsitteinen $\alpha \in (\operatorname{Ker} d_0)^\perp$ siten, että pätee

$$d_0\alpha = \gamma \in \operatorname{Im} d_0.$$

$\operatorname{Im} d_0 \subset \Omega^{h+1}(\mathbb{H})$ on suljettu lineaarinen aliavaruus, joten voidaan jakaa $\Omega^{h+1}(\mathbb{H}) = \operatorname{Im} d_0 \oplus (\operatorname{Im} d_0)^\perp$ eli voidaan merkitä $\beta = \gamma + \xi$, missä $\xi \in (\operatorname{Im} d_0)^\perp$. Tällöin siis pätee $d_0\alpha = \beta - \xi$, ja huomioiden yhteys $(\operatorname{Im} d_0)^\perp = \operatorname{Ker} \delta_0$, saadaan

$$\delta_0 d_0 \alpha = \delta_0 \beta.$$

Osoitetaan vielä, että d_0^{-1} säilyttää painot olettamalla, että $(h+1)$-muodon $\beta \in \Omega^{h+1,p}(\mathbb{H})$ paino on p sekä merkitsemällä $d_0^{-1}\beta := \alpha \in \Omega^{h,q}(\mathbb{H})$. Tiedetään, että operaattorit d_0 ja δ_0 säilyttävät painot, joten saadaan

$$w(d_0^{-1}\beta) = w(\alpha) =: q = w(\delta_0 d_0 \alpha) = w(\delta_0 \beta) = p := w(\beta). \qquad \square$$

Korollaari 3.1.21. $\operatorname{Im} d_0^{-1} = (\operatorname{Ker} d_0)^\perp$.

Korollaari 3.1.22. $\operatorname{Ker} d_0^{-1} = \operatorname{Ker} \delta_0 = (\operatorname{Im} d_0)^\perp$.

Lemma 3.1.23. $(d_0^{-1})^2 = 0$.

Todistus. $d_0^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Im} d_0 \subset \operatorname{Ker} d_0 \;\Rightarrow\; (\operatorname{Ker} d_0)^\perp \subset (\operatorname{Im} d_0)^\perp$. Siispä pätee

$$\operatorname{Im} d_0^{-1} = (\operatorname{Ker} d_0)^\perp \subset (\operatorname{Im} d_0)^\perp = \operatorname{Ker} d_0^{-1} \;\Leftrightarrow\; (d_0^{-1})^2 = 0. \qquad \square$$

Esimerkki 3.1.24. 2-muodolle $\beta := dx \wedge dy$ differentiaalin d_0 pseudo-käänteisoperaattori $\alpha := d_0^{-1}\beta$ saa arvon

$$\begin{aligned}\delta_0\beta &= (-1)^2 * d_0 * (dx \wedge dy) = *d_0\theta = *(-dx \wedge dy) = -\theta \\ &= \delta_0(d_0\alpha) = (-1)^2 * d_0 * d_0\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\; d_0 * d_0\alpha = -dx \wedge dy \;\Rightarrow\; *d_0\alpha = \theta \;\Rightarrow\; d_0\alpha = dx \wedge dy \\ &\Rightarrow d_0^{-1}(dx \wedge dy) =: \alpha = -\theta.\end{aligned}$$

Muille differentiaalimuodoille $\beta \notin \operatorname{span}\{dx \wedge dy\}$ huomataan proposition 3.1.6 todistuksen ja esimerkin 2.3.2 perusteella, että on oltava

$$\begin{aligned}\beta \notin \operatorname{span}\{dx \wedge dy\} \;&\Leftrightarrow\; \delta_0\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \delta_0 d_0\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow\; d_0\alpha \notin \operatorname{span}\{dx \wedge dy\} \;\Leftrightarrow\; \alpha \notin \operatorname{span}\{\theta\},\end{aligned}$$

mutta pseudo-käänteiskuvauksen määritelmän mukaan differentiaalimuodon α täytyy myös toteuttaa

$$\alpha \in (\operatorname{Ker} d_0)^\perp \;\Leftrightarrow\; (\alpha, \gamma) = 0 \;\; \forall \underbrace{\gamma \in \operatorname{Ker} d_0}_{\equiv \gamma \notin \operatorname{span}\{\theta\}} \;\Leftrightarrow\; \alpha \in \operatorname{span}\{\theta\}.$$

Näin ollen siis pätee $d_0^{-1}\beta = \alpha \equiv 0 \quad \forall \beta \notin \operatorname{span}\{dx \wedge dy\}$. Tämä ei tietenkään ole yllätys, sillä korollaarin 3.1.22 perusteella pätee $\operatorname{Ker} d_0^{-1} = \operatorname{Ker} \delta_0$.

Kuva-avaruudessa $\operatorname{Im} d_0^{-1}$ pätee $d_0^{-1} d_0 = \operatorname{Id}$, joten voidaan määritellä differentiaalioperaattori $D : \operatorname{Im} d_0^{-1} \to \operatorname{Im} d_0^{-1}$ siten, että $d_0^{-1} d = \operatorname{Id} + D$. Selvästi siis D kasvattaa painoa ja, koska $\mathbb{H}$ on nilpotentti, sen korkeamman asteen potenssit häviävät eli pätee $\exists N : D^k = 0 \;\; \forall k > N$.

Lemma 3.1.25. *On olemassa differentiaalioperaattori*

$$P = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k D^k$$

siten, että pätee

$$P d_0^{-1} d = d_0^{-1} d P = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, d_0^{-1}}\,.$$

Todistus. Operaattori P koostuu äärellisestä summasta operaattorin $d_0^{-1}d$ potensseja. P on siis hyvin määritelty differentiaalioperaattori, jolle pätee

$$\begin{aligned}
P d_0^{-1} d = P(\mathrm{Id} + D) &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k D^k (\mathrm{Id} + D) \qquad\qquad \big(\, = (\mathrm{Id} + D)P = d_0^{-1} dP \,\big) \\
&= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k D^k + \sum_{k=0}^{N} (-1)^k D^{k+1} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k D^k + \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^{k-1} D^k \\
&= \underbrace{(-1)^0 D^0}_{=\mathrm{Id}} + \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left((-1)^k + (-1)^{k-1}\right)}_{=0} D^k + (-1)^N \underbrace{D^{N+1}}_{=0} = \mathrm{Id}\,.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 3.1.26. Kuvaus $d_0^{-1}d$ indusoi automorfismin $\mathrm{Im}\, d_0^{-1} \to \mathrm{Im}\, d_0^{-1}$, jonka käänteisoperaattori P on. Avaruuteen $\mathrm{Im}\, d_0^{-1}$ rajoitettuna itse differentiaalioperaattorilla d on vasen käänteiskuvaus $Q := P d_0^{-1}$ eli

$$(Qd)|_{\mathrm{Im}\, d_0^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\, d_0^{-1}}\,.$$

Lause 3.1.27. *De Rham -kompleksi* (Ω^*, d) *jakautuu kahden alikompleksin* (E^*, d) *ja* (F^*, d) *suoraksi summaksi, missä*

$$E := \mathrm{Ker}\, d_0^{-1} \cap \mathrm{Ker}(d_0^{-1} d), \qquad F := \mathrm{Im}\, d_0^{-1} + \mathrm{Im}\, d d_0^{-1},$$

siten, että seuraavat väittämät pitävät paikkansa.

i) *Projektiokuvaus* Π_E *avaruudelle* E *avaruuden* F *suuntaan määritellään asettamalla* $\Pi_E = \mathrm{Id} - Qd - dQ$.

ii) Π_E *on ketjukuvaus, eli pätee* $d\Pi_E = \Pi_E d$.

iii) $\Pi_{E_0} := \mathrm{Id} - d_0^{-1} d_0 - d_0 d_0^{-1}$ *on ortoprojektio avaruudelta* Ω^* *avaruuteen* E_0^**, siten, että* $\Pi_{E_0} \Pi_E \Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}$ *ja* $\Pi_E \Pi_{E_0} \Pi_E = \Pi_E$ *pätevät.*

iv) $*(F^{\perp}) = E$.

Jos määritellään $d_c := \Pi_{E_0} d \Pi_E : E_0^h \to E_0^{h+1}, h = 0, ..., n-1$*, niin pätevät myös*

v) $d_c^2 = 0$*;*

vi) *kompleksi* $E_0 := (E_0^*, d_c)$ *on eksakti.*

Todistus. Olkoon $\alpha \in E^h$, jolloin avaruuden E määritelmän mukaan pätee $d_0^{-1}\alpha = d_0^{-1}d\alpha = 0$, josta seuraa suoraan $d\alpha \in \operatorname{Ker} d_0^{-1}$. Edelleen, Poincarén lemman $d^2 = 0$ perusteella on $d_0^{-1}dd\alpha = 0$, eli pätee myös $d\alpha \in \operatorname{Ker} d_0^{-1}d$. Kaiken kaikkiaan siis pätee $d\alpha \in E^{h+1}$, joten (E^*, d) on kompleksi. Vastaavasti differentiaalimuodolle $\beta \in F$ on oltava $\beta = d_0^{-1}\eta + dd_0^{-1}\nu$, jolloin pätee $d\beta = (dd_0^{-1})\eta \in F$. De Rham -kompleksi (Ω^*, d) puolestaan rakentuu näiden suorana summana, koska pätevät $\Pi_E(\Omega^*) = E^*$ ja $(\operatorname{Id} - \Pi_E)(\Omega^*) = F^*$, missä Π_E on projektio.

i) Tarkastellaan lineaarista operaattoria $\Pi := Qd + dQ$. Koska on määritelty $Q := Pd_0^{-1}$, pätee $\operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} d_0^{-1}$. Tällöin voidaan kirjoittaa $\Pi\gamma = (Qd + dQ)\gamma = d_0^{-1}\eta + dd_0^{-1}\nu \in F$ eli $\Pi \subset F$. Edelleen pätee $Qd_0^{-1} = P(d_0^{-1})^2 = 0$, sekä erityisesti kuva-avaruudessa $\operatorname{Im} d_0^{-1}$ pätee $Qd = \operatorname{Id}$, joten saadaan

$$\begin{aligned}
\Pi(d_0^{-1}\eta + dd_0^{-1}\nu) &= Qd(d_0^{-1}\eta + dd_0^{-1}\nu) + dQ(d_0^{-1}\eta + dd_0^{-1}\nu) \\
&= \underbrace{Qd}_{=\operatorname{Id}}\, d_0^{-1}\eta + Q\underbrace{dd}_{=0}\, d_0^{-1}\nu + d\underbrace{Qd_0^{-1}}_{=0}\eta + d\underbrace{Qd}_{=\operatorname{Id}}\, d_0^{-1}\nu \\
&= d_0^{-1}\eta + dd_0^{-1}\nu.
\end{aligned}$$

Saatiin $\Pi|_F = \operatorname{Id}_F$.

