Teknillinen Korkeakoulu
CFD-group/ Laboratory of Applied Thermodynamics
P.O.Box 4400
FIN-02015 HUT, FINLAND
Tel: +358 9 451 3949 Fax: +358 9 451 3418

MUISTIO No CFD/TERMO-26-98 pvm 24 maaliskuuta, 1998

OTSIKKO

TILAVUUKSIEN JA PINTA-ALOJEN LASKENTA RAKENTEELLISELLE HILALLE

LAATIJA(T)
Patrik Rautaheimo

TIIVISTELMÄ

FINFLOssa käytetyt algoritmit hilaparametrien laskennassa.

PÄÄKOHDAT

Tilavuus ja pinta-ala algoritmit

SIVUJA
3

AVAINSANAT
Rakenteellinen hila, tilavuuksien laskenta, pinta-alojen laskenta

TARKASTANUT

Timo Siikonen Maaliskuu 23, 1998

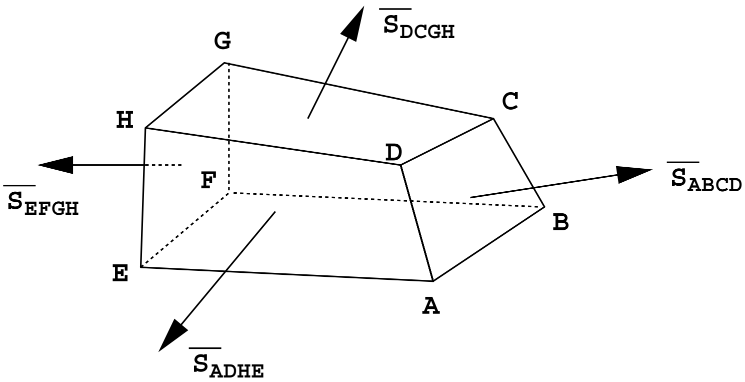

Fig. 1: Kolmidimensioinen heksaedrilaskentatilavuus.

1 Yleistä

Geometriset suureet, pinta-alavektorit ja koppien tilavuudet, voidaan laskea usealla tavalla. Laskenta on suoritettava konsistentisti siten, että kahden tilavuuden välinen pinta lasketaan samalla tavoin ja laskentatilavuuksien on täytettävä laskenta-alue kokonaan ilman väliin jääviä koloja. Seuraavassa esitetään, miten geometriset suureet lasketaan FINFLO-ohjelmassa. FINFLO on kontrollitilavuusmenetelmää käyttävä kolmidimensioinen virtausratkaisija. Se käyttää käyräviivaistä säännöllistä monilohkoista hilaa. Tässä käydään läpi tilavuuksien, pinta-alojen ja normaalivektoreiden laskenta-algoritmit.

2 Laskentatilavuus

Laskenta-alue on jaettu moneen 6-sivuiseen heksaedrialkioihin (kuva 1), missä kuuden heksaedrin seinien pinnat eivät ole välttämättä tasoja. Tälläisen laskenta-alkion tilavuuden, pinta-alojen ja normaalien määrittämisessä on oltava tarkka jotta pinta-alat viereisissä laskenta-alkioissa ovat yhtäsuuret ja laskenta-alueen kokonaistilavuus on sama kuin laskenta-alkioiden tilavuuksien summa eli laskenta-alkiot täyttävät koko simulointialueen.

Laskentatilavuuksien pinta-alavektoreiden laskeminen

Laskenta-alkion seinän pinta-alavektoreiden tulee täyttää seuraava lause

$$\oint_S d\vec{S} = 0 \tag{1}$$

eli pinta-alavektoreiden summan täytyy olla nolla laskenta-alkiolle. Kopin seinän pinta-ala $ABCD$ kuvassa 1 voidaan laskea seuraavasti

$$\vec{S}_{ABCD} = \frac{1}{2}(\vec{x}_{AC} \times \vec{x}_{BD}) \tag{2}$$

tai

$$\vec{S}_{ABCD} = \frac{1}{2}[(\vec{x}_{AB} \times \vec{x}_{BC}) + (\vec{x}_{CD} \times \vec{x}_{DA})] \tag{3}$$

