Bishopin-Gromovin tilavuusepäyhtälö alhaalta rajoitetun Riccin kaarevuuden monistoissa

Ville Romanov

Perustieteiden korkeakoulu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 30.4.2019.

Työn valvoja ja ohjaaja

Lehtori, FT Kirsi Peltonen

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Aalto-yliopisto, PL 11000, 00076 AALTO
www.aalto.fi
Diplomityön tiivistelmä

Tekijä Ville Romanov	
Työn nimi Bishopin-Gromovin tilavuusepäyhtälö alhaalta rajoitetun Riccin kaarevuuden monistoissa	
Koulutusohjelma Matematiikka ja systeemianalyysi	
Pääaine Matematiikka	**Pääaineen koodi** SCI3054
Työn valvoja ja ohjaaja Lehtori, FT Kirsi Peltonen	
Päivämäärä 30.4.2019 **Sivumäärä** 48+v	**Kieli** Suomi

Tiivistelmä

Metriikan kaarevuuden vaikutus moniston topologiaan ja metrisiin ominaisuuksiin on klassinen tutkimuskohde Riemannin geometriassa. Yleinen lähestymistapa aiheen tukimuksessa on asettaa jollekin moniston kaarevuuksista jokin rajoitusehto ja tutkia sen aiheuttamia seurauksia.

Tässä työssä asetamme sileän ja täydellisen Riemannin moniston Riccin kaarevuudelle globaalin alarajan. Todistamme Bochnerin-Weitzenböckin kaavan, jonka jälkeen näytämme työn päätuloksena, miten Riccin kaarevuuden alarajan avulla voidaan Bochnerin-Weitzenböckin kaavasta johtaa Bishopin-Gromovin tilavuusepäyhtälö. Epäyhtälö mahdollistaa geodeettisten kuulien tilavuuksien vertailun vastaavien kuulien tilavuuksiin vertailuavaruudessa, jonka leikkauskaarevuus on vakio. Vertailuavaruuden kaarevuus määräytyy Riccin kaarevuudelle asetetusta alarajasta.

Tilavuusepäyhtälön sovelluksena tarkastelemme Riemannin mitan tuplaavuusominaisuuksia lokaalissa sekä globaalissa kontekstissa erilaisilla Riccin kaarevuuden alarajoilla. Lisäksi johdamme tilavuusepäyhtälöstä joitakin tunnettuja metrisiä ja topologisia tuloksia epänegatiivisen Riccin kaarevuuden monistoille.

Avainsanat differentiaaligeometria, Bishop-Gromov, kaarevuus, Riccin kaarevuus, Riemannin monistot, tuplaavuus, tilavuus, tilavuusepäyhtälöt, vertailugeometria

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Aalto University, P.O. BOX 11000, 00076 AALTO
www.aalto.fi
Abstract of the master's thesis

Author Ville Romanov

Title The Bishop-Gromov inequality in Riemannian manifolds with a lower bound on the Ricci curvature

Degree programme Master's Programme in Mathematics and Operations Research

Major Mathematics **Code of major** SCI3054

Supervisor and advisor Prof. Kirsi Peltonen, PhD

Date 30.4.2019 **Number of pages** 48+v **Language** Finnish

Abstract

The topological and metric implications of the Riemannian curvature tensor on a Riemannian manifold is a traditional research question in Riemannian geometry. A common strategy for approaching this is to assume a bound on one of the different curvatures available and examine the topological or metric consequences of bounded curvature.

In this thesis, we assume a global lower bound on the Ricci curvature of a smooth Riemannian manifold. We prove the Bochner-Weitzenböck formula and, as the main result, we show how the Bishop-Gromov inequality follows from Bochner-Weitzenböck formula when the lower curvature bound is assumed. The Bishop-Gromov inequality is establishes a strong method for comparing volumes of geodetic balls with similar balls in a simply connected space with constant sectional curvature.

As an application of the volume inequality proven, we establish conditions on Ricci curvature for local and global doubling properties of Riemannian measure on Riemannian manifolds. We finalize the thesis with a selection of classical metric and topological corollaries of the Bishop-Gromov inequality.

Keywords differential geometry, comparison geometry, curvature, Bishop-Gromov inequality, Ricci curvature, Riemannian manifolds, doubling, volume

Esipuhe

Haluan kiittää työn ohjaajaa ja valvojaa, lehtori Kirsi Peltosta työn ohjaamisesta sekä erityisen mielenkiintoisesta ja yhä aktiivisen tutkimuksen kohteena olevasta aiheesta, joka tarjoaa työn valmistumisen jälkeenkin runsaasti uusia näkökulmia tutkittavaksi. Esitän kiitokseni myös matemaatikkotovereilleni Jouko Kelomäelle, Pauli Kemppiselle ja Topi Kuutelalle niin matematiikkaan kuin myös muihinkin aiheisiin liittyneistä keskusteluista sekä tämän diplomityön parissa että siviilissä.

Yleisistä opinnäytetöihin liittyvistä neuvoista kiitän Lauria ja Jesseä. Lisäksi haluan kiittää Pyryä, Roosaa ja joukkoa HOLlilaisia matematiikan ulkopuolisesta tuesta, joka on ollut niin ikään kriittinen tekijä tämän työn valmistumisen kannalta.

Työn tekeminen aloitettiin kesällä 2018 matematiikan ja systeemianalyysin laitoksella, jolle myös kuuluu kiitos tämän diplomityön mahdollistamisesta. Toivon, että tämä työ tarjoaa lukijalle – myös niille, jotka eivät vielä ole juuri tutustuneet Riemannin geometriaan – näköaloja Riccin kaarevuuden, topologian ja metriikan väliseen vuorovaikutukseen, johon tämä työ luo vain häviävän pienen katsauksen.

Otaniemessä, wappuaattona 2019

Ville Romanov

Sisältö

1 Johdanto

Eräs Riemannin geometrian yleinen kysymyksenasettelu kuuluu seuraavasti:

> Jos M^n on sileä ja yhtenäinen n-ulotteinen Riemannin monisto ja tiedämme sen kaarevuudesta jotakin, niin mitä voimme tämän perusteella päätellä moniston
> a) topologisista ominaisuuksista, tai
> b) metrisistä ominaisuuksista?

Historiallisesti merkittävä ensimmäinen virstanpylväs aiheessa on kiistämättömästi Gaussin-Bonnet'n lause (1848)

$$\int_M K\,dA = 2\pi\chi(M),$$

joka yhdistää suunnistetun suljetun pinnan Gaussin kaarevuuden K, joka on pinnan paikallinen invariantti ominaisuus, pinnan Eulerin karakteristikaan $\chi(M)$, joka puolestaan on tärkeä topologinen invariantti.

Moderni lähestymistapa alussa esitetyn kysymyksen tutkimiseen on asettaa jollekin moniston kaarevuuksista jokin rajoitusehto ja tutkia sen seurauksia. Yleisesti käytetty ehto on kaarevuuden rajoittaminen ylhäältä, alhaalta tai määrätylle välille eli niin sanottu nipistäminen (engl. *pinching*). Käänteinen lähestymistapa on valita topologia ja tutkia, että minkälaisien kaarevuusominaisuuksien metriikoita kyseiseen topologiaan on mahdollista konstruoida.

Tämän työn päätuloksena osoitamme, miten alhaalta rajoitetun Riccin kaarevuuden monistoissa Bochnerin-Weitzenböckin yhtälöstä voidaan johtaa Bishopin-Gromovin epäyhtälönä tunnettu tilavuusvertailu. Sen perusteella saamme vähintään paikallisen kontrollin geodeettisten kuulien tilavuuden kasvulle, minkä seurauksena on puolestaan mahdollista muodostaa useita käyttökelpoisia tuloksia. Yhtenä tärkeimmistä erikoistapauksista saamme, että moniston Riemannin mitta on tuplaava, jos Riccin kaarevuus on epänegatiivinen.

Kaarevuussuureista Riccin kaarevuus on erityisen mielenkiintoinen, koska sitä rajoittamalla saadaan leikkauskaarevuuteen verrattuna heikompi kontrolli moniston kaarevuuteen, mutta siltikin monissa tapauksissa se on riittävä merkittävien tulosten saavuttamiseksi ja vahvuudeltaan jopa leikkauskaarevuuteen verrattava, kuten esimerkiksi Myersin lauseen yhteydessä todetaan kappaleessa 5. Erityisesti alhaalta rajoitetun Riccin kaarevuuden tapauksessa merkittävä viimeaikainen edistysaskel oli Mikhail Gromovin "vihreä kirja" (1981, [Gro99]), jossa myös tämän työn päätuloksena esitettävä Bishopin-Gromovin epäyhtälö on esitetty nykyisessä muodossaan ensimmäistä kertaa. Aiheen historiallista yleiskatsausta varten suosittelemme tutustumaan viitteseen [Ber03].

Riccin kaarevuuteen vaikuttaa liittyvän myös runsaasti uusia tutkimuskohteita sekä sovellusmahdollisuuksia. Esimerkiksi Riccin tensoriin läheisesti liittyvä Riccin virtaus on jo osoittanut tärkeytensä Grisha Perelmanin ratkaistua sillä Poincarén konjektuurin vuonna 2002 [Per02] tai kun Simon Brendle ja Richard Schoen täydensivät sen avulla Rauchin ja Klingenbergin perinteisen Palloteorian (engl. *quarter-pinched* *sphere theorem*) diffeomorfiseksi [BS09], mutta nämä tuskin ovat jäämässä ainoiksi merkittäviksi Riccin virtauksen sovelluksiksi.

Tämän työn rakenne on pyritty tekemään selkeäksi ja johdonmukaiseksi niin, että tulokset rakentuvat aina aiemmin esitettyyn perustuen ilman tarvetta lisäkirjallisuuden tai liitteiden käyttämiselle. Sen vuoksi tarjoamme toisessa kappaleessa lyhyen, mutta kattavan, katsauksen tarvittavaan Riemannin geometriaan ja sen suomenkieliseen käsitteistöön. Kolmannessa kappaleessa todistetaan työkaluna käytettävä Bochnerin-Weitzenböckin yhtälö, minkä jälkeen seuraavassa kappaleessa johdamme siitä aputuloksina käytettävät vertailutulokset radiaalisen etäisyysfunktion Laplacelle ja geodeettisten pallojen keskikaarevuudelle. Vertailutulokset muodostavat tarvittavan yhteyden tarkasteltavan moniston ja vakiokaarevuuksisen vertailuavaruuden välille.

Näiden tulosten avulla osoitamme viidennessä kappaleessa suhteellisen tilavuusvertailun, jonka erikoistapauksena saamme Bishopin-Gromovin epäyhtälön. Tämän jälkeen esittelemme joitakin epäyhtälön metrisiä sovelluksia ja tutkimme moniston tuplaavuutta metrisenä avaruutena ja sen suhdetta Riccin kaarevuuteen. Lisäksi esittelemme joitakin tilavuusvertailua soveltavia peitelauseita ja niiden käyttökohteita. Lopuksi esittelemme perinteisiä tilavuusvertailun seurauksena saatavia tuloksia epänegatiivisen Riccin kaarevuuden monistoille.