Toisaalta avaruudessa $E = \operatorname{Ker} d_0^{-1} \cap \operatorname{Ker} d_0^{-1}d$ pätee $\Pi = Pd_0^{-1}d + dPd_0^{-1} = 0$, jolloin pätevät myös $d_0^{-1}(\operatorname{Id} - \Pi) = 0$ sekä $d_0^{-1}d(\operatorname{Id} - \Pi) = 0$. Näin ollen jos määritellään $\Pi_E := \operatorname{Id} - \Pi$, niin saadaan $\operatorname{Im} \Pi_E = \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - \Pi) \subset E$, joten Π on projektio avaruudelle F suuntaan E, ja sitä kautta Π_E puolestaan projektio avaruudelle E suuntaan F. □

ii) $d\Pi_E = d(\operatorname{Id} - Qd - dQ) = d - dQd = (\operatorname{Id} - Qd - dQ)d = \Pi_E d.$ □

iii) Π_{E_0} on projektio:

$$\begin{aligned}
\Pi_{E_0}^2 &= (\operatorname{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0d_0^{-1})(\operatorname{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0d_0^{-1}) \\
&= \operatorname{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0d_0^{-1} - d_0^{-1}d_0 + \underbrace{d_0^{-1}d_0}_{=\operatorname{Id}}\, d_0^{-1}d_0 + d_0^{-1}\underbrace{d_0d_0}_{=0}\, d_0^{-1} \\
&\qquad - d_0d_0^{-1} + d_0\underbrace{d_0^{-1}d_0^{-1}}_{=0}\, d_0 + d_0\underbrace{d_0^{-1}d_0}_{=\operatorname{Id}}\, d_0^{-1} \\
&= \operatorname{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0d_0^{-1} - \cancel{d_0^{-1}d_0} + \cancel{d_0^{-1}d_0} - \cancel{d_0d_0^{-1}} + \cancel{d_0d_0^{-1}} = \Pi_{E_0}.
\end{aligned}$$

Huomataan helposti, että pätee

$$d_0^{-1}\Pi_{E_0} = d_0^{-1} - \underbrace{d_0^{-1}d_0^{-1}}_{=0}\, d_0 - \underbrace{d_0^{-1}d_0}_{=\operatorname{Id}}\, d_0^{-1} = 0,$$

jolloin siis $\operatorname{Im} \Pi_{E_0} \subset \operatorname{Ker} d_0^{-1}$. Lisäksi rajoitettuna kuva-avaruuteen $\operatorname{Im} d_0^{-1}$ pätee

$$(d_0\Pi_{E_0})|_{\operatorname{Im} d_0^{-1}} = (d_0 - d_0\underbrace{d_0^{-1}d_0}_{=\operatorname{Id}} - \underbrace{d_0d_0}_{=0}\, d_0^{-1})|_{\operatorname{Im} d_0^{-1}} = 0.$$

h-muotojen avaruus voidaan jakaa $\Omega^h(\mathbb{H}) = \operatorname{Im} d_0^{-1} \oplus (\operatorname{Im} d_0^{-1})^\perp$, missä korollaarin 3.1.21 perusteella $(\operatorname{Im} d_0^{-1})^\perp = (\operatorname{Ker} d_0)^{\perp\perp} = \operatorname{Ker} d_0$. Selvästi kuitenkin pätee $(d_0\Pi_{E_0})|_{\operatorname{Ker} d_0} = 0$, joten saadaan $\operatorname{Im} \Pi_{E_0} \subset \operatorname{Ker} d_0$ ja edelleen korollaarin 3.1.22 perusteella

$$\operatorname{Im} \Pi_{E_0} \subset \operatorname{Ker} d_0 \cap \operatorname{Ker} d_0^{-1} = \operatorname{Ker} d_0 \cap (\operatorname{Im} d_0)^\perp = E_0.$$

Operaattorin Q määritelmästä seuraa

$$\operatorname{Im} \Pi_{E_0} \subset (\operatorname{Im} d_0)^\perp = \operatorname{Ker} d_0^{-1} \subset \operatorname{Ker} Q.$$

Edelleen pätee $\operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} d_0^{-1} \subset \operatorname{Ker} \Pi_{E_0}$, koska pätee

$$\Pi_{E_0} d_0^{-1} = d_0^{-1} - \underbrace{d_0^{-1} d_0}_{=\mathrm{Id}} d_0^{-1} - d_0 \underbrace{d_0^{-1} d_0^{-1}}_{=0} = 0.$$

Näin ollen on oltava

$$\Pi_{E_0}\Pi_E\Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}(\mathrm{Id} - Qd - dQ)\Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}(\mathrm{Id} - Qd)\Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}^2 = \Pi_{E_0}.$$

Lisäksi huomatessa, että pätee

$$\Pi_E d_0^{-1} = (\mathrm{Id} - Qd - dQ)d_0^{-1} = d_0^{-1} - \underbrace{Qd}_{=\mathrm{Id}} d_0^{-1} - d \underbrace{Q d_0^{-1}}_{=0} = 0,$$

ja huomioidessa, että $\operatorname{Im} \Pi_E \subset E \subset \operatorname{Ker} d_0^{-1}$, saadaan

$$\Pi_E\Pi_{E_0}\Pi_E = \Pi_E(\mathrm{Id} - d_0^{-1}d_0 - d_0 d_0^{-1})\Pi_E = \Pi_E(\mathrm{Id} - d_0^{-1}d_0)\Pi_E = \Pi_E^2 = \Pi_E.$$

Osoitetaan vielä lopuksi, että projektio Π_{E_0} on ortoprojektio. Olkoon $\alpha, \beta \in \Omega^h(\mathbb{H})$, jolloin jälleen riittää testata ortogonaalisuus tapauksissa, jossa a) $\beta \in \operatorname{Im} d_0^{-1}$ ja b) $\beta \in (\operatorname{Im} d_0^{-1})^\perp = \operatorname{Ker} d_0$:

a) Jos määritellään $\beta \in \operatorname{Im} d_0^{-1}$, niin saadaan

$$\begin{aligned}(\alpha, \Pi_{E_0}\beta) &= (\alpha, \beta - \underbrace{d_0^{-1} d_0}_{=\mathrm{Id}} \beta - d_0 \underbrace{d_0^{-1}\beta}_{=0}) \\ &= (\alpha, 0) = 0 = (\Pi_{E_0}\alpha, 0) = (\Pi_{E_0}\alpha, \Pi_{E_0}\beta).\end{aligned}$$

b) Jos taas määritellään $\beta \in (\operatorname{Im} d_0^{-1})^\perp$ sekä huomioidaan, että pätee $\operatorname{Im} d_0^{-1} \subset (\operatorname{Im} d_0)^\perp$, saadaan

$$(d_0^{-1}d_0\alpha, \beta - d_0 d_0^{-1}\beta) = (d_0^{-1}d_0\alpha, \beta) - (d_0^{-1}d_0\alpha, d_0 d_0^{-1}\beta) = 0.$$

Lisäksi pseudo-käänteisoperaation d_0^{-1} määritelmästä seuraa, että $\delta_0 d_0 d_0^{-1} = \delta_0$, joten pätee

$$\begin{aligned}(d_0 d_0^{-1}\alpha, \beta - d_0 d_0^{-1}\beta) &= (d_0 d_0^{-1}\alpha, \beta) - (d_0 d_0^{-1}\alpha, d_0 d_0^{-1}\beta) \\ &= (d_0^{-1}\alpha, \delta_0\beta) - (d_0^{-1}\alpha, \underbrace{\delta_0 d_0 d_0^{-1}}_{=\delta_0}\beta) = 0.\end{aligned}$$

Nämä huomioiden saadaan

$$\begin{aligned}(\Pi_{E_0}\alpha,\Pi_{E_0}\beta) &= (\alpha - d_0^{-1}d_0\alpha - d_0d_0^{-1}\alpha, \beta - d_0^{-1}\underbrace{d_0\beta}_{=0} - d_0d_0^{-1}\beta)\\ &= (\alpha,\beta - d_0d_0^{-1}\beta) - \underbrace{(d_0^{-1}d_0\alpha, \beta - d_0d_0^{-1}\beta)}_{=0}\\ &\quad - \underbrace{(d_0d_0^{-1}\alpha,\beta - d_0d_0^{-1}\beta)}_{=0}\\ &= (\alpha,\Pi_{E_0}).\end{aligned}$$

Yleisesti siis pätee $(\alpha,\Pi_{E_0}\beta) = (\Pi_{E_0}\alpha,\Pi_{E_0}\beta) = (\Pi_{E_0}\alpha,\beta)$ eli Π_{E_0} on ortoprojektio. □

iv) Osoitetaan ensin, että pätee $(\operatorname{Im} dd_0^{-1})^\perp = \operatorname{Ker} d_0\delta$

$$\begin{aligned}\alpha \in (\operatorname{Im} dd_0^{-1})^\perp \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = (\alpha, dd_0^{-1}\beta) = (\delta\alpha, d_0^{-1}\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \delta\alpha \in (\operatorname{Im} d_0^{-1})^\perp\\ &\Leftrightarrow \quad \delta\alpha \in \operatorname{Ker} d_0 \quad \Leftrightarrow \quad d_0\delta\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \operatorname{Ker} d_0\delta.\end{aligned}$$

Huomataan myös, että voimassa on ekvivalenssi

$$\begin{cases} d_0\alpha = 0\\ d_0\delta\alpha = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (*\delta_0*)\alpha = 0\\ (*\delta_0*)(*d*)\alpha = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_0 * \alpha = 0\\ \delta_0 d * \alpha = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_0^{-1} * \alpha = 0\\ d_0^{-1} d * \alpha = 0\end{cases},$$

minkä viimeisessä askeleessa on huomioitu korollaari 3.1.22. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}*(F^\perp) &= *\big((\operatorname{Im} d_0^{-1} + \operatorname{Im} dd_0^{-1})^\perp\big) = *\big((\operatorname{Im} d_0^{-1})^\perp \cap (\operatorname{Im} dd_0^{-1})^\perp\big)\\ &= *(\operatorname{Ker} d_0 \cap \operatorname{Ker} d_0\delta) = \operatorname{Ker} d_0^{-1} \cap \operatorname{Ker} d_0^{-1}d = E.\end{aligned}$$ □

v) Aikaisempien kohtien perusteella Π_E on ketjukuvaus sekä pätee $\Pi_E\Pi_{E_0}\Pi_E = \Pi_E$, joten saadaan

$$\begin{aligned}d_c^2 := (\Pi_{E_0}d\Pi_E)^2 &= \Pi_{E_0}d\Pi_E\Pi_{E_0}\underbrace{d\Pi_E}_{=\Pi_E d}\\ &= \Pi_{E_0}d\underbrace{\Pi_E\Pi_{E_0}\Pi_E}_{=\Pi_E}d = \Pi_{E_0}d\underbrace{\Pi_E d}_{=d\Pi_E} = \Pi_{E_0}\underbrace{d^2}_{=0}\Pi_E = 0.\end{aligned}$$ □

vi) Kompleksin (E_0^*, d_c) eksaktius on todistettu paperissa [8]. □

Yhteenvetona lauseessa 3.1.27 määritellyt kompleksit ja kuvaukset voidaan esittää kommutatiivisessa diagrammissa

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
d\downarrow & & d\downarrow & & \downarrow d_c\\
\Omega^h & \underset{i}{\overset{\Pi_E}{\rightleftarrows}} & E^h & \underset{\Pi_E}{\overset{\Pi_{E_0}}{\rightleftarrows}} & E_0^h\\
d\downarrow & & d\downarrow & & \downarrow d_c\\
\Omega^{h+1} & \underset{i}{\overset{\Pi_E}{\rightleftarrows}} & E^{h+1} & \underset{\Pi_E}{\overset{\Pi_{E_0}}{\rightleftarrows}} & E_0^{h+1}\\
d\downarrow & & d\downarrow & & \downarrow d_c\\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Propositio 3.1.28. *Olkoot* $\alpha \in E_0^h$ *ja* $\beta \in E_0^k$*, missä* $k+h+1 = n := 3$*. Tällöin pätee*

$$(d_c\alpha, *\beta) = (-1)^{k+1}(\alpha, *d_c\beta).$$

Todistus. Tiedetään, että pätee $*(F^\perp) = E \;\Rightarrow\; \big(\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \Pi_E)\big)^\perp = *(\mathrm{Im}\,\Pi_E)$ eli mielivaltaiset $\eta \in \Omega^h$ ja $\nu \in \Omega^{n-k}$ toteuttavat yhtälön

$$\big(* \Pi_E\eta, (\mathrm{Id} - \Pi_E)\nu\big) = 0 \quad\Rightarrow\quad (*\Pi_E\eta, \nu) = (*\Pi_E\eta, \Pi_E\nu).$$