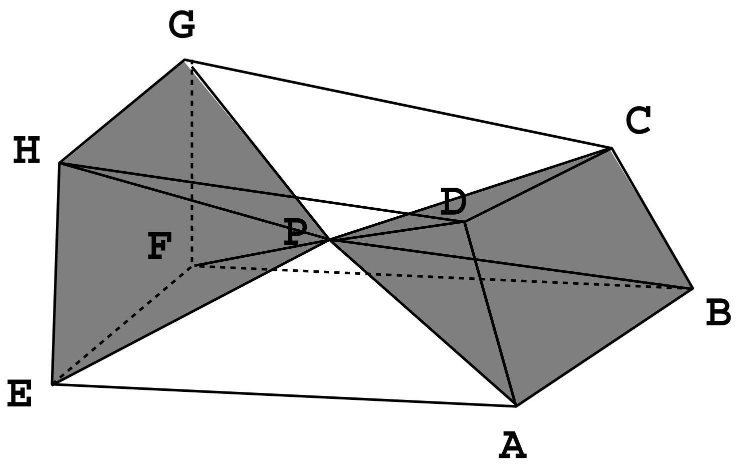

Fig. 2: Kolmidimensioinen heksaedrin jako pyramideihin.

Viimeinen yhtälö laskee pinta-alavektorin $\vec{S}_{ABCD}$ summana kahden kolmion (ABC) ja (CDA) pinta-aloista. Yleisessä tapauksessa näiden kahden kolmion pinta-alavektorit eivät ole saman suuntaisia. Kuitenkin kummatkin yllä olevat yhtälöt johtavat samaan tulokseen. Myös kolmioita (BCD) ja (DAB) voitaisiin käyttää pinnan vektoreiden määrittämiseksi. Yleensä kuitenkin käytetään yhtälöä (2), koska se vaatii vähiten laskentaa.

Nyt vektorista $\vec{S}$ saadan normaalivektori ja pinta-ala seuraavasti

$$\vec{n} = \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|} \tag{4}$$

ja

$$S = |\vec{S}| \tag{5}$$

Tilavuuksien laskenta

Tilavuudet voidaan laskea jakamalla heksaedri pyramideihin. Jotta tämä olisi mahdollisimman suuntariippumaton täytyy heksaedri jakaa 6:n pyramidiin siten että pyramidin pohja on yksi heksaedrin sivuista ja huippu sijaitsee heksaedrin keskipisteessä. Kuvassa 2 näkyy esimerkki kuinka heksaedri jaetaan pyramideihin. Kuvassa on tummennettu ainoastaan 2 pyramidiä. Pyramidin tilavuus saadaan laskettua ottamalla pistetulo pyramidin pohjan pinta-alavektorin ja jonkun vektorin $\vec{x}_{(P)}$ joka lähtee pinnalta pyramidin kärkeen

$$V_{PABCD} = \frac{1}{3}\vec{x}_{(P)} \cdot \vec{S}_{ABCD} \tag{6}$$

Koska $ABCD$ ei todennäköisesti ole tasopinta, täytyy $\vec{x}_{(P)}$ approksimoida keskiarvona

$$\vec{x}_{(P)} = \frac{1}{4}(\vec{x}_{PA} + \vec{x}_{PB} + \vec{x}_{PC} + \vec{x}_{PD}) \tag{7}$$

Käyttämällä yhtälöä (2) tilavuuden lausekkeeksi tulee

$$V_{PABCD} = \frac{1}{24}(\vec{x}_{PA}+\vec{x}_{PB}+\vec{x}_{PC}+\vec{x}_{PD})\cdot(\vec{x}_{AC}\times\vec{x}_{BD}) = \frac{1}{12}(\vec{x}_{PA}+\vec{x}_{PB})\cdot(\vec{x}_{AC}\times\vec{x}_{BD}) \tag{8}$$

3 Tarkkuus

Hila luetaan ohjelmaan sisään nurkkapisteinä. Pienimpien laskenta-alkioiden etäisyys saattaa olla luokkaa $10^{-6}m$ ja koko tapauksen dimensiot voivat olla esim. luokkaa $10m$ lentokoneille tai 10^2m laivoille. Jos ajatellaan että hilan origo sijaitsee laivan keulassa, niin myös laivan perän alueella pitää käyttää tiheää hilaa seinämän lähellä. Tällöin tavallinen yksinkertainen tarkkuus (7 numeroa) ei riitä, jotta laskenta-tilavuuksien geometriatiedot voidaan tarkasti määrittää. Tästä johtuen geometrian siirrossa ja laskennan aikana täytyy käyttää kaksinkertaista tarkkuutta. Varsinaisessa virtauslaskennassa riittää, että hilan ominaisuudet (tilavuus, pinta-alat ja normaalivektorit) ovat normaalitarkkuudella määritelty.