2 Johdatus Riemannin monistoihin

Tässä työssä tarkastelun kohteina ovat n-ulotteiset sileät monistot M^n, jotka varustetaan Riemannin metriikalla. Sen vuoksi käymme läpi tässä kappaleessa kursorisesti Riemannin monistojen perusominaisuudet ja hieman tarvittavaa tensorialgebraa. Lukijan oletetaan tietävän perusteoria jo etukäteen, joten esitietokappaleen ensisijainen tarkoitus onkin merkintätapojen ja suomenkielisen käsitteistön esittely, sillä varsinkaan jälkimmäisessä näistä ei ole järin vakiintunutta standardia. Kattavaa teoriakatsausta varten suosittelemme sileiden monistojen tapauksessa viitettä [Lee03] ja Riemannin monistoihin puolestaan [Lee97] ja [Car92]. Viite [Jos11] on kokonaisvaltainen johdatus geometriseen analyysiin Riemannin monistoilla. Näitä käytämme myös tämän kappaleen ensisijaisina lähdeviitteinä.

2.1 Monistojen rakenne

Yleisen määritelmän mukaisesti monistolla M^n tarkoitetaan tässä yhtenäistä ja parakompaktia Hausdorffin avaruutta, jonka jokaisella pistellä on avoin ympäristö U, joka on homeomorfinen avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kanssa. Avaruus on parakompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on paikallisesti äärellinen hienonnus. Parakompaktiudesta seuraa, että avaruuden millä tahansa avoimella peitteellä on olemassa siihen sopiva ykkösen ositus. Joukkoa U ja siihen liittyvää homeomorfismia $x : U \to \Omega$ kutsutaan *kartaksi*.

Moniston M^n avoimen peitteen muodostavien joukkojen U_α ja niihin liittyvien karttojen perhe $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ on puolestaan *atlas* tai *kartasto*. Kun olemme valinneet sopivan kartan (U_α, x_α), samastamme usein pisteen $p \in U_\alpha$ sen *paikallisiin koordinaatteihin* $x_\alpha(p) = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$ monistolla M^n. Merkitsemme myöhemmin pelkästään M, jos ulottuvuutta n ei ole tarvetta korostaa.

Oletamme tässä työssä, että käsiteltävillä monistoilla ei ole reunaa. Monistot voivat olla kompakteja tai avoimia. Kutsumme monistoa avoimeksi, jos se ei ole kompakti. Tässä vaiheessa puhumme kompaktiudesta puhtaasti topologisena ominaisuutena, mutta myöhemmin selvitämme kompaktiuden luonnetta myös osittain metrisenä ominaisuutena.

Jotta voimme järkevästi määritellä perinteisestä analyysistä tuttuja työkaluja moniston paikallisissa koordinaateissa, vaadimme, että käyttämämme atlas on sileä. Atlas on sileä, jos sen siirtymäkartat

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ovat sileitä. Monisto M on sileä, jos sen maksimaalinen atlas on sileä. Tässä työssä käsittelemme vain sileitä monistoja.

Määritelläksemme pisteeseen $p \in M$ liittyvän *tangenttiavaruuden* T_pM, esitämme lyhyen geometrisen johdatuksen *tangenttivektoreihin* monistolla M. Olkoon sitä varten $\gamma(t) : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ sileä polku, jolle pätee $\gamma(0) = p$. Tällöin funktio $\dot\gamma(0) : C^1(M) \to \mathbb{R}$, joka määritellään

$$\dot\gamma(0)(f) := \left.\frac{d(f \circ \gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}, \tag{2.1}$$

on käyrän γ tangenttivektori pisteessä p. Olkoon nyt (U, x) kartta keskitettynä pisteeseen $p \in U$, jolloin siis pätee $x(p) = (0, ..., 0)$. Jos kirjoitamme polun γ paikallisissa koordinaateissa $x \circ \gamma = (x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t))$, voimme kirjoittaa yhtälön (2.1) paikallisissa koordinaateissa

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(0)(f) &= \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x^1(t), ...x^n(t))\bigg|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i(0)\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x(p)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i(0)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x(p)} \right) f.\end{aligned}$$

Voimme siis kirjoittaa tangenttivektorin $\dot{\gamma}$ pisteessä p karttakuvauksen x avulla muodossa

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_{i=1}^{n} \dot{x}^i(0)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{x(p)}.$$

Jos käyrä on kartan avulla ilmaisuna muotoa $x \circ \gamma(t) = (0, ..., 0, x^i(t), 0, ..., 0)$, niin tällöin $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x(p)}$ on tämän käyrän tangenttivektori. Pisteen p kaikkien tangenttivektoreiden joukko muodostaa *tangenttiavaruuden* T_pM. Voidaan näyttää, että tangenttiavaruus T_pM on n-ulotteinen vektoriavaruus. Sen karttakuvaukseen x liittyvä suunnistettu kanta on

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_{x(p)}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\bigg|_{x(p)} \right),$$

jonka elementtejä merkitsemme myös ∂_{x^i}, kun se on luettavuuden kannalta hyödyllistä eikä sekaannuksen vaaraa ei ole. Kutsumme tätä tangenttiavaruuden *koordinaattikannaksi.* Yllä olevan perusteella pätee $T_pM \simeq \{p\} \times \mathbb{R}^n$, joskaan isomorfismi ei ole kanoninen, vaan riippuu tietenkin valitusta kartasta (U, x). Kaikkien tangenttiavaruuksien pistevieraana yhdisteenä saamme *tangenttikimpun* $TM = \amalg_{p\in M} T_pM \simeq \{M\} \times \mathbb{R}^n$ tai avoimessa joukossa U puolestaan $TU = \amalg_{p\in U} T_pM \simeq \{U\} \times \mathbb{R}^n$.

Näillä merkinnöillä voimme kirjoittaa avaruuden T_pM minkä tahansa vektorin v muodossa $v = \sum_{i=1}^{n} v^i\, \partial_{x^i} = v^i\, \partial_{x^i}$, joka puolestaan operoi sileään funktioon $f(x)$ paikallisissa koordinaateissa:

$$v(f)(p) = v^i\, \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_{x(p)}.$$

Edellisissä lausekkeissa käytimme Einsteinin summamerkintää, jossa summamerkintä Σ jätetään pois, jos indeksi, jonka yli summa lasketaan, esiintyy lausekkeessa kerran ylä- ja alaindeksinä. Ilmaisuissa $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ja ∂_{x^i} indeksi i käsitetään siis alaindeksiksi. Jatkossa käytämme Einsteinin merkintää silloin, kun sekaannuksen vaaraa ei ole.

Tangenttiavaruuden lisäksi määrittelemme sen duaalin, kotangenttiavaruuden T_p^*M, jonka indusoitu kanta $(dx^1, ..., dx^n)$ seuraa luonnollisesta parikuvauksesta $dx^i\left(\partial_{x^j}\right) = \delta^i_j$. Tällöin, jos kirjoitamme kovektorin $\omega = \omega_i dx^i$, saamme luonnollisesti

$$\omega_i dx^i \left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_i v^j \delta^i_j = \omega_i v^i,$$

missä δ^i_j on Kroneckerin delta.

Nämä vektoreiden ja kovektoreiden määritelmät voidaan suoraan yleistää vektori- ja kovektorikentiksi. *Vektorikenttä* X moniston avoimessa joukossa $U \subseteq M$ on kuvaus, joka liittää jokaiseen pisteeseen $p \in U$ vektorin $X(p) \in T_pM$. Tällöin kartassa (U, x) voimme kirjoittaa vektorikentän muodossa

$$X(p) = v^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

jossa v^i on funktio $v^i(p) : U \to \mathbb{R}$. Vektorikenttä on sileä, jos funktiot v^i ovat sileitä kartassa (U, x), jolloin ne ovat sileän atlaksen määritelmän perusteella sileitä atlaksen jokaisessa kartassa. *Paikallinen kehys* $(E_1, ..., E_n)$ tangenttikimpussa TU on n kappaletta sileitä vektorikenttiä, jotka muodostavat pisteittäin kannan tangenttiavaruudessa T_pM. Vastaava kotangenttikehys $(\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n)$ kimpussa $T^*U = T^1U$ saadaan ehdosta $\varepsilon^i(E_j) = \delta^j_i$.

Yleisemmin voimme puhua moniston M *vektorikimpusta* (E, π, M), jossa pohja-avaruutena toimivaan monistoon M liitetään toinen sileä monisto E ja sileä projektio $\pi : E \to M$, jossa jokaisella säikeellä $E_p := \pi^{-1}(p)$, $p \in M$ on reaalisen n-vektoriavaruuden rakenne. Tällöin vektorikimpun E sektio on sileä kuvaus $s : M \to E$ siten, että $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Kun s on sileä sektio vektorikimpun E yli, merkitsemme $s \in \Gamma(E)$. Näillä merkinnöillä esimerkiksi sileä vektorikenttä X on kimpun (TM, π, M) sektio eli kirjoitamme $X \in \Gamma(TM)$.

2.2 Riemannin metriikka

Kun olemme määritelleet sileiden monistojen perusrakenteet ja tarvittavan teorian tensoreista, voimme määritellä Riemannin metriikan.

Määritelmä 2.1. Riemannin metriikka monistolla M on sileä kuvaus, joka liittää jokaisessa pisteessä $p \in M$ tangenttiavaruuteen T_pM sisätulon $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ siten, että jos (U, x) on kartta ja $(\partial_{x^i}|_{x(p)})$ siihen liittyvä tangenttikimpun kanta, niin silloin

$$g_{ij}(x(p)) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x(p)}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{x(p)} \right\rangle \tag{2.2}$$

on sileä. Metriikan komponentit g_{ij} saadaan yhtälöstä (2.2)

Metriikan komponenttien avulla voimme kirjoittaa metriikan tangenttiavaruuden vektoreille paikallisissa koordinaateissa

$$\langle v, w \rangle := g_{ij}(x(p)) v^i w^j,$$

kun kirjoitamme $v = v^i \partial_{x^i}$ ja $w = w^i \partial_{x^i}$. Koska sisätulo on positiividefiniitti, on olemassa käänteinen metriikka $g^{-1} = g^{ij}$, jonka komponentteja merkitsemme yläindekseillä.

Esimerkki. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanoninen (euklidinen) metriikka on

$$g = \delta^i_j dx^i dx^j = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

Metriikan g indusoiman normin määrittelemme

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,\, v\rangle}, \tag{2.3}$$

jonka avulla voimme erottaa tangenttiavaruudesta esimerkiksi tangenttiyksikköpallon $S_pM := \{v \in T_pM : \|v\| = 1\}$.

2.3 Tensorit

Tässä kappaleessa esittelemme lyhyesti käyttämämme tensoreihin liittyvän yleisen notaation.

Määritelmä 2.2. k-kovariantti ja l-kontravariantti eli (k, l)-tensori on multilineaarinen kuvaus

$$F : \underbrace{V \times ... \times V}_{k \text{ kappaletta}} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l \text{ kappaletta}} \to \mathbb{R},$$

missä V on vektoriavaruus ja V^* sen duaali. Merkitsemme $F \in T^k_l(V)$. Tällöin voimme kirjoittaa tensorin F avaruuden V ja sen duaalin kantojen avulla

$$F = F^{i_1,...,i_l}_{j_1,...,j_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_l}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_k}.$$

Esimerkki. Riemannin metriikka on sileä 2-kovariantti tensorikenttä määriteltynä monistolla M eli toisin sanottuna $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M) = \Gamma(T^2M)$. Voimme kirjoittaa sen paikallisissa koordinaateissa tensorimuodossa $g(x) = g_{ij}(x)\, dx^i \otimes dx^j$.