Lisäksi projektion Π_{E_0} ortogonaalisuuden perusteella pätee mielivaltaiselle $\gamma \in \Omega^h$ yhteys $(\Pi_{E_0}\gamma, \beta) = (\gamma, \beta)$, koska pätee $\beta \in E_0 = \mathrm{Im}\,\Pi_{E_0}$. Avaruuden E_0 määritelmästä seuraa suoraan identiteetti $*E_0^h = E_0^{n-h}$, joten voidaan lisäksi proposition 2.3.3 ja korollaarin 2.3.4 avulla johtaa

$$\begin{aligned}
(d_c\alpha, *\beta) &= (\Pi_{E_0} d \Pi_E\alpha, *\beta) = (d\Pi_E\alpha, *\beta) = (\Pi_E\alpha, \delta * \beta)\\
&= \big(\Pi_E\alpha, (-1)^{n(n-k+1)+1} * d * *\beta\big) = (-1)^{n^2-nk+n+1}\big(\Pi_E\alpha, (-1)^{k(n-k)} * d\beta\big)\\
&= (-1)^{1-nk}(-1)^{kn-k^2}(*\Pi_E\alpha, * * d\beta) = (-1)^{1-k}\big(*\Pi_E\alpha, (-1)^{(k+1)(n-k-1)}d\beta\big)\\
&= (-1)^{n(k+1)}(*\Pi_E\alpha, \Pi_E d\beta) = (-1)^{n(k+1)}\big((-1)^{h(n-h)}\Pi_E\alpha, *\Pi_E d\beta\big)\\
&= (-1)^{k+1}(\alpha, *\Pi_E d\beta) = (-1)^{k+1}\big(* \alpha, (-1)^{(k+1)(n-k-1)}\Pi_E d\beta\big)\\
&= (-1)^{n(k+1)}(*\alpha, \Pi_{E_0}\Pi_E d\beta) = (-1)^{n(k+1)}\big((-1)^{h(n-h)}\alpha, *\Pi_{E_0} d \Pi_E \beta\big)\\
&= (-1)^{k+1}(\alpha, *d_c\beta).
\end{aligned}$$

□

Lause 3.1.29. *Differentiaalioperaattorin* d_c *formaalille adjungaattille* $\delta_c : E^h(\mathbb{H}) \to E^{h-1}(\mathbb{H})$ *pätee kaikilla* $h = 0, 1, ..., n$

$$\delta_c = (-1)^{n(h+1)+1} * d_c * .$$

Todistus. Olkoot $\alpha \in E_0^h$ ja $\beta \in E_0^{h-1}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
(\delta_c\alpha, \beta) &= (\alpha, d_c\beta) = (d_c\beta, \alpha) = (-1)^{h(n-h)}\big(d_c\beta, *(*\alpha)\big)\\
&= (-1)^{h(n-h)}(-1)^{1+(n-h)}(\beta, *d_c(*\alpha)) = \big((-1)^{n(h+1)+1} * d_c * \alpha, \beta\big).
\end{aligned}$$

□

Selvitetään seuraavaksi projektion $\Pi_E = \mathrm{Id} - P d_0^{-1} d - d P d_0^{-1}$ toiminta Heisenbergin ryhmän kaikille differentiaalimuodoille avaruudessa E_0. Olkoon $f, g \in C^\infty(\mathbb{H})$, jolloin muistaen, että $\operatorname{Ker} d_0^{-1} = (\operatorname{span}\{dx \wedge dy\})^\perp$ pätee, saadaan

$$\Pi_E f = f - P \underbrace{d_0^{-1}(df)}_{=0} - dP \underbrace{d_0^{-1} f}_{=0} = f;$$

$$\begin{aligned}
\Pi_E(f dx + g dy) &= f dx + g dy - P d_0^{-1}\big((-Yf + Xg) dx \wedge dy - Tf dx \wedge \theta - Tg dy \wedge \theta\big) \\
&\qquad - dP \underbrace{d_0^{-1}(f dx + g dy)}_{=0} \\
&= f dx + g dy - P\big((Yf - Xg)\theta - \underbrace{d_0^{-1}(Tf dx \wedge \theta)}_{=0} - \underbrace{d_0^{-1}(Tg dy \wedge \theta)}_{=0}\big) \\
&= f dx + g dy - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k D^k \big((Yf - Xg)\theta\big) \\
&= f dx + g dy - \left(\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k D^{k-1} D\right) \big((Yf - Xg)\theta\big) \\
&= f dx + g dy - \left((Yf - Xg)\theta + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k D^{k-1} (d_0^{-1} d - \mathrm{Id})\big((Yf - Xg)\theta\big)\right) \\
&= f dx + g dy - (Yf - Xg)\theta \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{N} (-1)^k D^{k-1} \Big(d_0^{-1}\big((Xg - Yf) dx \wedge dy + (XYf - X^2 g) dx \wedge \theta \\
&\qquad\qquad + (Y^2 f - YXg) dy \wedge \theta\big) - (Yf - Xg)\theta \Big) \\
&= f dx + g dy - (Yf - Xg)\theta - \sum_{k=1}^{N} (-1)^k D^{k-1} \underbrace{\big((Yf - Xg)\theta - (Yf - Xg)\theta\big)}_{=0} \\
&= f dx + g dy - (Yf - Xg)\theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_E(f dx \wedge \theta + g dy \wedge \theta) &= f dx \wedge \theta + g dy \wedge \theta - P \underbrace{d_0^{-1}\big((Xg - Yf) dx \wedge dy \wedge \theta\big)}_{=0} \\
&\qquad - dP \underbrace{d_0^{-1}(f dx \wedge \theta + g dy \wedge \theta)}_{=0} \\
&= f dx \wedge \theta + g dy \wedge \theta.
\end{aligned}$$

Projektio Π_{E_0} on identtinen kuvaus sisäisille differentiaalimuodoille ja nollakuvaus muille eli

$$\Pi_{E_0}\beta = \begin{cases} 0, & \text{jos } \beta \in \operatorname{span}\{dx \wedge dy\} \cup \operatorname{span}\{\theta\} \\ \beta, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Selvitetään vielä differentiaalioperaattorin $d_c = \Pi_{E_0} d \Pi_E$ toiminta avaruuden $E_0(\mathbb{H})$

kaikilla differentiaalimuodoilla. Olkoon taas $f, g \in \Omega^0(\mathbb{H})$, jolloin saadaan

$$d_c f = \Pi_{E_0} d \Pi_E f = \Pi_{E_0} df = \Pi_{E_0}(Xf dx + Yf dy + Tf\theta) = Xf dx + Yf dy;$$

$$\begin{aligned} d_c(f dx + g dy) &= \Pi_{E_0} d \Pi_E (f dx + g dy) = \Pi_{E_0} d(f dx + g dy - (Yf - Xg)\theta) \\ &= \Pi_{E_0}\big(- Yf dx \wedge dy - Tf dx \wedge \theta + Xg dx \wedge dy - Tg dy \wedge \theta \\ &\quad + (Yf - Xg) dx \wedge dy - (XYf - X^2 g) dx \wedge \theta - (Y^2 f - YXg) dy \wedge \theta\big) \\ &= (X^2 g - XYf - Tf) dx \wedge \theta + (YXg - Y^2 f - Tg) dy \wedge \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_c(f dx \wedge \theta + g dy \wedge \theta) &= \Pi_{E_0} d \Pi_E (f dx \wedge \theta + g dy \wedge \theta) = \Pi_{E_0} d(f dx \wedge \theta + g dy \wedge \theta) \\ &= \Pi_{E_0}\big((Xg - Yf) dx \wedge dy \wedge \theta\big) = (Xg - Yf) dx \wedge dy \wedge \theta. \end{aligned}$$

Huomautus 3.1.30. Yleisen 1-muodon $f dx + g dy$ differentiaali $d_c(f dx + g dy)$ voidaan kirjoittaa kokonaan horisontaalisien vektorien X ja Y avulla, kun huomioidaan, että pätee $T = [X, Y] = XY - YX$. Saadaan

$$d_c(f dx + g dy) = (X^2 g - 2XYf + YXf) dx \wedge \theta + (2YXg - Y^2 f - XYg) dy \wedge \theta.$$

On huomionarvoista, että 1-muodoille d_c on toisen asteen differentiaalioperaattori.

3.2 Roottori Heisenbergin ryhmässä

Tarkastellaan horisontaalisia vektoreita $(V_1, V_2) = V_1 X + V_2 Y \in H\mathbb{H}$. Käy ilmi, että vastaavasti kuin avaruuden $\mathbb{R}^3$ differentiaalioperaatioiden grad, curl ja div ketju liittyy de Rham -kompleksiin, saadaan aikaan yhteys horisontaalisten vektorien differentiaalioperaatioiden ja Rumin -kompleksin välille. Määritellään näin horisontaaliselle kimpulle $H\mathbb{H}$ ominaiset differentiaalioperaattorit $\mathrm{grad}_{\mathbb{H}}$, $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}$ ja $\mathrm{div}_{\mathbb{H}}$.

$$\begin{tikzcd} E_0^0(\mathbb{H}) \arrow[r, "d_c"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{Id}"'] & E_0^1(\mathbb{H}) \arrow[r, "d_c"] \arrow[d, shift right, leftarrow, "\flat"'] \arrow[d, shift left, "\sharp"] & E_0^2(\mathbb{H}) \arrow[r, "d_c"] \arrow[d, shift right, leftarrow, "*\flat"'] \arrow[d, shift left, "\sharp *"] & E_0^3(\mathbb{H}) \arrow[d, leftrightarrow, "*"] \\ C^\infty(\mathbb{H}) \arrow[r, "\mathrm{grad}_{\mathbb{H}}"'] & H\mathbb{H} \arrow[r, "\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}"'] & H\mathbb{H} \arrow[r, "\mathrm{div}_{\mathbb{H}}"'] & C^\infty(\mathbb{H}) \end{tikzcd}$$

Kommutatiivisen diagrammin perusteella mielivaltaiselle funktiolle $f \in C^\infty(\mathbb{H})$ ja vektorille $V := V_1 X + V_2 Y \in H\mathbb{H}$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_{\mathbb{H}} f &= (d_c f)^\sharp = (Xf)X + (Yf)Y, \\ \mathrm{curl}_{\mathbb{H}} V &= (*d_c(V^\flat))^\sharp = \big(* \big((X^2 V_2 - 2XYV_1 + YXV_1) dx \wedge \theta \\ &\qquad + (2YXV_2 - Y^2 V_1 - XYV_2) dy \wedge \theta\big)\big)^\sharp \\ &= (2YXV_2 - Y^2 V_1 - XYV_2)X + (2XYV_1 - X^2 V_2 - YXV_1)Y, \\ \mathrm{div}_{\mathbb{H}} V &= *d_c * (V^\flat) = *d_c(V_1 dy \wedge \theta - V_2 dx \wedge \theta) = XV_1 + YV_2. \end{aligned}$$

Huomautus 3.2.1. Siinä, missä gradientin $\mathrm{grad}_{\mathbb{H}}$ ja divergenssin $\mathrm{div}_{\mathbb{H}}$ eksplisiittiset muodot ovat helposti arvattavissa, roottori $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}$ on erittäin epätriviaali. Roottorin muodon monimutkaisuudesta kertoo se, että pelkästään yhteyksien $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}} \, \mathrm{grad}_{\mathbb{H}} f = 0$ ja $\mathrm{div}_{\mathbb{H}} \, \mathrm{curl}_{\mathbb{H}} V = 0$ verifiointi eksplisiittisestä muodosta on hankalahkoa.

Horisontaalisien vektorien differentiaalioperaattoreiden yhteys Rumin-kompleksiin johdattaa edelleen de Rham -kompleksin kautta avaruuden $\mathbb{R}^3$ tavanomaisiin differentiaalioperaattoreihin. Asia voidaankin kiteyttää kommutatiiviseen diagrammiin, johon on yhdistetty edellisen diagrammin lisäksi lauseen 3.1.27 kompleksit ja de Rham -kompleksin yhteys differentiaalioperaattoreihin grad, curl ja div.

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\mathrm{grad}"'] & \vdots \arrow[d, "d"'] & \vdots \arrow[d, "d"'] & \vdots \arrow[d, "d_c"] & \vdots \arrow[d, "\mathrm{grad}_{\mathbb{H}}"] \\
\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, shift left, "\flat"] \arrow[d, "\mathrm{curl}"'] & \Omega^1(\mathbb{H}) \arrow[l, shift left, "\sharp"] \arrow[r, shift left, "\Pi_E"] \arrow[d, "d"'] & E^1(\mathbb{H}) \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r, shift left, "\Pi_{E_0}"] \arrow[d, "d"'] & E_0^1(\mathbb{H}) \arrow[l, shift left, "\Pi_E"] \arrow[r, shift left, "\sharp"] \arrow[d, "d_c"] & H\mathbb{H} \arrow[l, shift left, "\flat"] \arrow[d, "\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}"] \\
\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, shift left, "*\flat"] \arrow[d, "\mathrm{div}"'] & \Omega^2(\mathbb{H}) \arrow[l, shift left, "\sharp *"] \arrow[r, shift left, "\Pi_E"] \arrow[d, "d"'] & E^2(\mathbb{H}) \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[r, shift left, "\Pi_{E_0}"] \arrow[d, "d"'] & E_0^2(\mathbb{H}) \arrow[l, shift left, "\Pi_E"] \arrow[r, shift left, "\sharp *"] \arrow[d, "d_c"] & H\mathbb{H} \arrow[l, shift left, "*\flat"] \arrow[d, "\mathrm{div}_{\mathbb{H}}"] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Yllä $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ on siis avaruuden $\mathbb{R}^3$ sileiden vektorikenttien joukko.

Huomautus 3.2.2. Diagrammin vasemmalla puolella musikaaliset isomorfismit $\flat$ ja $\sharp$ toimivat Euklidisen metriikan mukaan, jolloin pätee

$$\partial_x^\flat = dx \qquad \partial_y^\flat = dy \qquad \partial_t^\flat = dt.$$

Huomataan, että roottori $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}$ on esitettävissä tavanomaisen roottorin curl avulla

$$\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}\, V = \left(*\Pi_{E_0}\Pi_E * \left(\mathrm{curl}\left((i\Pi_E V^\flat)^\sharp \right) \right)^\flat \right)^\sharp . \tag{3}$$

Tiedetään, että aliavaruudelta $\mathrm{span}\{X, Y\} \subset \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ horisontaalisille vektoreille $H\mathbb{H}$ on olemassa triviaali homomorfismi, joka suoraan kuvaa X -komponentin X-komponentiksi ja Y-komponentin Y-komponentiksi. Huomataankin, että tämä on täsmälleen sama kuin $\sharp * \Pi_{E_0}\Pi_E * \flat|_{\mathrm{span}\{X,Y\}}$, koska mielivaltaiselle $V = V_1X + V_2Y = V_1\partial_x + V_2\partial_y - \frac{1}{2}yV_1\partial_t + \frac{1}{2}xV_2\partial_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ pätee

$$
\begin{aligned}
\left(*\Pi_{E_0}\Pi_E*(V^\flat)\right)^\sharp &= \left(*\,\Pi_{E_0}\Pi_E * \left(V_1dx + V_2dy - \frac{1}{2}yV_1dt + \frac{1}{2}xV_2dt \right) \right)^\sharp \\
&= \left(*\,\Pi_{E_0}\Pi_E \left(V_1dy \wedge dt - V_2dx \wedge dt + \left(\frac{1}{2}xV_2 - \frac{1}{2}yV_1 \right) dx \wedge dy \right) \right)^\sharp \\
&= \left(*\,\Pi_{E_0}\Pi_E \left(V_1dy \wedge \theta - V_2dx \wedge \theta + \left(\frac{1}{2}xV_2 - \frac{1}{2}yV_1 \right) dx \wedge dy \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \frac{1}{2}V_1dy \wedge (xdy - ydx) - \frac{1}{2}V_2dx \wedge (xdy - ydx) \right) \right)^\sharp
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \big(* \,\Pi_{E_0}\Pi_E \,(V_1 dy \wedge \theta - V_2 dx \wedge \theta)\,\big)^{\sharp} \\
&= \big(\, * \,\Pi_{E_0} \,(V_1 dy \wedge \theta - V_2 dx \wedge \theta)\,\big)^{\sharp} \\
&= \big(\, * \,(V_1 dy \wedge \theta - V_2 dx \wedge \theta)\,\big)^{\sharp} \\
&= (V_1 dx + V_2 dy)^{\sharp} = V_1 X + V_2 Y = V.
\end{aligned}
$$

Lisäksi käy ilmi, että $\operatorname{curl}\big((i\Pi_E V^{\flat})^{\sharp}\big) \in \operatorname{span}\{X, Y\}$, joten yhtälö (3) yksinkertaistuu edelleen.

Lause 3.2.3. *Mielivaltaisen horisontaalisen vektorin $V = V_1X + V_2Y \in H\mathbb{H}$ roottori on esitettävissä vektorikentän $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ Euklidisena roottorina*

$$\operatorname{curl}_{\mathbb{H}} V = \operatorname{curl} \mathcal{V},$$

missä vektorikenttä $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 dx + \mathcal{V}_2 dy + \mathcal{V}_3 dt$ määritellään

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_1 &:= V_1 - \frac{1}{2} y (YV_1 - XV_2), \\
\mathcal{V}_2 &:= V_2 + \frac{1}{2} x (YV_1 - XV_2), \\
\mathcal{V}_3 &:= -(YV_1 - XV_2).
\end{aligned}
$$

Todistus. Lasketaan eksplisiittisesti arvo $i\Pi_E V^{\flat}$

$$i\Pi_E V^{\flat} = \Pi_E (V_1 dx + V_2 dy)\big)^{\sharp} = V_1 dx + V_2 dy - (YV_1 - XV_2)\theta,$$

ja muunnetaan tämä kantaan $\{dx, dy, dt\}$

$$
\begin{aligned}
i\Pi_E V^{\flat} &= V_1 dx + V_2 dy - (YV_1 - XV_2)\theta \\
&= V_1 dx + V_2 dy - (YV_1 - XV_2) dt + \frac{1}{2} x (YV_1 - XV_2) dy - \frac{1}{2} y (YV_1 - XV_2) dx \\
&= \left(V_1 - \frac{1}{2} y (YV_1 - XV_2) \right) dx + \left(V_2 + \frac{1}{2} x (YV_1 - XV_2) \right) dy - (YV_1 - XV_2) dt.
\end{aligned}
$$

Pätee siis $\mathcal{V} := (i\Pi_E V^{\flat})^{\sharp}$. Huomataan myös, että $\operatorname{curl}\big((i\Pi_E V^{\flat})^{\sharp}\big) \in \operatorname{span}\{X, Y\}$ pätee. Nimittäin lähtien liikkeelle vektorien X ja Y määritelmästä saadaan

$$
\begin{cases}
X = \partial_x - \frac{1}{2} y \partial_t \\
Y = \partial_y + \frac{1}{2} x \partial_t
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & YV_1 - XV_2 = \partial_y V_1 + \frac{1}{2} x \partial_t V_1 - \partial_x V_2 + \frac{1}{2} y \partial_t V_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \partial_x V_2 - \partial_y V_1 + YV_1 - XV_2 = \frac{1}{2} y \partial_t V_2 + \frac{1}{2} x \partial_t V_1 \\
\Leftrightarrow \quad & \partial_x V_2 - \partial_y V_1 + (YV_1 - XV_2) + \frac{1}{2} x \partial_x (YV_1 - XV_2) + \frac{1}{2} y \partial_y (YV_1 - XV_2) \\
& = -\frac{1}{2} y \left(-\partial_y (YV_1 - XV_2) - \partial_t V_2 - \frac{1}{2} x \partial_t (YV_1 - XV_2) \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} x \left(\partial_x (YV_1 - XV_2) + \partial_t V_1 - \frac{1}{2} y \partial_t (YV_1 - XV_2) \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \partial_x \mathcal{V}_2 - \partial_y \mathcal{V}_1 = -\frac{1}{2} y (\partial_y \mathcal{V}_3 - \partial_t \mathcal{V}_2) + \frac{1}{2} x (\partial_t \mathcal{V}_1 - \partial_x \mathcal{V}_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (\operatorname{curl}\mathcal{V})_3 = -\frac{1}{2}y(\operatorname{curl}\mathcal{V})_1 + \frac{1}{2}x(\operatorname{curl}\mathcal{V})_2 \\
&\Leftrightarrow \quad (\operatorname{curl}\mathcal{V})_3\partial_t = (\operatorname{curl}\mathcal{V})_1(X-\partial_x) + (\operatorname{curl}\mathcal{V})_2(Y-\partial_y) \\
&\Rightarrow \quad \operatorname{curl}\mathcal{V} := (\operatorname{curl}\mathcal{V})_1\partial_x + (\operatorname{curl}\mathcal{V})_2\partial_y + (\operatorname{curl}\mathcal{V})_3\partial_t = (\operatorname{curl}\mathcal{V})_1 X + (\operatorname{curl}\mathcal{V})_2 Y.
\end{aligned}
$$

Vektorikenttä $\operatorname{curl}\mathcal{V}$ on siis horisontaalinen, ja yhtälö (3) yksinkertaistuu muotoon $\operatorname{curl}_{\mathbb{H}} V = \operatorname{curl}\mathcal{V}$. □

Esimerkki 3.2.4. Näin määritellylle roottorille todella pätee roottorin ominaisuudet. Ensinnäkin roottorin arvoksi saadaan

$$
\begin{aligned}
\operatorname{curl}_{\mathbb{H}} V &:= \operatorname{curl}\mathcal{V} = (\operatorname{curl}\mathcal{V})_1 X + (\operatorname{curl}\mathcal{V})_2 Y \\
&= \Big(-\partial_y(YV_1 - XV_2) - \partial_t V_2 - \frac{1}{2}x\partial_t(YV_1 - XV_2)\Big) X \\
&\quad + \Big(\partial_x(YV_1 - XV_2) + \partial_t V_1 - \frac{1}{2}y\partial_t(YV_1 - XV_2)\Big) Y \\
&= \Big(-(\partial_y + \frac{1}{2}x\partial_t)YV_1 + (\partial_y + \frac{1}{2}x\partial_t)XV_2 - \partial_t V_2\Big) X \\
&\quad + \Big((\partial_x - \frac{1}{2}y\partial_t)YV_1 - (\partial_x - \frac{1}{2}y\partial_t)XV_2 + \partial_t V_1\Big) Y \\
&= \big(-Y^2V_1 + YXV_2 - \partial_t V_2\big) X + \big(XYV_1 - X^2V_2 + \partial_t V_1\big) Y \\
&= \big(-Y^2V_1 + YXV_2 - [X,Y]V_2\big) X + \big(XYV_1 - X^2V_2 + [X,Y]V_1\big) Y \\
&= \big(-Y^2V_1 + 2YXV_2 - XYV_2\big) X + \big(2XYV_1 - X^2V_2 - YXV_1\big) Y.
\end{aligned}
$$