Tensorin $F \in T^1_1(V)$ jälki tr : $T^1_1(V) \to \mathbb{R}$ määritellään vakiintuneeseen tapaan kontraktiona $\operatorname{tr}(F^i{}_j) = F^i{}_i$, ja yleisessä tapauksessa tensorin $F \in T^k_l(V)$ (m, n)-kontraktio $\mathcal{C}_{m,n}(F^{i_1,...,i_m,...,i_k}_{j_1,...,j_n,...,j_l}) := F^{i_1,...,h,...,i_k}_{j_1,...,h,...,j_l}$. Yleisessä tapauksessa ilmoitetaan aina indeksi, jonka suhteen kontraktio tehdään.

Metriikan avulla voidaan määritellä niin kutsutut *musikaaliset isomorfismit* tangenttikimpun TM ja kotangenttikimpun T^*M välille, mikä mahdollistaa vektorien muuntamisen kovektoreiksi ja päinvastoin. Tensoreiden tapauksessa kutsutaan operaatioita indeksien korottamiseksi tai alentamiseksi. Vektorin $v = v^i \partial_{x^i}$ alennus $\flat : TM \to T^*M$ kovektoriksi $v^\flat$ määritellään

$$v^\flat(w) := \langle v,\, w\rangle\,,$$

tai paikallisissa koordinaateissa $v^\flat = (g_{ij}v^i)dx^j = v_j dx^j$, missä $v_j := g_{ij}v^i$. Yleisemmin $(k, l+1)$-tensoreille $\flat : T^k_{l+1}M \to T^{k+1}_l M$.

Käänteisoperaatio $\sharp : T^*M \to TM$ eli indeksin korottaminen määritellään kovektorille $\omega = \omega_i dx^i$

$$\left\langle \omega^\sharp, v \right\rangle = \omega(v).$$

Paikallisissa koordinaateissa $\omega^\sharp := (g^{ij}\omega_i)\partial_{x^j} = w^j \partial_{x^j}$, ja yleisemmin määritellään $\sharp : T^{k+1}_l M \to T^k_{l+1}M$.

Metriikan g ja musikaalisten isomorfismien avulla voidaan määritellä tensorin jälki myös k-kovarianteille tensoreille. Esimerkiksi 2-kovariantille tensorille $X = X_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \in T^2M$ määrittelemme

$$\mathrm{tr_g}\,(X) := \mathrm{tr}\,(X^\sharp) = \mathrm{tr}\,(g^{ik}X_{ij}\;\partial_{x^i} \otimes dx^k) = g^{ij}X_{ij}, \tag{2.4}$$

missä jälki $\mathrm{tr}\,(X^\sharp)$ on hyvin määritelty, sillä $X^\sharp$ on $(1,1)$-tensori.

Lopuksi määräämme symmetrisen bilineaarimuodon $B(X,Y)$ itseisarvon. Tällöin B on symmetrinen 2-kovariantti tensori, jota vastaava itseadjungoituva $(1,1)$-tensori L määritellään kaavalla $B(X,Y) = \langle L(X), Y\rangle$. Tällöin pätee

$$B^2(X,Y) = \left\langle L^2(X), Y \right\rangle = \langle L(X), L(Y)\rangle\,,$$

jolloin määrittelemme itseisarvon

$$|B|^2 = \mathrm{tr}\,(B^2) = \sum_{i=1}^{n} \langle L(E_i), L(E_i)\rangle\,, \tag{2.5}$$

missä vektorit $E_1, ..., E_n$ muodostavat ortonormaalin kehyksen.

2.4 Konnektiot ja kaarevuus

Olemme nyt esitelleet Riemannin metriikaksi kutsutun sisätulon, joka mahdollistaa tangenttiavaruuden T_pM vektoreiden vertailemisen pisteessä $p \in M$. Jos kuitenkin haluamme tarkastella esimerkiksi vektorikentän muutosta moniston kahden eri pisteen p ja q välillä, ei käytössämme ole vielä siihen soveltuvaa työkalua, koska tangettiavaruudet T_pM ja T_qM eivät ole sama avaruus. Tämän takia tarvitsemme *konnektion*, joka sopivalla tavalla luo yhteyden kahden eri tangenttiavaruuden T_pM ja T_qM välille. Käytännössä konnektio tekee mahdolliseksi vektorikenttien kovariantin derivaatan määrittelemisen koordinaateista riippumattomalla tavalla. Määrittelemme Riemannin konnektion, joka on Riemannin metriikan kanssa yhteensopiva ja yksikäsitteinen konnektio.

Lause 2.3. *Riemannin konnektio $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ on lineaarinen konnektio, jolle pätee vektorikentillä X, Y, Z ja $W \in \Gamma(TM)$ ominaisuudet*

1) lineaarisuus: $\nabla_{aX+bY}(Z + W) = a\nabla_X Z + a\nabla_X W + b\nabla_Y Z + b\nabla_Y W$, $a, b \in C^\infty(M)$,

2) tulosääntö: $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$, $f \in C^\infty(M)$,
3) tymmetria: $\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y]$,
4) yhteensopivuus metriikan kanssa: $Z\langle X,\, Y\rangle = \langle \nabla_Z(X),\, Y\rangle + \langle X,\, \nabla_Z(Y)\rangle$,

missä hakatulo määritellään $[X,Y](f) := X(Yf) - Y(Xf)$. *Lisäksi paikallisissa koordinaateissa pätee* $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}$, *missä metriikan Christoffelin symbolit ovat*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{kl} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{jk} \right)$$

Voidaan näyttää, että Christoffelin symbolit määräävät konnektion yksikäsitteisesti.

Todistus. Esimerkiksi [Lee97, lause 5.4]. □

Huomautus: Konnektion symmetriaehto voidaan kirjoittaa vaihtoehtoisesti torsion muodossa

$$T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \equiv 0,$$

jolloin konnektion sanotaan olevaan torsioton.

Määrittelemme Riemannin kaarevuusendomorfismin $\mathrm{R} \in \Gamma(T^3 M \otimes TM)$ konnektion avulla kaavalla

$$\mathrm{R}(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \tag{2.6}$$

jonka komponentit R^l_{ijk} saadaan yhtälöstä

$$\mathrm{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Kaarevuusendomorfismin alennuksena saamme Riemannin kovariantin kaarevuustensorin $\mathrm{Rm} \in \Gamma(T^4 M)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Rm} := \mathrm{R}^\flat &= (\mathrm{R}^l_{ijk}\ dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l})^\flat \\ &= g_{lm}\, \mathrm{R}^m_{ijk}\ dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \\ &= \mathrm{R}_{ijkl}\ dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Kaarevuustensorin evaluointi vektorikentillä X, Y, Z ja W määritellään kaavalla

$$\mathrm{Rm}(X,Y,Z,W) := \langle \mathrm{R}(X,Y)Z,\, W\rangle.$$

Soveltamalla kaarevuustensoria kahteen lineaarisesti riippumattomaan vektoriin $v = v^i \partial_{x^i}$ ja $w = w^j \partial_{x^j} \in T_pM$, saamme näiden vektorien virittämän tason leikkauskaarevuuden

$$K(v \wedge w) := \frac{\langle \mathrm{R}(v,w)w,\, v\rangle}{|v \wedge w|^2},$$

missä ortonormaalin kehyksen suhteen laskettavan kulmatulon itseisarvo voidaan kirjoittaa perinteisemmin myös muodossa $|v \wedge w|^2 = \langle v,\, v\rangle \langle w,\, w\rangle - \langle v,\, w\rangle^2$. Jos kontraktoimme kaarevuustensorin ensimmäisen ja viimeisen indeksin suhteen, saamme tulokseksi Riccin kaarevuustensorin

$$\mathrm{R}_{ij} := g^{km}\,\mathrm{R}_{kijm}\,. \tag{2.8}$$

Määritelmä 2.4. Riccin kaarevuus suuntaan $v \in T_pM$ on

$$\mathrm{Ric}\,(v) := \mathrm{Ric}\,(v, v) = \sum_{i=2}^{n} \langle \mathrm{R}(v, E_i)E_i,\, v\rangle$$

missä $(v, E_2, ..., E_n)$ on tangenttiavaruuden T_pM ortonormaali kanta. Mielivaltaisessa kannassa $(\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^n})$ ilmaistuna pätee $\mathrm{Ric}\,(v, v) = \sum_{j,l=1}^{n} g^{jl} \langle \mathrm{R}(v, \partial_{x^j})\partial_{x^l},\, v\rangle$.

Kirjoitaessamme $\mathrm{Ric}\,(M) > K$ tarkoitamme tällä, että Riccin kaarevuudelle pätee $\mathrm{Ric}\,(v) > K$ kaikilla kyseessä olevan moniston M tangenttivektoreilla $v \in TM$.

Intuitiivisesti Riccin kaarevuus kuvaa moniston leikkauskaarevuuksien normalisoimatonta keskiarvoa niiden kaksiulotteisten aliavaruuksien osalta, joiden tangenttiavaruudet sisältävät vektorin v. Jos moniston M^n leikkauskaarevuus on kaikkiin suuntiin vakio K, niin tällöin pätee $\mathrm{Ric}\,(M^n) = (n-1)K$.

Määritelmä 2.5. Hyperpinnan $Q \subset M^n$, $\dim Q = n-1$, normalisoimaton *keskikaarevuus* m_Q on

$$m_Q := \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} n,\, E_i\rangle\,,$$

missä n on pinnan Q normaalivektorikenttä, (E_i) ortonormaali kehys pinnalla Q ja ∇ moniston M konnektio. Huomaa, että n ja E_i ovat keskenään ortogonaalisia. Yhtäpitävänä määritelmänä voimme antaa $m_Q = \mathrm{tr}\,(\mathrm{II})$, missä II on pinnan toinen perusmuoto.