Toisekseen operaatiolle pätee $\operatorname{curl}_{\mathbb{H}}(\operatorname{grad}_{\mathbb{H}} u) = 0$, koska pätee

$$
\begin{cases} V_1 = Xu \\ V_2 = Yu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_1 = Xu + \frac{1}{2}y[X,Y]u = (X + \frac{1}{2}y\partial_t)u = \partial_x u \\ \mathcal{V}_2 = Yu - \frac{1}{2}x[X,Y]u = (Y - \frac{1}{2}x\partial_t)u = \partial_y u \\ \mathcal{V}_3 = [X,Y]u = \partial_t u \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \quad \operatorname{curl}_{\mathbb{H}}(\operatorname{grad}_{\mathbb{H}} u) = \operatorname{curl}_{\mathbb{H}}(Xu, Yu) = \operatorname{curl}(\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u) = \operatorname{curl}(\operatorname{grad} u) = 0.
$$

Lisäksi pätee yhteys

$$
\begin{cases} \mathcal{V}_1 = V_1 - \frac{1}{2}y(YV_1 - XV_2) \\ \mathcal{V}_2 = V_2 + \frac{1}{2}x(YV_1 - XV_2) \\ \mathcal{V}_3 = -(YV_1 - XV_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}_1 = V_1 + \frac{1}{2}y\mathcal{V}_3 \\ \mathcal{V}_2 = V_2 - \frac{1}{2}x\mathcal{V}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \mathcal{V}_1 - \frac{1}{2}y\mathcal{V}_3 \\ V_2 = \mathcal{V}_2 + \frac{1}{2}x\mathcal{V}_3 \end{cases}.
$$

Näin ollen jos $\operatorname{curl}_{\mathbb{H}}(V) = 0$ pätee, niin on olemassa $\phi \in C^\infty(\mathbb{H})$ siten, että pätee $V = \operatorname{grad}_{\mathbb{H}}\phi$. Voidaan nimittäin johtaa

$$
\operatorname{curl}(\mathcal{V}) = \operatorname{curl}_{\mathbb{H}}(V) = 0 \;\Rightarrow\; \exists\phi : \mathcal{V} = \operatorname{grad}\phi
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{V}_1 = \partial_x\phi \\ \mathcal{V}_2 = \partial_y\phi \\ \mathcal{V}_3 = \partial_t\phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \partial_x\phi - \frac{1}{2}y\partial_t\phi = X\phi \\ V_2 = \partial_y\phi + \frac{1}{2}x\partial_t\phi = Y\phi \end{cases} \Rightarrow V = (X\phi, Y\phi) = \operatorname{grad}_{\mathbb{H}}\phi.
$$

4 Aika-avaruusryhmä ja Maxwellin yhtälöt

4.1 Aika-avaruusryhmä

Horisontaalisten vektorien differentiaalioperaattoreiden $\mathrm{div}_{\mathbb{H}}$ ja $\mathrm{curl}_{\mathbb{H}}$ olemassaolo vihjaa mahdollisuuteen kirjoittaa sähkömagnetiikan Maxwellin yhtälöt Heisenbergin ryhmässä. Tätä varten on kuitenkin ensin määriteltävä Lien ryhmä, joka sisältää samassa rakenteessa Heisenbergin ryhmässä formuloitujen paikkakoordinaattien lisäksi aikaulottuvuuden.

Määritelmä 4.1.1. Aika-avaruusryhmä $\hat{\mathbb{H}} := \mathbb{R} \times \mathbb{H}$ on Lien ryhmä, jonka Lien algebra $\hat{\mathfrak{h}}$ on stratifioitu

$$\hat{\mathfrak{h}} = \hat{V_1} \oplus V_2, \qquad \hat{V_1} = \mathrm{span}\{S, V_1\},$$

missä Heisenbergin ryhmän Lien algebra on $\mathfrak{h} = V_1 \oplus V_2$ ja $S := \partial_s$, sekä pätee

$$[V_1, V_1] = V_2,\ [V_1, V_2] = [V_2, V_2] = 0.$$

Puolestaan $s \in \mathbb{R}$ on aikakoordinaatti siten, että $(s, p) \in \hat{\mathbb{H}}$, kun $p = (x, y, t) \in \mathbb{H}$.

Laskutoimitus aika-avaruusryhmässä saadaan Campbellin–Hausdorffin kaavalla, kun valitaan kanta $\{S, X, Y, T\}$, jossa $S^\flat = ds$ ja Heisenbergin ryhmän vektorit X, Y ja T määritellään, kuten aikaisemminkin. Heisenbergin ryhmän vektorit eivät riipu s-koordinaatista ja osittaisderivaatat kommutoivat, joten pätee $[S, X] = [S, Y] = [S, T] = 0$. Tällöin mielivaltaisten pisteiden $x = x_0 S + x_1 X + x_2 Y + x_3 T \in \hat{\mathfrak{h}}$ ja $y = y_0 S + y_1 X + y_2 Y + y_3 T \in \hat{\mathfrak{h}}$ välinen laskutoimitus $*$ on muotoa

$$\begin{aligned} x * y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] &= (x_0 + y_0)S + (x_1 + y_1)X + (x_2 + y_2)Y + (x_3 + y_3)T \\ &= (x_0 + y_0)S + (x_1 + y_1)X + (x_2 + y_2)Y + \left(x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right) T. \end{aligned}$$

Olkoon $\mathcal{L}_S$ Lien derivaatta suuntaan S ja $f\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} \in \Omega^h(\mathbb{H})$ h-muoto. Tiedetään, että funktioille pätee $\mathcal{L}_S f = Sf$, kun taas h-muodoille saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(f\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) &= (\mathcal{L}_S f)\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} + f\mathcal{L}_S(\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}) \\ &= (Sf)\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} + f\sum_{l=1}^{h} \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \underbrace{\mathcal{L}_S\theta_{i_l}}_{=0} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} \\ &= (Sf)\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}, \end{aligned}$$

joten voidaan merkitä differentiaalimuodon $\alpha \in \Omega^h(\mathbb{H})$ Lien derivaattaa $\mathcal{L}_S\alpha = S\alpha$ ilman sekaannuksia.

Propositio 4.1.2. *S kommutoi ulkoderivaatan d kanssa eli $dS = Sd$*

Todistus. Olkoon $\alpha := f\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h}$. Tällöin saadaan

$$Sd\alpha = \sum_{l=1}^{n} \underbrace{(SX_l f)}_{=X_l(Sf)} \theta_l \wedge \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_h} = d(S\alpha).$$

Koska d ja S ovat lineaarisia operaattoreita, tämä pätee yleisillekin differentiaalimuodoille. $\square$

Kuten Heisenbergin ryhmään, aika-avaruusryhmäänkin voi määritellä sisätulon ja differentiaalimuotojen avaruuden $\Omega^h(\hat{\mathbb{H}})$ vastaavalla tavalla. Edelleen puhtaan painon käsite ja sen ominaisuudet yleistyvät aika-avaruusryhmään analogisella tavalla, kuten voi päätellä seuraamalla kappaleen 3.1 todistuksia, joista useimmissa spesifisesti Heisenbergin ryhmälle ominainen rakenne ei ole esillä. Poikkeuksena on propositio 3.1.6, jonka todistus aika-avaruusryhmälle käsittää vain seuraavat lisähuomiot

$$\begin{gathered} d(ds) = d(ds \wedge dx) = d(ds \wedge dx) = d(ds \wedge dx \wedge dy) = 0, \\ d(ds \wedge dx \wedge \theta) = d(ds \wedge dy \wedge \theta) = d(ds \wedge dx \wedge dy \wedge \theta) = 0, \text{ kun taas} \\ w(d(ds \wedge \theta)) = w(-ds \wedge d\theta) = w(ds \wedge dx \wedge dy) = 3 = w(ds \wedge \theta). \end{gathered}$$

Myöskään kappaleen 2.3 todistukset eivät ole spesifisiä Heisenbergin ryhmään, joten niin ikään Hodgen tähti ja kodifferentiaalit yleistyvät aika-avaruusryhmään analogisesti. Valitaan aika-avaruuden tilavuusmuodoksi $ds \wedge dx \wedge dy \wedge \theta$.

Esimerkki 4.1.3. Voidaan luetella kaikkien aika-avaruusryhmän $\hat{\mathbb{H}}$ kantakovektorien Hodgen duaalit:

$$\begin{aligned} *(1) &= ds \wedge dx \wedge dy \wedge \theta, & *(dx \wedge dy) &= ds \wedge \theta, \\ *ds &= dx \wedge dy \wedge \theta, & *(dx \wedge \theta) &= -ds \wedge dy, \\ *dx &= -ds \wedge dy \wedge \theta, & *(dy \wedge \theta) &= ds \wedge dx, \\ *dy &= ds \wedge dx \wedge \theta, & *(ds \wedge dx \wedge dy) &= \theta, \\ *\theta &= -ds \wedge dx \wedge dy, & *(ds \wedge dx \wedge \theta) &= -dy, \\ *(ds \wedge dx) &= dy \wedge \theta, & *(ds \wedge dy \wedge \theta) &= dx, \\ *(ds \wedge dy) &= -dx \wedge \theta, & *(dx \wedge dy \wedge \theta) &= -ds, \\ *(ds \wedge \theta) &= dx \wedge dy, & *(ds \wedge dx \wedge dy \wedge \theta) &= 1. \end{aligned}$$

Aika-avaruusryhmässä on $n = 4$, joten h-muodoille pätee

$$** = (-1)^{h(n-h)} = (-1)^{4h-h^2} = (-1)^h.$$

Samoin pätee myös

$$\delta = (-1)^{n(h+1)+1} * d* = - * d*,$$

ja vastaavasti myös kodifferentiaaleille $\delta_i, i = 0, 1, 2, 3$ sekä δ_c. Teknisesti operaattorin d_c yleistyksen olemassaoloa ei ole vielä todistettu aika-avaruusryhmälle, mutta se tulee vuoroon myöhemmin.

Pseudo-käänteisoperaattori d_0^{-1} toimii aika-avaruudellekin määriteltynä samalla tavalla.