2.5 Geodeesit ja Riemannin monisto metrisenä avaruutena

Nyt olemme valmiita määrittelemään Riemannin monistoihin metrisen avaruuden rakenteen. Kun käytössämme on yhtälön (2.3) määräämä vektorin normi, voimme voimme määritellä paloittain sileän käyrän $\gamma(t) : [a, b] \to M$ kaarenpituuden $L(\gamma)$ kuten euklidisissa avaruuksissa integraalina

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot\gamma(t),\, \dot\gamma(t)\rangle}\, dt,$$

missä $\dot\gamma(t)$ on käyrän tangenttivektori. Tämä perusteella määrittelemme kahden pisteen p ja $q \in M$ väliseksi etäisyydeksi $d(p, q)$ niitä yhdistävän lyhimmän käyrän pituuden. Toisin sanottuna määrittelemme

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma(t) \in \Omega_{p,q}\}, \tag{2.9}$$

missä käyrien joukko on

$$\Omega_{p,q} = \{\gamma : [a,b] \to M : \gamma \text{ on paloittain } C^\infty, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Etäisyysfunktio $d(p,q)$ määrittää monistolle metrisen avaruuden rakenteen, ja voidaan näyttää, että etäisyysfunktion määräämä topologia on identtinen moniston oman topologian kanssa (esimerkiksi [Jos11, korollaari 1.4.1]). Voimme vielä määritellä monistolla M yleisen metrisen avaruuden tapaan avoimen kuulan

$$B(p,r) = \{q \in M : d(p,q) < r\}$$

ja pallon

$$S(p,r) = \{q \in M : d(p,q) = r\}.$$

Määritelmä 2.6. Parametrisoitu käyrä $\gamma(t) : [a,b] \to M$ on geodeesi, jos pätee

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0 \tag{2.10}$$

tai paikallisissa koordinaateissa ilmaistuna, kun $\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$,

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma^k_{ij}(x(t)) = 0.$$

Geodeesiyhtälön (2.10) toteutumisen intuitiivinen merkitys on se, että geodeesin kovariantti kiihtyvyys on nolla. Tämä vastaa sitä, että euklidessa avaruudessa suoran parametrisoinnin toinen derivaatta häviää. Määritelmästä seuraa, että $\|\dot\gamma(t)\|$ on vakio, jolloin voimme aina valita parametrisoinnin sopivasti siten, että saamme yksikkögeodeesin $\|\dot\gamma(t)\| = 1$. Seuraava lause kiteyttää geodeettisten käyrien merkityksen:

Lause 2.7. *Jokainen pisteiden välisen etäisyyden $d(p,q)$ toteuttava käyrä on geodeesi. Kääntäen pätee, että jokainen geodeesi on paikallisesti yhtälössä (2.9) määritellyn etäisyyden minimoiva käyrä.*

Todistus. Esimerkiksi [Lee97] lauseet 6.6 ja 6.12. □

Määritelmä 2.8 (Eksponenttifunktio)**.** Olkooon piste $p \in M$, tangenttivektori $v \in T_pM$ ja geodeesi $\gamma_v(t) : [0,\epsilon] \to M$, $\epsilon > 0$ siten, että pätee $\gamma_v(0) = p$ ja $\dot\gamma_v(0) = v$. Jos γ_v on määritelty välillä $[0,1]$, määrittelemme eksponenttikuvauksen

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1)$$

pisteessä p.

Määritelmästä seuraa, että riittävän lyhyellä tangenttivektorilla $v \in T_pM$ käyrä $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ on minimaalinen geodeesi välillä $t \in [0,1]$. Pisteitä, joissa geodeesi lakkaa olemasta minimaalinen, kutsutaan geodeesin *konjugaattipisteiksi*, ja ne muodostavat yhdessä pisteen p *leikkausuran*:

Määritelmä 2.9 (Leikkausura)**.** Pisteen p leikkausura (engl. *cut locus*) on joukko

$$\begin{aligned} C_p :=& \{\exp_p(tv) \in M : \gamma(t) = \exp_p(tv) \text{ on minimaalinen geodeesi välillä } [0,1], \\ & \text{mutta lakkaa olemasta minimaalinen, kun } t > 1\}. \end{aligned}$$

Leikkausuran voi myös määrittää alkukuvana $\exp_p^{-1}(C_p)$, sillä eksponenttifunktio on radiaalinen isometria ja käytämme molempia määritelmiä siten, että asiayhteys määrää kumpaa tarkoitamme. Etäisyys leikkausuraan suunnassa $v \in S_pM$ on pisteen p *injektiivisyyssäde* $\mathrm{inj}_p(v)$ suuntaan v ja näistä lyhyin etäisyys on pisteen p injektiivisyyssäde

$$\mathrm{inj}_p := \inf_{v \in S_pM} \mathrm{inj}_p(v).$$

Paikallisissa koordinaateissa tehtäviä laskutoimituksia varten määrittelemme vielä erittäin käyttökelpoiset *normaalikoordinaatit.* Olkoon piste $p \in M$ ja $(e_1, ..., e_n)$ ortogonaalinen kanta avaruudessa T_pM. Tällöin voimme samastaa jokaisen tangenttivektorin $v = v^i e_i$ pisteeseen $(v^1, ..., v^n) \in \mathbb{R}^n$ ja samoin koko avaruuden $T_pM \simeq \mathbb{R}^n$. Jos avoin joukko $U \subset M$ on kokonaan jonkin pisteen $p \in U$ leikkausuran ulkopuolelle, jolloin se kuvautuu diffeomorfisesti $U \mapsto \exp_p^{-1}(U) \simeq \Omega \subset \mathbb{R}^n$, saamme määritelmän:

Määritelmä 2.10. Kartta $(U, \exp_p^{-1})$ määrittelee p-keskeiset normaalikoordinaatit.

Lause 2.11. *Normaalikoordinaateissa* $(U, \exp_p^{-1})$ *pätevät seuraavat ominaisuudet:*

(i) $\exp_p^{-1}(p) = 0$,
(ii) $g_{ij}(0) = \delta^i_j$,
(iii) $\Gamma^i_{jk}(0) = 0$ *ja* $\frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(0) = 0$,
(iv) radiaalinen etäisyys on muotoa $r(x) := d(p,x) = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$,

Todistus. Esimerkiksi [Jos11, lause 1.4.4] ja [Lee97, korollaari 6.9]. □

Lause 2.12 (Gauss)**.** *Olkoon piste* $p \in M$ *ja tangenttiavaruuden vektori* $v \in T_pM$ *siten, että* $\exp_p(v)$ *on määritelty. Olkoon lisäksi vektori* $w \in T_vT_pM \cong T_pM$*. Tällöin eksponenttifunktion differentiaalille* $D\exp_p$ *pisteessä* $\exp_p(v) = q \in M$ *pätee*

$$\langle v, w\rangle = \langle D_v \exp_p(v), D_v \exp_p(w)\rangle.$$

Todistus. Esimerkiksi [Car92, lemma 3.5] ja [Lee97, lause 6.8]. □

Toisin sanottuna Gaussin lause kertoo, että eksponenttifunktio säilyttää metriikan radiaalisissa suunnissa ja on näin ollen radiaalinen isometria. Gaussin lauseessa samastimme tangenttiavaruuden T_pM ja kaksinkertaisen tangenttiavaruuden T_vT_pM. Voimme tehdä näin, sillä molemmilla on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ rakenne ja kaksinkertaisen tangenttiavaruuden T_vT_pM voi ajatella niin, että avaruuden T_pM origo on siirretty vektorin v kärkeen avaruudessa T_vT_pM.

Monissa tapauksissa on hyödyllistä siirtyä käyttämään riemannilaista pallokoordinaatistoa, jossa voimme helposti hyödyntää Gaussin lauseen radiaalista isometriaa.

Karteesisesta p-keskeisestä normaalikoordinaatistosta voidaan siirtyä pallokoordinaatteihin tuomalla tangenttiavaruuteen T_pM tavalliset euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ pallokoordinaatit (r, φ), jossa $\varphi = (\varphi^1, ..., \varphi^{n-1})$ on sopiva yksikköpallon parametrisointi. Tällöin normaalikoordinaattien kartaksi saadaan $(r, \varphi) \mapsto \exp_p((r, \varphi)) \in M$.

Koska Gaussin lauseen perusteella eksponenttifuktio on radiaalinen isometria, samaistuu säde r normaalikoordinaattien radiaaliseen etäisyysfunktioon $r(x)$, jolloin pätee yhtäsuuruus grad $r(x) = \partial/\partial r$. Lisäksi paikallisissa koordinaateissa voidaan näyttää helposti, että etäisyysfunktion gradientin pituus on vakio $|\text{grad } r(x)| = 1$. Luonnollisestikin edellä mainitut seikat pätevät vain silloin, kun emme ole leikkausurassa ja etäisyysfunktio on sileä.

Gaussin lauseen perusteella radiaalinen suunta $\partial/\partial r$ on ortogonaalinen kulmamuuttujien koordinaattivektoreihin ∂_{φ_i}, jonka seurauksena metriikka g saa pallokoordinaateissa muodon

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & g_{\varphi\varphi}(r,\varphi) & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

missä $g_{\varphi\varphi}(r, \varphi)$ on $(n-1) \times (n-1)$ -matriisi, joka sisältää metriikan komponentit kulmamuuttujan φ suhteen.

Esimerkki. Avaruuden $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ kanoninen metriikka napakoordinaateissa (r, φ) on

$$g = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Lopuksi esitämme geodeettisen täydellisyyden käsitteen ja tärkeän Hopf-Rinowin täydellisyystuloksen. Monisto on geodeettisesti täydellinen, jos jokaisessa pisteessä $p \in M$ eksponenttikuvaus $\exp_p(v)$ on määritelty kaikilla tangenttivektoreilla $v \in T_pM$. Toisin sanottuna tämä tarkoittaa, että jokainen pisteen p kautta kulkeva geodeesi $\gamma(t)$ on määritelty kaikilla parametrin $t \in \mathbb{R}$ arvoilla.

Lause 2.13 (Hopf-Rinow)**.** *Olkoon M^n Riemannin monisto. Seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitävät*

(i) M on täydellinen metrinen avaruus.
(ii) Suljetut ja rajoitetut osajoukot $S \subset M$ ovat kompakteja.
(iii) M on geodeettisesti täydellinen.

Lisäksi edellä mainituista ominaisuuksista seuraa yksitellen:

(iv) Moniston M mitkä tahansa kaksi pistettä p ja q voidaan yhdistää minimaalisella geodeesilla.

Todistus. Esimerkiksi [Jos11, lause 1.7.1]. □

Hopf-Rinowin lauseesta saamme, että täydellinen monisto M on kompakti, jos sen läpimitta

$$\text{diam}(M) := \sup_{p,q \in M} d(p,q)$$

on rajoitettu.

2.6 Jacobin kentät

Olkoon nyt piste $p \in M$, tangenttivektori $v \in T_pM$ ja oletetaan, että geodeesi $\gamma(t) := \exp_p(tv)$ määritelty ja minimaalinen välillä $t \in [0, \tau]$. Tällöin voimme määritellä geodeesille Jacobin kenttänä tunnetun variaatiokentän, joka kuvaa geodeesin $\gamma(t)$ muutosta toiseksi geodeesiksi. Määritellään variaatiofunktio $v(s) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pM$, jolle pätee $v(0) = v$ ja $v'(0) = w$ jollakin vektorilla $w \in T_pM$. Määrittelemme Jacobin kentäksi $J(t)$ geodeesia $\gamma(t)$ pitkin

$$J(t) := D_{tv} \exp_p(tw) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \exp_p(tv(s)). \tag{2.11}$$

Voidaan näyttää, että tällä tavoin määritellyt Jacobin kentät $J(t)$ toteuttavat Jacobin yhtälön $\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_{\frac{d}{dt}} J(t) + \mathrm{R}(J(t), \dot\gamma(t))\dot\gamma(t) = 0$ geodeesia $\gamma(t)$ pitkin.

Erityisesti monistossa, joiden leikkauskaarevuus on vakio K, voidaan Jacobin kentät kirjoittaa yksinkertaisessa muodossa. Olkoon $w(t)$ paralleeli vektorikenttä geodeesia $\gamma(t)$ pitkin siten, että pätee $w(t) \perp \dot\gamma(t)$ ja $|w(t)| = 1$. Tällöin vektorikenttä

$$J(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}t) w(t), & \text{jos } K > 0 \\ t w(t), & \text{jos } K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t) w(t), & \text{jos } K < 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

on Jacobin kenttä geodeesia $\gamma(t)$ pitkin ja se toteuttaa alkuarvot $J(0) = 0$ ja $J'(0) = w(0)$. Lisäksi voidaan näyttää, että kentälle $J(t)$ pätee $J(t) \perp \dot\gamma(t)$, jos ja vain jos pätee $J(0) \perp \dot\gamma(0)$.

Kattavampaa teoriakatsausta ja todistuksia varten suosittelemme kappaletta 5 viitteessä [Car92].

2.7 Differentiaalioperaattorit

Esittelemme vielä differentiaalioperaattorien määritelmät sileälle funktiolle $f : M \to \mathbb{R}$. Jos X on vektorikenttä, voimme määritellä funktion differentiaalista $df := \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ saatavan ehdon

$$X(f) = df(X) = \langle df^\sharp, X \rangle$$

avulla funktion f gradientiksi

$$\mathrm{grad}\ f = df^\sharp.$$

Paikallisissa koordinaateissa saamme funktion gradientin esitykseksi

$$\mathrm{grad}\ f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Määrittelemme funktion f Hessin tensorin $\mathrm{Hess}\,(f) \in T^2M$ paikallisissa koordinaateissa

$$\mathrm{Hess}\,(f) := \nabla df = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) dx^i \otimes dx^j,$$

mistä saamme sileisiin vektorikenttiin $X, Y \in \Gamma(TM)$ sovellettuna symmetrisen bilineaarimuodon

$$\mathrm{Hess}\,(f)(X,Y) = \langle \nabla_X(\mathrm{grad}\ f),\, Y\rangle\,. \tag{2.13}$$

Funktion f kovariantti Laplace saadaan Hessin tensorin jälkenä

$$\Delta f := \mathrm{tr_g}\,(\mathrm{Hess}\ f), \tag{2.14}$$

jonka voimme esittää yhtälön (2.4) määritelmän perusteella paikallisissa koordinaateissa

$$\Delta f = g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right). \tag{2.15}$$

2.8 Mitta ja integraali Riemannin monistoissa

Affiineissa avaruuksissa kaikki translaatioinvariantit mitat ovat skalaarikerrointa vaille keskenään identtisiä. Yksinkertaisin esimerkki tästä on euklidinen $\mathbb{R}^n$, jossa Lebesguen mitta on vakiokerrointa vaille ainoa translaatioinvariantti mitta. Luonnollisesti valitsemme euklidisessa normaalitapauksessa mitan siten, että yksikkökuution tilavuudeksi saamme yksikön. Samaa periaatetta seuraten määrittelemme suunnistuvassa Riemannin monistossa täysiasteisen differentiaalimuodon ω_g, josta saamme tangenttiavaruudessa ortonormaalin kannan virittämän särmiön tilavuudeksi yksikön. Määrittelemme tämän perusteella *Riemannin tilavuusmuodon*, jonka osoitamme myös yksikäsitteiseksi.

Lause 2.14 (Riemannin tilavuusmuoto)**.** *Olkoon (M^n, g) suunnistettu Riemannin monisto ($n \geq 1$). Tällöin on olemassa yksikäsitteinen n-asteinen differentiaalimuoto ω_g, jolle pätee*

$$\omega_g(E_1, ..., E_n) = 1 \tag{2.16}$$

jokaisella moniston M paikallisesti suunnistetulla ortonormaalilla kehyksellä $(E_1, ..., E_n)$. Tätä differentiaalimuotoa ω_g kutsumme Riemannin tilavuusmuodoksi. Olkoon lisäksi (U, x) sileä kartta monistossa (M, g). Tällöin Riemannin tilavuusmuodolla on paikallinen koordinaattiesitys

$$\omega_g = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge ... \wedge dx^n. \tag{2.17}$$

Kutsumme tilavuusmuodon koordinaattiesityksen kerroinfunktiota *tiheydeksi*. Yhtälössä (2.17) tiheys on $\sqrt{\det(g_{ij})}$.

Todistus. Näytetään ensiksi, että tilavuusmuoto ω_g on yksikäsitteinen, mikäli se on olemassa. Kaikki tilavuusmuodot ovat täysiasteisia eli ne ovat n-differentiaalimuotoja, kun $\dim M = n$. Jos siis $(E_1, ..., E_n)$ on jokin paikallinen suunnistettu ortonormaali kehys avoimessa joukossa $U \subseteq M$ ja (ε^i) siihen liittyvä kotangenttiavaruuden kehys, voimme kirjoittaa joukossa U tilavuusmuodon muodossa $\omega_g = f\varepsilon^i \wedge ... \wedge \varepsilon^n$ jollakin kerroinfunktiolla f. Koska haluamme saada tilavuusmuodon arvoksi jokaisella ortonormaalilla kehyksellä $\omega_g(E_1, ..., E_n) = 1$, saamme tästä kerroinfunktioksi $f \equiv 1$. Näin ollen pätee

$$\omega_g = \varepsilon^1 \wedge ... \wedge \varepsilon^n \tag{2.18}$$

yksikäsitteisesti.

Näyttääksemme muodon ω_g olemassaolon yritämme seuraavaksi määritellä sen siten, että se on riippumaton valitusta ortonormaalista kehyksestä. Olkoon nyt $(\widetilde{E_1}, ...\widetilde{E_n})$ toinen ortonormaali kehys ja $(\widetilde{\varepsilon}^1, ...\widetilde{\varepsilon}^n)$ vastaava kehys kotangenttiavaruudessa. Näitä vastaava tilavuusmuoto on

$$\widetilde{\omega}_g = \widetilde{\varepsilon}^1 \wedge ... \wedge \widetilde{\varepsilon}^n.$$

Tällöin on siis $\widetilde{E_i} = A_i^j E_j$ jollakin muunnosmatriisilla A_i^j, jonka alkiot ovat sileitä funktiota. Koska (E_i) ja $(\widetilde{E_i})$ ovat ortonormaaleja, saamme muunnomatriisin determinantiksi $\det(A_i^j) = \pm 1$. Lisäksi tässä tapauksessa haluamme kehysten olevan yhtenevästi suunnistetut, mikä rajaa pois negatiivisen determinantin mahdollisuuden. Näin ollen

$$\omega_g(\widetilde{E_1}, ..., \widetilde{E_n}) = \det(\varepsilon^j(\widetilde{E_i})) = \det(A_i^j) = 1 = \widetilde{\omega}_g(\widetilde{E_1}, ..., \widetilde{E_n}),$$

eli pätee $\omega_g = \widetilde{\omega}_g$. Jos siis määrittelemme Riemannin tilavuusmuodon yhtälön (2.18) mukaisesti jokaisen pisteen ympäristössä jonkin ortonormaalin kehyksen mukaan, saamme tulokseksi kaikkialla n-differentiaalimuodon, jolle yhtälön (2.16) ehto pätee.

Lopuksi esitämme todistuksen Riemannin tilavuusmuodon paikalliselle koordinaattiesitykselle. Olkoon (U, x) mikä tahansa sileä ja suunnistettu kartta ja $(\partial_{x^1}, ..., \partial_{x^n})$ sitä vastaava tangenttiavaruuden T_pM kanta pisteessä $p \in U \subset M$. Tällöin voimme kirjoittaa tilavuusmuodon näissä koordinaateissa $\omega_g = f(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ jollakin positiivisella funktiolla f. Valitaan lisäksi jokin p:n ympäristössä sileä ortonormaali kehys (E_i) ja sen kotangenttikehys (ε^i). Kirjoitetaan nyt kehys (∂_{x^i}) ortonormaalin kehyksen (E_i) avulla $\partial_{x^i} = A_i^j\ E_j$ jollakin sopivalla muunnosmatriisilla (A_i^j). Koska aiemman perusteella on oltava $\omega_g(E_1, ..., E_n) = 1$, pätee myös

$$\varepsilon^i \wedge ... \wedge \varepsilon^n(A_1^i E_i, ..., A_n^i E_i) = f\, dx^1 \wedge ... \wedge dx^n \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right),$$

josta saamme

$$\begin{aligned} \det(\varepsilon^i A_j^k E_k) &= f(x) \det(dx^i \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ \det(A_j^k) &= f(x). \end{aligned}$$

Toisaalta metriikan komponenteille pätee

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle A_i^k E_k,\, A_j^l E_l \right\rangle \\ &= A_i^k A_j^l \left\langle E_k,\, E_l \right\rangle \\ &= \sum_m^n A_i^m A_j^m = (A^T A)_{ij}. \end{aligned}$$

Näin ollen saamme $\det(g_{ij}) = \det(A^T A) = \det(A)^2$, jolloin pätee $\det(A) = \sqrt{\det(g_{ij})}$, sillä molemmat kehykset (E_i) ja (∂_{x^i}) ovat samoin suunnistetut ja $\det(A)$ on siksi positiivinen. Olemme siis näyttäneet, että paikallisissa koordinaateissa pätee

$$f = \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

□

Määritelmä 2.15. Riemannin moniston M tilavuus saadaan integraalin

$$\mathrm{Vol}(M) := \int_M \omega_g \leq \infty$$

tuloksena.

Riemannin tilavuusmuodosta saamme mille tahansa suunnistuvalle monistolle M^n mitan $dV_M = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 ... dx^n$, missä $dx^1 ... dx^n$ on tavallinen Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Kutsumme tätä usein *Riemannin mitaksi.* Tämän jälkeen voimme määritellä funktion $f : M \to \mathbb{R}$ integraaliksi kartassa (U, x)

$$\int_U f\, \omega_g := \int_{x(U)} f \circ x^{-1} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 ... dx^n.$$

Tällöin myös kysymys joukon U mitallisuudesta palautuu suoraan sen kuvan $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ mitallisuudeksi Lebesguen mitan mielessä. Integraali useamman kartan tai koko moniston yli voidaan konstruoida ykkösen osituksen avulla. Erityisesti moniston tilavuus määritellään tämän avulla seuraavasti: jos $(U_j, x_j, \alpha_j)_{j \in \mathcal{J}}$ on atlas ja siihen sopiva ykkösen ositus, on moniston M tilavuus

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_M \omega_g = \sum_{j \in \mathcal{J}} \int_{x_j(U_j)} \alpha_j \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 ... dx^n$$

Vastaisuudessa merkitsemme Riemannin tilavuusmuotoa pallokoordinaateissa $\omega_g = A(r, \theta) dr \wedge d\Theta$, jossa $A(r, \theta)$ on positiivinen metriikan g mukainen tiheys ja $d\Theta$ $(n-1)$-ulotteisen pallon S^{n-1} kanoninen tilavuusmuoto. Näytämme seuraavaksi funktiolle $A(r, \theta)$ koordinaattiesityksen, jossa hyödynnetään Jacobin kenttiä radiaalista geodeesiä pitkin.