Esimerkki 4.1.4. Tiedetään, että pätee $\operatorname{Ker} d_0^{-1} = \operatorname{Ker} \delta_0 = \operatorname{Ker}(d_0 *)$. Edelleen $d_0\alpha = 0$ pätee jos ja vain jos $\alpha \notin \operatorname{span}\{\theta\} \cup \operatorname{span}\{ds \wedge \theta\}$ pätee. Näin ollen Esimerkin 4.1.3 perusteella saadaan $d_0^{-1}\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta \notin \operatorname{span}\{ds \wedge dx \wedge dy\} \cup \operatorname{span}\{dx \wedge dy\}$. Lopuille tapauksille saadaan

$$
\begin{aligned}
&\beta = ds \wedge dx \wedge dy :\\
&\qquad \delta_0 d_0 \alpha = \delta_0 \beta = - * d_0 * (ds \wedge dx \wedge dy) = - * d_0 \theta = *(dx \wedge dy) = ds \wedge \theta\\
&\qquad \Rightarrow \quad d_0\alpha = ds \wedge dx \wedge dy \;\Rightarrow\; d_0^{-1}(ds \wedge dx \wedge dy) = d_0^{-1}\beta =: \alpha = ds \wedge \theta;\\
&\beta = dx \wedge dy :\\
&\qquad \delta_0 d_0 \alpha = \delta_0 \beta = - * d_0 * (dx \wedge dy) = - * d_0 (ds \wedge \theta) = - * (ds \wedge dx \wedge dy) = -\theta\\
&\qquad \Rightarrow \quad d_0\alpha = dx \wedge dy \;\Rightarrow\; d_0^{-1}(dx \wedge dy) = d_0^{-1}\beta =: \alpha = -\theta.
\end{aligned}
$$

Määriteltyjen differentiaalioperaattorien kautta myös avaruus $E_0(\hat{\mathbb{H}})$ on hyvin määritelty. Rumin-kompleksin konstruktio todistuksineen on niin ikään yhteensopiva aika-avaruuden kanssa, joten vastaavasti määriteltynä $(E_0^*(\hat{\mathbb{H}}), \hat{d}_c)$ on Rumin-kompleksi, kun $\hat{d}_c : E_0^h(\hat{\mathbb{H}}) \to E_0^{h+1}(\hat{\mathbb{H}})$ vastaa differentiaalioperaattoria d_c aika-avaruusryhmässä.

Esimerkki 4.1.5. Edellisten laskujen perusteella ekvivalenssit $d_0\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha \notin \operatorname{span}\{\theta\} \cup \operatorname{span}\{ds \wedge \theta\}$ sekä $d_0^{-1}\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha \notin \operatorname{span}\{ds \wedge dx \wedge dy\} \cup \operatorname{span}\{dx \wedge dy\}$ pätevät. Näin ollen on helppo luetella aika-avaruuden sisäiset differentiaalimuodot $E_0 = \operatorname{Ker} d_0 \cap \operatorname{Ker} d_0^{-1}$

$$
\begin{aligned}
E_0^1(\hat{\mathbb{H}}) &= \operatorname{span}\{ds, dx, dy\}\\
E_0^2(\hat{\mathbb{H}}) &= \operatorname{span}\{ds \wedge dx,\; ds \wedge dy,\; dx \wedge \theta,\; dy \wedge \theta\}\\
E_0^3(\hat{\mathbb{H}}) &= \operatorname{span}\{ds \wedge dx \wedge \theta,\; ds \wedge dy \wedge \theta,\; dx \wedge dy \wedge \theta\}\\
E_0^4(\hat{\mathbb{H}}) &= \operatorname{span}\{ds \wedge dx \wedge dy \wedge \theta\}.
\end{aligned}
$$

Huomataan, että h-muoto α kuuluu avaruuteen $E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$ jos ja vain jos se on esitettävissä muodossa

$$\alpha = ds \wedge \beta + \gamma,$$

missä $\beta \in E_0^{h-1}(\mathbb{H})$ ja $\gamma \in E_0^h(\mathbb{H})$ ovat Heisenbergin ryhmän differentiaalimuotoja siten, että niiden kertoimet riippuvat mahdollisesti paikan $p \in \mathbb{H}$ lisäksi aikakoordinaatista $s \in S$.

Propositio 4.1.6. *Jos pätee* $1 \le h \le 3$, *ja* $\alpha = ds \wedge \beta + \gamma \in E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$, *niin pätee*

$$\hat{d}_c\alpha = ds \wedge (S\gamma - d_c\beta) + d_c\gamma.$$

Todistus. Jos differentiaalimuodolle $\alpha = a\vartheta$, missä $\vartheta \in \Omega^h(\hat{\mathbb{H}})$ on kantakovektori ja $a = a(s,p) \in C^\infty(\hat{\mathbb{H}})$, pätee $d_0^{-1}\alpha = 0$ eli $\alpha \notin \operatorname{span}\{ds \wedge dx \wedge dy\} \cup \operatorname{span}\{dx \wedge dy\}$, niin pätee myös

$$
\begin{aligned}
d_0^{-1}d\alpha = d_0^{-1}d(a\vartheta) &= d_0^{-1}\big(ad\vartheta + (Sa)ds \wedge \vartheta + (Xa)dx \wedge \vartheta + (Ya)dy \wedge \vartheta + (Ta)\theta \wedge \vartheta\big)\\
&= d_0^{-1}\big(ad\vartheta + (Xa)dx \wedge \vartheta + (Ya)dy \wedge \vartheta + (Ta)\theta \wedge \vartheta\big) + \underbrace{d_0^{-1}\big((Sa)ds \wedge \vartheta\big)}_{=0:\ \alpha \notin \operatorname{span}\{dx \wedge dy\}}.
\end{aligned}
$$

Tämä on muodoltaan täsmälleen sama, kuin operaation $d_0^{-1}d$ toiminta Heisenbergin ryhmän differentiaalimuodoille $a(p)\vartheta \in \Omega^h(\mathbb{H})$. Koska $E = \operatorname{Ker} d_0^{-1}d \cap \operatorname{Ker} d_0^{-1}$, niin tämä osoittaa, että pätee

$$E(\mathbb{H}) \subset E(\hat{\mathbb{H}}).$$

Tätä kautta tiedetään, että projektio Π_E toimii Heisenbergin ryhmän differentiaalimuodoille täsmälleen samalla tavalla myös aika-avaruusryhmässä.

Differentiaalimuodoille muotoa $ds\wedge\vartheta$, missä $\vartheta \in E_0(\mathbb{H})$ on kantakovektori, pätee $d_0^{-1}(ds\wedge\vartheta) = 0$, koska $\vartheta \notin \operatorname{span}\{dx\wedge dy\}$ pätee. Edelleen pätee $d_0^{-1}d(ds\wedge\vartheta) = d_0^{-1}(ds\wedge d\vartheta) = 0$, koska ainoa tapaus, jossa $ds\wedge d\vartheta$ tuottaa nollasta poikkeavan pseudo-käänteiselementin on $d_0\vartheta = d\vartheta \in \operatorname{span}\{dx\wedge dy\}$, joka ei kuitenkaan voi päteä, koska pätee $\vartheta \notin \operatorname{span}\{\theta\}$. Näin saadaan

$$ds\wedge\vartheta \in E(\hat{\mathbb{H}}) \;\Rightarrow\; \Pi_E(ds\wedge\vartheta) = ds\wedge\vartheta.$$

Projektio Π_{E_0} puolestaan on identtinen kuvaus sisäisille differentiaalimuodoille ja nollakuvaus muille eli

$$\Pi_{E_0}\beta = \begin{cases} 0, & \text{jos } \beta \in \operatorname{span}\{ds\wedge dx\wedge dy\} \cup \operatorname{span}\{dx\wedge dy, ds\wedge\theta\} \cup \operatorname{span}\{\theta\} \\ \beta, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Differentiaalimuodoille $\gamma := g(p,s)\vartheta$, missä $\vartheta \in E_0(\mathbb{H})$ on kantakovektori, pätee näin ollen

$$\begin{aligned} \hat{d}_c\gamma &= \Pi_{E_0} d\Pi_E(g\vartheta) = \Pi_{E_0}\Pi_E d(g\vartheta) = d_c(g\vartheta) + \Pi_{E_0}\Pi_E\big((Sg)ds\wedge\vartheta\big) \\ &= d_c\gamma + (Sg)ds\wedge\vartheta = d_c\gamma + ds\wedge\big((Sg)\vartheta\big) = d_c\gamma + ds\wedge S\gamma. \end{aligned}$$

Selvitetään vielä projektion Π_E toiminta aika-avaruudessa muotoa $ds\wedge\beta$ oleville differentiaalimuodoille, missä $\beta \in E_0^{h-1}(\mathbb{H})$, kun $f,g \in C^\infty(\hat{\mathbb{H}})$

$$\Pi_E(f ds) = f ds - P d_0^{-1}d(f ds) - dP\underbrace{d_0^{-1}(f ds)}_{=0} = f ds - P\underbrace{d_0^{-1}(df\wedge ds)}_{=0} = f ds;$$

$$\begin{aligned} \Pi_E(ds\wedge(f dx + g dy)) &= ds\wedge(f dx + g dy) + P d_0^{-1}\big(ds\wedge(df\wedge dx + dg\wedge dy)\big) \\ &\qquad - dP\underbrace{d_0^{-1}\big(ds\wedge(f dx + g dy)\big)}_{=0} \\ &= ds\wedge(f dx + g dy) - P\big((Xg - Yf)ds\wedge\theta\big) \\ &= ds\wedge(f dx + g dy) - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k D^k\big((Xg - Yf)ds\wedge\theta\big) \\ &= ds\wedge(f dx + g dy) - \left(\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k D^{k-1}D\right)\big((Xg - Yf)ds\wedge\theta\big) \\ &= ds\wedge(f dx + g dy) - (Xg - Yf)ds\wedge\theta \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{N}(-1)^k D^{k-1}\underbrace{(d_0^{-1}d - \mathrm{Id})\big((Xg - Yf)ds\wedge\theta\big)}_{\substack{=d_0^{-1}\left((Xg-Yf)ds\wedge dx\wedge dy\right) - (Xg-Yf)ds\wedge\theta \\ =(Xg-Yf)ds\wedge\theta - (Xg-Yf)ds\wedge\theta\ =0}} \end{aligned}$$

$$= ds \wedge (fdx + gdy) - (Xg - Yf)ds \wedge \theta;$$

$$\begin{aligned}\Pi_E\big(ds \wedge (fdx \wedge \theta + gdy \wedge \theta)\big) &= ds \wedge (fdx \wedge \theta + gdy \wedge \theta) \\ &\quad + P\,\underbrace{d_0^{-1}\big(ds \wedge (df \wedge dx \wedge \theta + dg \wedge dy \wedge \theta)\big)}_{=0} \\ &\quad - dP\,\underbrace{d_0^{-1}\big(ds \wedge (fdx \wedge \theta + gdy \wedge \theta)\big)}_{=0} \\ &= ds \wedge (fdx \wedge \theta + gdy \wedge \theta).\end{aligned}$$

Näiden perusteella voidaan laskea differentiaalioperaattorin $\hat{d}_c = \Pi_{E_0} d \Pi_E$ toiminta avaruudessa $E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$, kun $f, g \in C^\infty(\hat{\mathbb{H}})$ ja $\gamma_h \in E_0^h(\mathbb{H})$

$$\begin{aligned}\hat{d}_c(fds + \gamma_1) &= \Pi_{E_0} d \Pi_E(fds) + \hat{d}_c\gamma_1 = \Pi_{E_0}(df \wedge ds) + d_c\gamma_1 + ds \wedge S\gamma_1 \\ &= ds \wedge (-Xfdx - Yfdy + S\gamma_1) + d_c\gamma_1 \\ &= ds \wedge (S\gamma_1 - d_cf) + d_c\gamma_1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_c\big(ds \wedge (fdx + gdy) + \gamma_2\big) &= \Pi_{E_0} d\big(ds \wedge (fdx + gdy) - (Xg - Yf)ds \wedge \theta\big) + \hat{d}_c\gamma_2 \\ &= \Pi_{E_0}\Big(- ds \wedge (df \wedge dx + dg \wedge dy) - (Xg - Yf)ds \wedge dx \wedge dy \\ &\qquad - \big((X^2g - XYf)dx + (YXg - Y^2f)dy\big) \wedge ds \wedge \theta\Big) + \hat{d}_c\gamma_2 \\ &= (Tf - X^2g + XYf)ds \wedge dx \wedge \theta \\ &\qquad + (Tg - YXg + Y^2f)ds \wedge dy \wedge \theta \;+\; d_c\gamma_2 + ds \wedge S\gamma_2 \\ &= ds \wedge \big(S\gamma_2 - d_c(fdx + gdy)\big) + d_c\gamma_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{d}_c\big(ds \wedge (fdx \wedge \theta + gdy \wedge \theta) + \gamma_3\big) &= \Pi_{E_0} d\big(ds \wedge (fdx \wedge \theta + gdy \wedge \theta)\big) + \hat{d}_c\gamma_3 \\ &= \Pi_{E_0}\big(- (Xg - Yf)ds \wedge dx \wedge dy \wedge \theta\big) + d_c\gamma_3 + ds \wedge S\gamma_3 \\ &= ds \wedge (S\gamma_3 - (Xg - Yf)dx \wedge dy \wedge \theta) + d_c\gamma_3 \\ &= ds \wedge \big(S\gamma_3 - d_c(fdx \wedge \theta + gdy \wedge \theta)\big) + d_c\gamma_3.\end{aligned}$$