Lause 2.16. *Kiinnitetään piste $p \in M$. Olkoot $J_2, ..., J_n$ lineaarisesti riippumattomat Jacobin kentät pitkin geodeesia $\gamma_v(t) := \exp_p(tv)$, $t \in [0, inj_p(v))$, joille pätee alkuarvot*

$$J_i(0) = 0,$$
$$J_i'(0) \perp \dot{\gamma}(0).$$

Tällöin pisteessä $\gamma_v(r)$ leikkausuran ulkopuolella pätee

$$A(r, v) = \frac{|J_2(r) \wedge ... \wedge J_n(r)|}{|J_2'(0) \wedge ... \wedge J_n'(0)|}.$$

Todistus. Huomataan aluksi, että kenttien $J_i(t)$ lineaarisesta riippumattomuudesta seuraa myös, että $J_i'(0)$ ovat lineaarisesti riippumattomia (esimerkiksi [Car92, korollaari 2.5]), joten lauseke on hyvin määritelty. Kiinnitetään $v \in S_pM$ ja olkoon $v(\varphi)$ $(n-1)$-ulotteisen yksikköpallon tavallinen kulmamuuttujaparametrisointi siten, että $v(0) = v$ ja $\varphi = (\varphi_2, ..., \varphi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Tällöin $(t, \varphi) \mapsto \exp_p(tv(\varphi))$ on radiaalisen geodeesin γ_v sileä variaatio, jolloin variaatiokentät

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \exp_p(tv(\varphi)) = D_{tv} \exp_p(t\partial_{\varphi_i}(v)_{\varphi=0}) = J_i(t)$$

muodostavat Jacobin kentät $J_i(t)$ alkuehdoilla

$$\begin{aligned} J_i(0) =& 0, \\ J_i'(0) =& \frac{\partial v}{\partial \varphi_i}(\varphi_2, ..., \varphi_n)\bigg|_{\varphi=0}. \end{aligned}$$

Toisaalta sama pätee kääntäen: jos muodostamme $n-1$ keskenään lineaarisesti riippumatonta Jacobin kenttää pitkin geodeesia $\gamma_v(t)$, voimme muodostaa niistä eksponenttifunktion avulla koordinaatit $v(\varphi) \in S^{n-1}$, jossa pätee $\frac{\partial v}{\partial \varphi_i} = J_i'(0)$ kaikilla indekseillä i, kun $2 \leq i \leq n$.

Kuvaus $(t, \varphi) \mapsto \exp_p(tv(\varphi))$ määrittää riemannilaisen pallokoordinaatiston pisteessä $\gamma_v(r)$, jos se ei kuulu leikkausuraan C_p. Näissä koordinaateissa saamme leikkausuran ulkopuolella Riemannin tilavuusmuodoksi lauseen 2.14 perusteella

$$\sqrt{\det g_{ij}|_{\exp_p(rv)}}\, dt \wedge d\varphi_1 \wedge ... \wedge d\varphi_n,$$

jossa Gaussin lauseen perusteella pätee $g_{11} = 1$. Lisäksi tiedämme, että pätee $g_{1j} = g_{j1} = 0$ ja $g_{ij} = \langle J_i(t), J_j(t) \rangle$, kun $2 \leq i, j \leq n$. Tällöin saamme

$$\sqrt{\det g_{ij}|_{\exp_p(rv)}} = |J_2(r) \wedge ... \wedge J_n(r)|.$$

Toisaalta pallolla $S(p, 1)$ koordinaattien $v(\varphi)$ suhteen tilavuusmuoto on

$$d\Theta = \sqrt{\det \left(\left\langle \frac{\partial v}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial v}{\partial \varphi_j} \right\rangle_{i,j \geq 2} \right)}\; d\varphi_1 \wedge ... \wedge d\varphi_n,$$

josta saamme pisteessä $\exp_p(v(0))$

$$\begin{aligned} \sqrt{\det \left(\left\langle \frac{\partial v}{\partial \varphi_i}, \frac{\partial v}{\partial \varphi_j} \right\rangle_{i,j \geq 2} \right)} &= \sqrt{\det \left(\left\langle J_i'(0), J_j'(0) \right\rangle_{i,j \geq 2} \right)} \\ &= |J_2'(0) \wedge ... \wedge J_n'(0)|. \end{aligned}$$

Näin olemme saaneet

$$A(r, v)\; dr \wedge d\Theta = \frac{|J_2(r) \wedge ... \wedge J_n(r)|}{|J_2'(0) \wedge ... \wedge J_n'(0)|}\; dr \wedge d\Theta.$$

□

3 Bochnerin-Weitzenböckin lause

Esittelemme tässä kappaleessa Bochnerin-Weitzenbockin lauseen kaavan ja todistamme sen. Weitzenböckin tai Bochnerin-Weitzenböckin lauseen nimellä kulkee useita samantapaisia yhtälöitä, jotka juontavat juurensa Bochnerin tekniikkana tunnettuun menetelmään. Menetelmä sai alkunsa 1940-luvulla Solomon Bochnerin havainnosta, jossa yleistettiin euklidisessa avaruudessa harmoniselle funktiolle u pätevä yhtälö $\frac{1}{2}\Delta \|\text{grad } u\|^2 = |\text{Hess } u|^2$ Riemannin monistoihin, jolloin yhtälöön ilmaantuu mukaan kaarevuustermi [Boc46]. Bochnerin tekniikkaa esitellään tarkemmin esimerkiksi viitteissä [Ber03, kappale 15.6] tai [Pet06, kappale 7].

Todistuksessa noudattelemme viitteessä [Zhu97] esitettyä todistusta, mutta täydennämme sitä joillakin välivaiheilla ja taustatiedoilla. Kohteenamme on täydellinen ja yhtenäinen Riemannin monisto (M^n, g) ja sen konnektio ∇, joka on lauseessa 2.3 määritelty Riemannin konnektio.

Lause 3.1 (Bochner-Weitzenböck)**.** *Olkoon (M, g) täydellinen ja yhtenäinen Riemannin monisto. Tällöin kaikilla funktioilla $f \in C^3(M)$ pätee pisteittäin jokaisessa pisteessä $p \in M$*

$$\frac{1}{2}\,\Delta \|\text{grad } f\|^2 = |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad}\,(\Delta f)\rangle + \text{Ric}\,(\text{grad } f, \text{grad } f), \quad (3.1)$$

missä differentiaalioperaattorit grad , Hess *ja* Δ *ovat kappaleen 2 määritelmien mukaiset gradientti, Hess ja Laplacen operaattori.*

Todistus. Kiinnitetään piste $p \in M$. Olkoon vektorit $E_1, ..., E_n \in T_pM$ siten, että $(E_1, ..., E_n)$ on ortonormaali kehys, jolle pätee pisteessä p

i) $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_i^j$,
ii) $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ kaikilla i, j, ja
iii) (x^i) ovat p-keskeiset normaalikoordinaatit: $x \mapsto \exp_p(x^i E_i)$.

Ensinnäkin normin määritelmän 2.3 mukaan pätee yhtälön (3.1) vasemmalle puolelle

$$\frac{1}{2}\Delta \|\text{grad } f\|^2 = \frac{1}{2}\Delta \langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle .$$

Koska p-keskeisissä normaalikoordinaateissa lauseen 2.11 mukaan pisteessä p pätee $\Gamma_{ij}^k = 0$ sekä $g_{ij} = \delta_j^i$, sievenee Laplacen operaattorin koordinaattiesitys (yhtälö (2.15)) euklidiseen muotoon $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x^i}\partial_{x^i} = \sum_{i=1}^n E_iE_i$. Tällöin voimme kirjoittaa pisteessä p

$$\frac{1}{2}\Delta \langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n E_iE_i \langle \text{grad } f, \text{grad } f\rangle .$$

Riemannin konnektion ja metriikan yhteensopivuudesta ja symmetriasta (lause 2.3) puolestaan saamme:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E_iE_i\left\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E_i\left(\left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right\rangle + \left\langle \operatorname{grad} f, \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f\right\rangle\right)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E_i\left(\left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right\rangle + \left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right\rangle\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i\left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right\rangle,\end{aligned}$$

joka on yhtälön (2.13) määritelmän mukaisesti Hessin tensorin $\operatorname{Hess}(f)$ arvo vektorikentillä:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i\left\langle \nabla_{E_i}\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} E_i\operatorname{Hess}(f)(\operatorname{grad} f, E_i).$$

Koska tensori $\operatorname{Hess}(f)$ on symmetrinen, voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} E_i\operatorname{Hess}(f)(\operatorname{grad} f, E_i) &= \sum_{i=1}^{n} E_i\operatorname{Hess}(f)(E_i, \operatorname{grad} f)\\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i\left\langle \nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), E_i\right\rangle.\end{aligned}$$

Metriikan ja konnektion yhteensopivuuden perusteella voimme viedä vektorikentän E_i metriikan sisään, jolloin saamme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} E_i\left\langle \nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), E_i\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\Big[\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), E_i\right\rangle\\ &\quad + \left\langle \nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), \nabla_{E_i}E_i\right\rangle\Big] \qquad (3.2)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), E_i\right\rangle, \qquad (3.3)\end{aligned}$$

missä yhtälön (3.2) oikean puolen toinen termi häviää, sillä valitsimme kehyksen (E_i) siten, että pätee $\nabla_{E_i}E_i = 0$.

Koska Riemannin kaarevuusendomorfismi on yhtälön (2.6) mukaan muotoa

$$\mathrm{R}(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

voimme termien uudelleenjärjestelemisen jälkeen sijoittaa yhtälön (3.3) oikean puolen summalausekkeeseen

$$\nabla_{E_i}\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f) = \mathrm{R}(E_i, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f + \nabla_{\operatorname{grad} f}\nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f) + \nabla_{[E_i, \operatorname{grad} f]}(\operatorname{grad} f).$$

Tällöin saamme metriikan lineaarisuutta hyödyntämällä yhtälön (3.3) oikeasta puolesta kolme summatermiä

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{\operatorname{grad} f}(\operatorname{grad} f), E_i\right\rangle &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle \mathrm{R}(E_i, \operatorname{grad} f)\operatorname{grad} f, E_i\right\rangle \qquad (\mathrm{S1})\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{\operatorname{grad} f}\nabla_{E_i}(\operatorname{grad} f), E_i\right\rangle \qquad (\mathrm{S2})\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\left\langle \nabla_{[E_i, \operatorname{grad} f]}(\operatorname{grad} f), E_i\right\rangle. \qquad (\mathrm{S3})\end{aligned}$$

Seuraavaksi tarkastelemme saamamme yhtälön oikean puolen summatermejä (S1) – (S3) erikseen.

Ensimmäiseen termiin (S1) voimme sijoittaa suoraan Riemannin kaarevuustensorin (yhtälö (2.7))

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} &\langle \mathrm{R}(E_i, \mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f,\ E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Rm}(E_i,\ \mathrm{grad}\ f,\ \mathrm{grad}\ f,\ E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}_{jklm}\ dx^j(E_i) \otimes\ dx^k(\mathrm{grad}\ f) \otimes dx^l(\mathrm{grad}\ f) \otimes dx^m(E_i),\end{aligned} \tag{3.4}$$

missä jälleen kehyksen (E_i) ortonormaaliuden vuoksi tensoritulon vektori-kovektoriparituksille pätee $dx^j(E_i) = \delta_i^j$. Saamme yhtälöstä (3.4)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{R}(E_i, \mathrm{grad}\ f)\,\mathrm{grad}\ f,\ E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}_{jklm}\ \delta_i^j \delta_i^m\, dx^k(\mathrm{grad}\ f) \otimes dx^l(\mathrm{grad}\ f) \\ &= \mathrm{R}_{jklm}\ \delta_m^j\, dx^k(\mathrm{grad}\ f) \otimes dx^l(\mathrm{grad}\ f),\end{aligned} \tag{3.5}$$

mutta koska pisteessä p pätee $g_{jm} = \delta_m^j$, on yhtälön (3.5) oikea puoli suoraan kaarevuustensorin kontraktio Riccin kaarevuudeksi (yhtälön (2.8) määritelmä):

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{jklm}\ \delta_m^j\, dx^k(\mathrm{grad}\ f) \otimes dx^l(\mathrm{grad}\ f) &= g^{jm}\, \mathrm{R}_{jklm}\ dx^k(\mathrm{grad}\ f) \otimes dx^l(\mathrm{grad}\ f) \\ &= \mathrm{Ric}\,(\mathrm{grad}\ f,\ \mathrm{grad}\ f).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Toinen termi (S2) voidaan kääntää konnektion ja metriikan yhteensopivuuden avulla muotoon

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\mathrm{grad}\ f} \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i\rangle = &\sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}\ f\,\langle \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i\rangle \\ &- \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ \nabla_{\mathrm{grad}\ f} E_i\rangle.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Näistä jälkimmäiset termit $\langle \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ \nabla_{\mathrm{grad}\ f} E_i\rangle$ häviävät, sillä voimme kirjoittaa

$$\nabla_{\mathrm{grad}\ f} E_i = (\mathrm{grad}\ f)^j \nabla_{E_j} E_i,$$

ja kaikilla indekseillä i ja j pätee $\nabla_{E_j} E_i = 0$. Yhtälön (3.7) jäljelle jäävästä termistä saamme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\mathrm{grad}\ f} \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}\ f\,\langle \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i\rangle \\ &= \mathrm{grad}\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i\rangle\right).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Yhtälön (2.13) määritelmän mukaan $\langle \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i \rangle = \mathrm{Hess}\ f(E_i, E_i)$, jolloin saamme yhtälöstä (3.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i \rangle\right) &= \mathrm{grad}\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\ f(E_i, E_i)\right) \\
&= \mathrm{grad}\ f\left(\mathrm{tr}_{\mathrm{g}}\left(\mathrm{Hess}\ f\right)\right) \\
&= \mathrm{grad}\ f(\Delta f) \\
&= \langle \mathrm{grad}\ f,\ \mathrm{grad}\left(\Delta f\right) \rangle, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

sillä määritelmän (2.14) mukaan funktion Laplace on $\Delta f = \mathrm{tr}_{\mathrm{g}}\left(\mathrm{Hess}\ f\right)$.

Kolmas termi (S3) on jälleen määritelmän mukaan Hessin tensorin $\mathrm{Hess}\,(f)$ evaluointi vektorikenttillä $[E_i,\ \mathrm{grad}\ f]$ ja E_i. Konnektion symmetrian (lause 2.3) takia voimme sijoittaa hakatulon paikalle $[E_i,\ \mathrm{grad}\ f] = \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f - \nabla_{\mathrm{grad}\ f} E_i$. Toisaalta kuten myös yhtälön (3.7) tapauksessa termi $\nabla_{\mathrm{grad}\ f} E_i$ häviää, jolloin saamme

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{[E_i,\ \mathrm{grad}\ f]}(\mathrm{grad}\ f),\ E_i \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\ f([E_i,\ \mathrm{grad}\ f], E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\ f(\nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f, E_i).
\end{aligned}$$

Toisaalta voimme yhtälön (2.13) määritelmän perusteella kirjoittaa edellisen yhtälön oikean puolen muodossa

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}\ f(\nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f,\ \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f \rangle. \qquad (3.10)$$

Tarkastellaan nyt lineaarikuvausta $L : T_pM \to T_pM,\ u \mapsto Lu = \nabla_u \mathrm{grad}\ f$, jolloin $\mathrm{Hess}\ f(u, v) = \langle Lu,\ v \rangle$. Tällöin saamme suoraan bilineaarimuodon normin määritelmästä (yhtälö (2.5))

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f,\ \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f \rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle LE_i,\ LE_i \rangle \\
&= \mathrm{tr}\left((\mathrm{Hess}\ r)^2\right) \\
&= |\mathrm{Hess}\ r|^2.
\end{aligned}$$

Näin ollen saamme yhtälöstä (3.10)

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f,\ \nabla_{E_i} \mathrm{grad}\ f \rangle = |\mathrm{Hess}\ f|^2. \qquad (3.11)$$

Yhdistämällä yhtälöiden (3.6), (3.9) ja (3.11) tulokset olemme saaneet todistettua väitteen yhtälön

$$\frac{1}{2} \Delta \left\|\mathrm{grad}\ f\right\|^2 = |\mathrm{Hess}\ f|^2 + \langle \mathrm{grad}\ f,\ \mathrm{grad}\left(\Delta f\right) \rangle + \mathrm{Ric}\left(\mathrm{grad}\ f,\ \mathrm{grad}\ f\right)$$

pisteessä $p \in M$. $\square$

4 Radiaalisen etäisyysfunktion Laplace-vertailu

Käytännön kannalta Bochnerin-Weitzenböckin lauseessa huomionarvoista on funktion f valintaan liittyvä vapaus, sillä ainoa rajoite on kolminkertainen differentioituvuus. Ilmeisiä valintoja ovat esimerkiksi harmoniset funktiot ja Laplacen operaattorin ominaisfunktiot.

Tässä työssä kiinnitämme ensiksi monistosta pisteen $p \in M$ ja sovellamme sitten p-keskeisessä normaaliympäristössä Bocherin-Weitzenböckin lausetta radiaaliseen etäisyysfunktioon $r(x) = d(p, x)$. Radiaalinen etäisyysfunktio on selvästi sileä ja Lipschitz-jatkuva leikkausuran C_p ulkopuolella, joten normaaliympäristössä se toteuttaa edellämainitut sileysvaatimukset. Normaaliympäristö ja etäisyysfunktio $r(x)$ on määritelty lauseessa 2.11.

Tässä kappaleessa johdettavat vertailutulokset perustuvat alarajalle, jonka asetamme moniston M Riccin kaarevuudelle. Seurauksena saamme kolme vertailutulosta moniston M ja yhdesti yhtenäisen vertailuavaruuden M_K välille, missä avaruuden M_K leikkauskaarevuus on kaikkilla vakio K.

Esitämme nyt radiaalisen etäisyysfunktion Laplace-vertailun:

Lause 4.1. *Olkoon (M^n, g) täydellinen monisto, jonka Riccin kaarevuus on alhaalta rajoitettu vakiolla $K \in \mathbb{R}$ siten, että pätee $\mathrm{Ric}\,(M) \geq (n-1)K$, missä K on yhdesti yhtenäisen ja vakiokaarevuuksisen vertailuavaruuden M_K leikkauskaarevuus. Tällöin pisteen p leikkausuran ulkopuolella pätee Laplace-vertailu*

$$\Delta r \leq \Delta_K r,$$

missä $\Delta_K r$ on radiaalisen etäisyysfunktion Laplace vertailuavaruudessa M_K.

Todistus. Kiinnitetään piste $p \in M$ ja olkoon funktio f lauseessa 3.1 radiaalinen etäisyysfunktio $r(x) = d(p, x)$. Leikkausuran C_p ulkopuolella etäisyysfunktion gradientille pätee $|\mathrm{grad}\ r| = 1$, mistä selvästi seuraa

$$\frac{1}{2}\Delta\,|\mathrm{grad}\ r|^2 = 0.$$

Siispä saamme leikkausuran ulkopuolella yhtälöstä (3.1)

$$0 = |\mathrm{Hess}\ r|^2 + \langle \mathrm{grad}\ r,\, \mathrm{grad}\,(\Delta r)\rangle + \mathrm{Ric}\,(\mathrm{grad}\ r,\, \mathrm{grad}\ r)\,,$$

johon voimme sijoittaa $\mathrm{grad}\ r = \frac{\partial}{\partial r}$ ja hyödyntää gradientin määritelmää $\langle \mathrm{grad}\ f,\, X\rangle = X(f)$, jolloin saamme

$$0 = |\mathrm{Hess}\ r|^2 + \frac{\partial}{\partial r}(\Delta r) + \mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right). \tag{4.1}$$

Koska radiaalinen etäisyysfunktio on leikkausuran ulkopuolella kasvava radiaalisissa suunnissa ja $|\mathrm{grad}\ r| = 1$ on vakio, saamme etäisyysfunktion Hessin bilineaarimuodosta radiaaliseen suuntaan

$$0 = \mathrm{Hess}\,(r)\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\, \mathrm{grad}\ r,\, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle.$$

Valitaan nyt ortonormaali kehys $(\partial/\partial r, e_2, ..., e_n)$ siten, että vektorit $e_2, ..., e_n$ ovat Hessin bilineaarimuodon ominaisarvoja $\lambda_2, ..., \lambda_n$ vastaavat ominaisvektorit. Tässä ominaisarvo $\lambda_1 = 0$ on radiaalista suuntaa $\partial/\partial r$ vastaava ominaisvektori. Bilineaarimuodon ortogonaalinen diagonalisointi on mahdollista, sillä tensorin Hess r matriisiesitys on reaalinen ja symmetrinen.

Nyt voimme kirjoittaa yhtälön (4.1) ensimmäisen termin ominaisvektoreiden $e_2, ..., e_n$ muodostamassa kannassa

$$\begin{aligned}|\mathrm{Hess}\,(r)|^2 &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \operatorname{grad} r,\, \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \operatorname{grad} r \right\rangle + \sum_{i=2}^{n} \langle \nabla_{e_i} \operatorname{grad} r,\, \nabla_{e_i} \operatorname{grad} r \rangle \\ &= 0 + \sum_{i=2}^{n} \langle \lambda_i e_i,\, \lambda_i e_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2 \langle e_i,\, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Cauchy-Schwarzin lauseesta saamme arvion

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right)^2 \leq \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2 \quad \sum_{i=2}^{n} 1 = (n-1) \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2,$$

jolloin voimme arvioida yhtälöä (4.2) alaspäin:

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} \lambda_i^2 &\geq \frac{\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\right)^2}{n-1} \qquad (4.3)\\ &= \frac{\left(\mathrm{tr_g}\,(\mathrm{Hess}\ r)\right)^2}{n-1} \\ &= \frac{(\Delta r)^2}{n-1}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi oletamme Riccin kaarevuuden olevan alhaalta rajoitettu siten, että on vakio $K \in \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdon Ric $M \geq (n-1)K$. Sijoitamme tämän kaarevuusehdon sekä edellisen tuloksen $|\mathrm{Hess}\ r|^2 \geq (\Delta r)^2/(n-1)$ takaisin yhtälöön (4.1), jolloin saamme epäyhtälön

$$\frac{(\Delta r)^2}{n-1} + \frac{\partial}{\partial r}(\Delta r) + (n-1)K \leq 0. \tag{4.4}$$

Merkitään nyt $u = \frac{n-1}{\Delta r}$, jolloin pätee myös $u' = -\frac{(n-1)}{(\Delta r)^2}(\Delta r)'$. Tällöin saamme epäyhtälöstä (4.4) differentiaaliepäyhtälön

$$\frac{u'}{1 + Ku^2} \geq 1,$$

jonka ratkaisuksi saamme kolme vaihtoehtoa vakion K arvoilla $K < 0$, $K = 0$ ja $K > 0$:

$$u \geq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \tan(\sqrt{K} r), & \text{kun } K > 0, \\ r, & \text{kun } K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \tanh(\sqrt{-K} r), & \text{kun } K < 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Huomautus: Lähestyttäessä radiaalisesti pistettä p, jolloin radiaalinen etäisyys lähestyy nollaa, saamme etäisyysfunktion Laplacelle raja-arvoksi $\Delta r \to \frac{n-1}{r}$ ja funktiolle $u \to r$. Tämä seuraa normaalikoordinaateista, joissa pisteessä p metriikka on euklidinen eli pätee $g_{ij} = \delta^i_j$ ja Christoffelin symbolit häviävät. Tällöin Laplacen operaattori on euklidinen ja saamme $\Delta r = \operatorname{tr}_g (\operatorname{Hess} r) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} r(x) = \frac{n-1}{r}$.