$\square$

4.2 Maxwellin yhtälöt Heisenbergin ryhmässä

Sähkömagnetismin Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa luonnollisissa yksiköissä Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ differentiaalimuotojen avulla seuraavalla tavalla [6]

$$dF = 0, \qquad d * F = \mathcal{J},$$

missä F on sähkökentän voimakkuuden ja magneettivuon tiheyden sisältävä ns. Faradayn kaksimuoto ja $\mathcal{J}$ on kaksimuoto, joka sisältää varaus- ja virrantiheyden. Tämä formulaatio on mahdollinen johtuen $\mathbb{R}^3$ -avaruuden differentiaalioperaatioiden yhteydestä de Rhamin kompleksiin. Kuitenkin kappaleessa 3.2 huomattiin, että horisontaalisten vektorien differentiaalioperaatioilla on vastaavanlainen yhteys Ruminkompleksiin, mikä tuo esiin kysymyksen Maxwellin yhtälöiden formuloimisesta sisäisillä differentiaalimuodoilla. Heisenbergin ryhmällä on Euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}^3$ verrattuna hyvin erityisiä ominaisuuksia, jotka tulevatkin näkyviin tässä formulaatiossa.

Määritellään ensin Minkowskin metriikkaa vastaava sisätulo aika-avaruusryhmässä.

Määritelmä 4.2.1. Määritellään sisätulo $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ avaruudessa $E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$ seuraavanlaisesti

$$\langle ds\wedge\beta+\gamma, ds\wedge\beta'+\gamma'\rangle_M := \langle\gamma,\gamma'\rangle - \langle\beta,\beta'\rangle.$$

Huomautus 4.2.2. Sisätulo on analoginen Minkowskin metriikan kanssa, sillä Minkowskin metriikalle g_M metrisellä signatuurilla $(-,+,+,+)$ pätee

$$g_M\big((s,x,y,z),(s',x',y',z')\big) = xx'+yy'+zz'-ss' = \langle(x,y,z),(x',y',z')\rangle_{\mathbb{R}^3} - \langle s,s'\rangle_{\mathbb{R}},$$

missä $\langle\cdot,\cdot\rangle_R$ ja $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ ovat Euklidiset sisätulot avaruuksissa $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^3$.

Määritelmä 4.2.3. Määritellään Hodgen tähtioperaatio $*_M$ avaruudessa $E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$ vastaamaan sisätuloa $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ siten, että pätee

$$\alpha\wedge *_M\beta = \langle\alpha,\beta\rangle_M ds\wedge dx\wedge dy\wedge\theta.$$

Propositio 4.2.4. *Jos pätee $\alpha = ds\wedge\beta+\gamma\in E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$, niin on oltava*

$$*_M\alpha = (-1)^h ds\wedge *\gamma - *\beta.$$

Todistus. Olkoon $*_M\alpha =: ds\wedge\beta''+\gamma''$, jolloin mielivaltaisille $\beta'\in E_0^{h-1}(\hat{\mathbb{H}})$ ja $\gamma'\in E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$ pätee

$$\begin{aligned}(ds\wedge\beta'+\gamma')\wedge *_M\alpha &= \langle ds\wedge\beta'+\gamma', ds\wedge\beta+\gamma\rangle_M ds\wedge dx\wedge dy\wedge\theta\\ &= (\langle\gamma',\gamma\rangle - \langle\beta',\beta\rangle)ds\wedge dx\wedge dy\wedge\theta\\ &= ds\wedge\big((\langle\gamma',\gamma\rangle-\langle\beta',\beta\rangle)dx\wedge dy\wedge\theta)\big)\\ &= ds\wedge(\gamma'\wedge *\gamma - \beta'\wedge *\beta).\end{aligned}$$

Toisaalta pätee myös

$$\begin{aligned}(ds\wedge\beta'+\gamma')\wedge *_M\alpha &= (ds\wedge\beta'+\gamma')\wedge(ds\wedge\beta''+\gamma'')\\ &= \gamma'\wedge\gamma''+\gamma'\wedge ds\wedge\beta''+ds\wedge\beta'\wedge\gamma''\\ &= \gamma'\wedge\gamma + ds\wedge\big((-1)^h\gamma'\wedge\beta''+\beta'\wedge\gamma''\big),\end{aligned}$$

mistä vertaamalla saadaan

$$\left.\begin{cases}\beta'' = (-1)^h * \gamma\\ \gamma'' = - * \beta\\ \gamma'\wedge\gamma'' = 0\end{cases}\right\} \Rightarrow \underbrace{\gamma'}_{\in E_0^h}\wedge\underbrace{*\beta}_{\in E_0^{n-h+1}} = 0,$$

missä $\gamma'\wedge *\beta$ katoaa $(n+1)$-muotona. Saatiin

$$*_M\alpha = ds\wedge\beta''+\gamma'' = (-1)^h ds\wedge *\gamma - *\beta. \qquad \square$$

Huomautus 4.2.5. Propositiossa 4.2.4 esiintyvä Hodgen tähti $*$ on Heisenbergin ryhmän sisäisille differentiaalimuodoille $E_0(\mathbb{H})$ toimiva Hodgen tähti, eikä esimerkin 4.1.3 mukainen aika-avaruusryhmän sisäisten differentiaalimuotojen $E_0(\hat{\mathbb{H}})$ Hodgen tähti. Tämä pätee myös seuraavassa lauseessa, joskin hieman ilmeisesti.

Lause 4.2.6. *Olkoot $\vec{E} = (E_1, E_2)$ sähkökentän voimakkuus, $\vec{B} = (B_1, B_2)$ magneettivuon tiheys ja $\vec{J} = (J_1, J_2)$ virrantiheys horisontaalisina vektoreina ja lisäksi $\rho \in C^\infty(\hat{\mathbb{H}})$ varaustiheys. Määritellään luvun 3.2 yhteyden avulla vastaavat luonnolliset differentiaalimuodot $E := \vec{E}^\flat = E_1 dx + E_2 dy$, $B := *(\vec{B}^\flat) = B_1 dy \wedge \theta - B_2 dx \wedge \theta$ ja $J := \vec{J}^\flat = J_1 dx + J_2 dy$. Olkoon tällöin Faradayn kaksimuoto $F := -ds \wedge E + B$, ja virrantiheysmuoto $\mathcal{J} := *_M(-ds \wedge \rho + J)$ eli*

$$\mathcal{J} = -J_1 ds \wedge dy \wedge \theta + J_2 ds \wedge dx \wedge \theta + \rho dx \wedge dy \wedge \theta.$$

$\mathcal{J}$ on lisäksi suljettu eli pätee $\hat{d}_c \mathcal{J} = 0$. Tällöin seuraava ekvivalenssi pätee

$$\hat{d}_c F = 0, \qquad \hat{d}_c(*_M F) = \mathcal{J} \tag{4}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{B}}{\partial s} + \operatorname{curl}_{\mathbb{H}} \vec{E} &= \vec{0}, \qquad \operatorname{div}_{\mathbb{H}} \vec{B} = 0, \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial s} - \operatorname{curl}_{\mathbb{H}} \vec{B} &= -\vec{J}, \qquad \operatorname{div}_{\mathbb{H}} \vec{E} = \rho. \end{aligned}$$

Todistus. Faradayn muodon määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned} \hat{d}_c F &= \hat{d}_c\big(ds \wedge (-E) + B\big) = ds \wedge (SB + d_c E) + d_c B \\ &= ds \wedge \big(S(B_1 dy \wedge \theta - B_2 dx \wedge \theta) + d_c(E_1 dx + E_2 dy)\big) + d_c(B_1 dy \wedge \theta - B_2 dx \wedge \theta) \\ &= ds \wedge \big((-SB_2 + X^2E_2 - 2XYE_1 + YXE_1) dx \wedge \theta \\ &\qquad + (SB_1 + 2YXE_2 - Y^2E_1 - XYE_2) dy \wedge \theta\big) \\ &\qquad\qquad + (XB_1 + YB_2) dx \wedge dy \wedge \theta = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -SB_2 + X^2E_2 - 2XYE_1 + YXE_1 = 0 \\ SB_1 + 2YXE_2 - Y^2E_1 - XYE_2 = 0 \\ XB_1 + YB_2 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{B}}{\partial s} + \operatorname{curl}_{\mathbb{H}} \vec{E} = \vec{0} \\ \operatorname{div}_{\mathbb{H}} \vec{B} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_c(*_M F) &= \hat{d}_c\big(*_M (ds \wedge (-E) + B)\big) = \hat{d}_c\big((-1)^2 ds \wedge *B + *E\big) \\ &= \hat{d}_c\big(ds \wedge *(B_1 dy \wedge \theta - B_2 dx \wedge \theta) + *(E_1 dx + E_2 dy)\big) \\ &= \hat{d}_c\big(ds \wedge (B_1 dx + B_2 dy) + E_1 dy \wedge \theta - E_2 dx \wedge \theta\big) \\ &= ds \wedge \big(SE_1 dy \wedge \theta - SE_2 dx \wedge \theta - d_c(B_1 dx + B_2 dy)\big) \\ &\qquad + d_c(E_1 dy \wedge \theta - E_2 dx \wedge \theta) \\ &= ds \wedge \big((-SE_2 - X^2B_2 + 2XYB_1 - YXB_1) dx \wedge \theta \\ &\qquad + (SE_1 - 2YXB_2 + Y^2B_1 + XYB_2) dy \wedge \theta\big) \\ &\qquad\qquad + (XE_1 + YE_2) dx \wedge dy \wedge \theta \\ &= \mathcal{J} = -J_1 ds \wedge dy \wedge \theta + J_2 ds \wedge dx \wedge \theta + \rho dx \wedge dy \wedge \theta \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -SE_2 - X^2B_2 + 2XYB_1 - YXB_1 = J_2 \\ SE_1 - 2YXB_2 + Y^2B_1 + XYB_2 = -J_1 \\ XE_1 + YE_2 = \rho \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \vec{E}}{\partial s} - \operatorname{curl}_{\mathbb{H}} \vec{B} = -\vec{J} \\ \operatorname{div}_{\mathbb{H}} \vec{E} = \rho \end{cases}. \qquad \square$$

Huomautus 4.2.7. Ehto $\hat{d}_c\mathcal{J} = 0$ kuvaa jatkuvuusyhtälöä

$$\begin{aligned} \hat{d}_c\mathcal{J} &= \hat{d}_c(-J_1 ds \wedge dy \wedge \theta + J_2 ds \wedge dx \wedge \theta + \rho dx \wedge dy \wedge \theta) \\ &= \hat{d}_c\big(ds \wedge (-J_1 dy \wedge \theta + J_2 dx \wedge \theta) + \rho dx \wedge dy \wedge \theta\big) \\ &= ds \wedge \big(S\rho dx \wedge dy \wedge \theta - d_c(-J_1 dy \wedge \theta + J_2 dx \wedge \theta)\big) + \underbrace{d_c(\rho dx \wedge dy \wedge \theta)}_{=0} \\ &= ds \wedge \big((S\rho + XJ_1 + YJ_2) dx \wedge dy \wedge \theta\big) = 0 \\ \Rightarrow \quad S\rho + XJ_1 + YJ_2 &= \frac{\partial \rho}{\partial s} + \operatorname{div}_{\mathbb{H}} \vec{J} = 0. \end{aligned}$$

Huomautus 4.2.8. Rumin-kompleksi $(E_0^*(\hat{\mathbb{H}}), \hat{d}_c)$ on eksakti, joten täytyy päteä

$$F = \hat{d}_c(-ds \wedge \phi + A),$$

missä $\phi \in E_0^0(\mathbb{H})$ ja $A \in E_0^1(\mathbb{H})$. Huomataan, että ϕ vastaa sähköistä skalaaripotentiaalia, kun taas $A^\sharp := (A_1 dx + A_2 dy)^\sharp = \vec{A}$ vastaa magneettista vektoripotentiaalia, sillä pätee

$$-ds \wedge E + B =: F = \hat{d}_c(-ds \wedge \phi + A) = ds \wedge (SA + d_c\phi) + d_cA$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E = -d_c\phi - SA \\ B = d_cA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = -X\phi - SA_1 \\ E_2 = -Y\phi - SA_2 \\ B_1 = 2YXA_2 - Y^2A_1 - XYA_2 \\ B_2 = 2XYA_1 - X^2A_2 - YXA_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = -\operatorname{grad}_{\mathbb{H}} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial s} \\ \vec{B} = \operatorname{curl}_{\mathbb{H}} \vec{A} \end{cases}.$$

Määritelmä 4.2.9. Olkoon $HO_{\mathbb{H}}$ kaikkien H-lineaaristen 4×4 -matriisien $L \in HL(\mathbb{R} \times \mathbb{H}, \mathbb{R} \times \mathbb{H})$ ryhmä siten, että $L^TGL = G$ pätee, missä matriisi G vastaa Minkowskin metriikkaa

$$G := \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Huomautus 4.2.10. Jos $L \in HO_{\mathbb{H}}$, niin pätee

$$\det G = \det(L^TGL) = \det(L^T) \det G \det L = (\det L)^2 \det G \quad \Rightarrow \quad \det L = \pm 1.$$

Lause 4.2.11. *Jos $L \in HO_{\mathbb{H}}$ ja $0 \leq h \leq 4$ pätevät, niin on voimassa*

i) $L^* : E_0^h(\hat{\mathbb{H}}) \to E_0^h(\hat{\mathbb{H}})$;

ii) $\hat{d}_cL^* = L^*\hat{d}_c$;

iii) $*_ML^* = (\det L)L^* *_M$.

Todistus. Lause on todistettu yksityiskohtaisesti paperissa [4]. $\square$

Korollaari 4.2.12. *Maxwellin yhtälöt (4) toteuttava F toteuttaa myös yhtälöt*

$$\hat{d}_c(L^*F) = 0, \qquad \hat{d}_c(*_M L^*F) = (\det L)L^*\mathcal{J},$$

missä $L \in HO_{\mathbb{H}}$. Maxwellin yhtälöt säilyvät siis muuttumattomina avaruuden $HO_{\mathbb{H}}$ toiminnon kanssa eli $HO_{\mathbb{H}}$ on Lorentz-muunnosten avaruus.

Todistus. Kaksimuoto F toteuttaa Maxwellin yhtälöt, joten pätee

$$\begin{cases} \hat{d}_c F = 0 \\ \hat{d}_c(*_M F) = \mathcal{J} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L^*\hat{d}_c F = \hat{d}_c(L^*F) = 0 \\ L^*\hat{d}_c(*_M F) = \hat{d}_c L^*(*_M F) = (\det L)\hat{d}_c(*_M L^*F) = L^*\mathcal{J} \end{cases} \qquad \square$$

Lause 4.2.13. *Kuvaus $L \in HO_{\mathbb{H}}$ on Lorentz-muunnos, jos ja vain jos se on muotoa*

$$L = \begin{pmatrix} \pm_s 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix},$$

missä $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ on ortogonaalimatriisi, jolloin pätee $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm_t 1$.

Todistus. Oletetaan aluksi, että L on yleisintä muotoa eli $L = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Vastaavasti, kuin Heisenbergin ryhmässä, homogeenisuusehto määrää, että $a_{03} = a_{13} = a_{23} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = 0$. Lisäksi ollakseen H-lineaarinen, kuvauksen L on oltava ryhmäendomorfismi, eli mielivaltaisille $x := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ja $y := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ pätee $L(x \cdot y) = Lx \cdot Ly$. Samoin, kuin Heisenbergin ryhmän tapauksessa, viimeistä koordinaattia lukuunottamatta yhtälö on identtisesti tosi. Viimeinen koordinaatti puolestaan antaa yhtälön

$$\begin{aligned} a_{33}(x_1y_2 - x_2y_1) &= (a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{20}y_0 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2) \\ &\qquad - (a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \\ &= \cancel{a_{10}a_{20}x_0y_0} - \cancel{a_{10}a_{20}x_0y_0} + a_{10}a_{21}x_0y_1 + a_{10}a_{22}x_0y_2 \\ &\quad - a_{20}a_{11}x_0y_1 - a_{20}a_{12}x_0y_2 + a_{20}a_{11}x_1y_0 + a_{20}a_{12}x_2y_0 \\ &\quad - a_{10}a_{21}x_1y_0 - a_{10}a_{22}x_2y_0 + \cancel{a_{11}a_{21}x_1y_1} - \cancel{a_{21}a_{11}x_1y_1} \\ &\quad + a_{12}a_{21}x_2y_1 - a_{22}a_{11}x_2y_1 + a_{11}a_{22}x_1y_2 - a_{21}a_{12}x_1y_2 \\ &\quad + \cancel{a_{12}a_{22}x_2y_2} - \cancel{a_{22}a_{12}x_2y_2} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &\quad + (a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11})(x_0y_1 - x_1y_0) \\ &\qquad + (a_{10}a_{22} - a_{20}a_{12})(x_0y_2 - x_2y_0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{33} \\ a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11} = 0 \\ a_{10}a_{22} - a_{20}a_{12} = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ehdosta $L^T GL = G$ seuraa triviaalisti, että $a_{33} \neq 0$, joten voidaan johtaa yhtälöryhmästä

$$a_{10} = \frac{a_{20}a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{20}a_{12}}{a_{22}} \;\Rightarrow\; a_{20}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}) = a_{20}a_{33} = 0 \;\Rightarrow\; a_{10} = a_{20} = 0.$$

Johdetaan vielä viimeiset ehdot yhtälöstä $L^T(GL) = G$

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} -{a_{00}}^2 = -1 \\ a_{00}a_{01} = 0 \\ -a_{00}a_{02} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_{00} = \pm_s 1 \Rightarrow a_{01} = a_{02} = 0 \\ {a_{01}}^2 + {a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 = 1 \\ -{a_{02}}^2 + {a_{12}}^2 + {a_{22}}^2 = 1 \\ -a_{01}a_{02} + a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \\ a_{33}^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} {a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 = 1 \\ {a_{12}}^2 + {a_{22}}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm_t 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} \pm_s 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix},$$

missä $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ on ortogonaalimatriisi, jolle pätee $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm_t 1$. □

Huomautus 4.2.14. Toisin kuin Euklidisessa formulaatiossa, Lorentz-muunnokset eivät tässä sekoita aikaa ja avaruutta keskenään.

Huomautus 4.2.15. Jos Faradayn kaksimuotoa

$$F = -ds \wedge E + B = (-E_1)ds \wedge dx + (-E_2)ds \wedge dy + B_1 dy \wedge \theta + B_2 dx \wedge \theta$$

merkitään antisymmetrisenä sähkömagneettisena kentänvoimakkuustensorina F_{ij} siten, että pätee $F = \frac{1}{2}\sum_{i,j} F_{ij}\xi^i \wedge \xi^j$, kun $\xi^0 = ds$, $\xi^1 = dx$, $\xi^2 = dy$ ja $\xi^3 = \theta$, niin kirjoitettuna matriisimuodossa (indeksit i ja j alkaen arvosta 0) saadaan

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & 0 \\ E_1 & 0 & 0 & -B_2 \\ E_2 & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Saatu tensori on täsmälleen sama, kuin vastaavassa Euklidisessa tapauksessa, jossa sähkökentän voimakkuuden ja magneettivuon tiheyden t-komponentit katoavat $E_3 = B_3 = 0$ [6]. Huomataan lisäksi, että tässä tapauksessa myöskään sähkö- ja magneettikentät eivät sekoitu keskenään Lorentz-muunnoksessa

$$F'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \mp_s a_{11}E_1 \mp_s a_{12}E_2 & \mp_s a_{21}E_1 \mp_s a_{22}E_2 & 0 \\ \pm_s a_{11}E_1 \pm_s a_{12}E_2 & 0 & 0 & \pm_t a_{12}B_1 \mp_t a_{11}B_2 \\ \pm_s a_{21}E_1 \pm_s a_{22}E_2 & 0 & 0 & \pm_t a_{22}B_1 \mp_t a_{21}B_2 \\ 0 & \mp_t a_{12}B_1 \mp_t a_{11}B_2 & \mp_t a_{22}B_1 \mp_t a_{21}B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

missä pätee $\sum_{i,j} F'_{ij}\xi^i \wedge \xi^j := \sum_{i,j} F_{ij}(L^*\xi^i) \wedge (L^*\xi^j) = \sum_{i,j}(LF_{ij}L^T)\xi^i \wedge \xi^j$ eli $F'_{ij} = LF_{ij}L^T$ on Lorentz-muunnettu kentänvoimakkuustensori. Lorentz-muunnosten seurauksena siis sähkökentän voimakkuus ja magneettivuon tiheys kääntyvät tai peilautuvat horisontaalisessa tasossa säilyttäen suuruutensa, sekoittumatta keskenään.

Viitteet

[1] Franchi, B. ja Tesi, M. C. Faraday's Form and Maxwell's Equations in the Heisenberg Group, *Milan Journal of Mathematics*, 2009, vol. 77, nro 1, s. 245–270.

[2] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*, 2. painos, Graduate Texts in Mathematics, vol. 218. Springer, N.Y., 2013.

[3] Capogna, L., Danielli, D., Pauls, S. D. ja Tyson, J. T. *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*, Progress in Mathematics, vol. 259, Birkhäuser, 2007.

[4] Franchi, B. ja Tesi, M. C. Wave and Maxwell's equations in Carnot groups, *Communications in Contemporary Mathematics*, 2012, vol. 14.

[5] Knapp, A. W. *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in mathematics, vol. 140, Birkhäuser, 2002.

[6] Helenius, T. Differentiaalimuodot ja sähkömagnetiikka. Erikoistyö, Aalto yliopisto, Perustieteiden korkeakoulu, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos, Espoo, 2015.

[7] Magnani, V. Differentiability and area formula on stratified Lie groups, *Houston J. Math.,* 2001, vol. 27, nro 2, s. 297–323.

[8] Rumin, M. Around heat decay on forms and relations of nilpotent Lie groups, *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 2000–2001, vol. 19, s. 123–164.