Sijoittamalla $u = \frac{n-1}{\Delta r}$ takaisin epäyhtälöihin (4.5), saamme epäyhtälöt Laplace-vertailulle:

$$\Delta r \leq \Delta_K r := \begin{cases} (n-1)\sqrt{K} \cot(\sqrt{K} r), & \text{kun } K > 0, \\ \frac{n-1}{r}, & \text{kun } K = 0, \\ (n-1)\sqrt{-K} \coth(\sqrt{-K} r), & \text{kun } K < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Tarkastellaan vielä erikseen yhtäsuuruuden tapaus. Jos pätee $\Delta r = \Delta_K r$, muuttuvat kaikki yllä olevan päättelyn epäyhtälöt yhtälöiksi. Erityisesti ominaisarvojen $\lambda_2, ..., \lambda_n$ epäyhtälö (4.3) muuttuu yhtälöksi, jolloin saamme

$$\lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 = \frac{(\lambda_2 + ... + \lambda_n)^2}{n-1},$$

mistä seuraa, että pätee yhtäsuuruus

$$\lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{n-1} = \lambda_n = C_K.$$

Toisin sanottuna bilineaarimuodon $\operatorname{Hess}(r)$ kaikki nollasta poikkeavat $n-1$ ominaisarvoa ovat tällöin vakiot ja yhtä suuret. Tästä seuraa, että jos yhtäsuuruus $\Delta r = \Delta_K r$ pätee jollakin etäisyydellä $r = \rho_0$, pätee yhtäsuuruus silloin myös kaikilla pienemmillä etäisyyksillä $r \leq \rho_0$. Tällöin kaikille nollasta poikkeaville ominaisarvoille C_K pätee yhtälön (4.6) perusteella

$$C_K = \begin{cases} \sqrt{K} \cot(\sqrt{K} r), & \text{kun } K > 0, \\ \frac{1}{r}, & \text{kun } K = 0, \\ \sqrt{-K} \cot(\sqrt{-K} r), & \text{kun } K < 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Osoitetaan vielä, että tässä tapauksessa moniston leikkauskaarevuus on välttämättä vakio K. Olkoon $(E_2, ..., E_n)$ ominaisarvoihin $\lambda_2, ..., \lambda_n$ liittyvien ominaisvektoreiden muodostama ortonormaali kehys etäisyydellä r. Tällöin pätee

$$\nabla_{E_i} \operatorname{grad} r = \nabla_{E_i} \frac{\partial}{\partial r} = C_K E_i. \tag{4.8}$$

Oletetaan nyt, että pätee $K > 0$. Jatketaan vektorikenttiä E_i pisteen $\gamma(r) = \exp_p(r\partial/\partial r)$ ympäristöön siten, että ne muodostavat pisteen ympäristössä paikallisen koordinaattikehyksen, jolloin toisin sanottuna pätee $[E_i, \partial/\partial r] = 0$. Tällöin saamme leikkauskaarevuudeksi

$$\begin{aligned} K\left(E_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= \mathrm{Rm}\left(E_i, \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}, E_i\right) \\ &= \left\langle \mathrm{R}\left(E_i, \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r},\, E_i\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{E_i}\nabla_{\partial/\partial r}\frac{\partial}{\partial r} - \nabla_{\partial/\partial r}\nabla_{E_i}\frac{\partial}{\partial r} - \nabla_{[E_i,\partial/\partial r]}\frac{\partial}{\partial r},\, E_i\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.9}$$

missä termit $\nabla_{E_i}\nabla_{\partial/\partial r}\frac{\partial}{\partial r}$ ja $\nabla_{[E_i,\partial/\partial r]}\frac{\partial}{\partial r}$ häviävät, sillä radiaaliselle suunnalle pätee $\nabla_{\partial/\partial r}\frac{\partial}{\partial r} = 0$ ja valitsimme kehyksen siten, että hakatulo $[E_i, \partial/\partial r]$ häviää. Yhtälöstä (4.9) jää jäljelle

$$\begin{aligned} K\left(E_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= -\left\langle \nabla_{\partial/\partial r}\nabla_{E_i}\frac{\partial}{\partial r},\, E_i\right\rangle \\ &= -\left\langle \nabla_{\partial/\partial r}C_K E_i,\, E_i\right\rangle, \end{aligned}$$

missä merkitsimme $\nabla_{E_i}\frac{\partial}{\partial r} = C_K E_i$ yhtälön (4.8) perusteella. Koska oletimme kaarevuuden K olevan positiivinen, sijoitamme yhtälöstä (4.7) vastaavan tapauksen ratkaisun edelliseen yhtälöön, jolloin saamme

$$\begin{aligned} K\left(E_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= -\left\langle \nabla_{\partial/\partial r}(\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r))E_i,\, E_i\right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{K}{\sin^2(\sqrt{K}r)}E_i + K\cot(\sqrt{K}r)\nabla_{\partial/\partial r}E_i,\, E_i\right\rangle \\ &= \frac{K}{\sin^2(\sqrt{K}r)} - \sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r)\left\langle \nabla_{\partial/\partial r}E_i,\, E_i\right\rangle \\ &= \frac{K}{\sin^2(\sqrt{K}r)} - \sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r)\left\langle \sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r)E_i,\, E_i\right\rangle \qquad (4.10) \\ &= \frac{K}{\sin^2(\sqrt{K}r)} - K\cot^2(\sqrt{K}r) \\ &= K, \end{aligned}$$

missä hyödynsimme metriikan lineaarisuutta ja kohdassa (4.10) jälleen yhtälöä (4.8). Negatiivinen tapaus $K < 0$ todistetaan samalla menetelmällä, mutta käyttäen yhtälön (4.7) ratkaisua negatiivisille K.

Tapauksessa $K = 0$, jolloin yhtälön (4.7) mukaan pätee $C_K = \frac{1}{r}$, saamme samalla päättelyllä

$$\begin{aligned}K\left(E_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= -\left\langle \nabla_{\partial/\partial r} C_K E_i,\, E_i \right\rangle \\ &= -\left\langle \nabla_{\partial/\partial r} \frac{1}{r} E_i,\, E_i \right\rangle \\ &= -\left\langle -\frac{1}{r^2} E_i + \frac{1}{r} \nabla_{\partial/\partial r} E_i,\, E_i \right\rangle \\ &= \frac{1}{r^2} - \left\langle \frac{1}{r^2} E_i,\, E_i \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

□

Seuraavaksi osoitamme, että radiaalisen etäisyysfunktion Laplacesta saadaan suoraan geodeettisten pallopintojen keskikaarevuus ja suhdetulos pallokoordinaatiston tilavuustiheydelle $A(\theta, r)$. esitämme väitteen:

Lause 4.2. *Olkoon (M^n, g) täydellinen Riemannin monisto ja piste $p \in M^n$. Tällöin pätee*

$$\Delta r = m(r) \qquad \textit{ja} \qquad m(r) = \frac{A'(\theta, r)}{A(\theta, r)},$$

missä $A(\theta, r)$ on tiheys pallokoordinaatiston tilavuusmuodossa $A(\theta, r)\, dr \wedge d\Theta$.

Todistus. Todistamme ensiksi ensimmäisen väitteen. Olkoon $n \in T_pM$ r-säteisen geodeettisen pallon $S(p, r) \subset M^n$ yksikköulkonormaali ja vektorit $E_2, ..., E_n \in T_pM$ siten, että $(n, E_2, ..., E_n)$ on ortonormaali kehys. Laplacen operaattorin määritelmän (yhtälö (2.14)) mukaan tässä kehyksessä pätee

$$\begin{aligned}\Delta r = \operatorname{tr}_{\mathrm{g}} (\operatorname{Hess} r) &= \sum_{i=2}^{n} \operatorname{Hess}(r)(E_i, E_i) + \operatorname{Hess}(r)(n, n) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \langle \nabla_{E_i} \operatorname{grad} r,\, E_i \rangle + \langle \nabla_n \operatorname{grad} r,\, n \rangle .\end{aligned} \tag{4.11}$$

Muistetaan, että Gaussin lauseen (lause 2.12) perustella radiaalisen etäisyysfunktion gradientti on kohtisuorassa geodeettisiin pallopintoihin nähden ja $|\operatorname{grad} r| = 1$, joten pätee yhtäsuuruus $n = \operatorname{grad} r$. Saamme nyt yhtälöstä (4.11)

$$\begin{aligned}\Delta r &= \sum_{i=2}^{n} \langle \nabla_{E_i} n,\, E_i \rangle + \langle \nabla_n n,\, n \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n} \langle \nabla_{E_i} n,\, E_i \rangle \\ &= m(r),\end{aligned}$$

mikä todistaa väitteen $\Delta r = m(r)$, sillä viimeinen yhtälö seuraa suoraan määritelmästä 2.5 ja toisaalta $\operatorname{grad} r = \partial/\partial r$, jolloin $\nabla_n n = \nabla_{\partial/\partial r} \frac{\partial}{\partial r} = 0$ ja termi $\langle \nabla_n n,\, n \rangle$ häviää.

Näytetään seuraavaksi, että yhtälö $m(r) = \frac{A'(r)}{A(r)}$ pätee. Lauseen 2.16 perusteella voimme esittää tilavuustiheyden $A(r,\theta)$ eksplisiittisesti hyödyntämällä Jacobin kenttiä radiaalista geodeesia pitkin.

Olkoot siis piste $p \in M^n$, tangenttivektori $\theta \in S_pM$ ja radiaalinen geodeesi $\gamma : [0, \mathrm{inj}_p) \to M$, $\gamma(t) = \exp_p(t\theta)$. Toisin sanottuna geodeesille γ pätee $\gamma(0) = p$ sekä $\dot{\gamma}(0) = \theta$.

Olkoon lisäksi $(v_2, ..., v_n)$ positiivisesti suunnistettu ortonormaali kanta yksikköpallolla S_pM siten, että $(\dot{\gamma}(0), v_2, ..., v_n)$ on positiivisesti suunnistettu ortonormaali kanta koko tangenttiavaruudessa T_pM.

Muodostamme eksponenttifunktion avulla Jacobin kentät $J_i(t)$ geodeesia $\gamma(t)$ pitkin siten, että kentille pätee $J_i(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ kaikilla $t \in [0, \mathrm{inj}_p)$. Yhtälön (2.11) perusteella määrittelemme siis kentät

$$J_i(t) := D_{t\theta} \exp_p(tv_i),$$

missä $2 \le i \le n$, ja joille pätee alkuarvot

$$J_i(0) = 0$$
$$J_i'(0) = v_i.$$

Näin ollen lauseen 2.16 perusteella saamme

$$A(r,\theta) = |J_2(r) \wedge ... \wedge J_n(r)|,$$

sillä konstruktiossa kanta $(v_2, ..., v_n)$ valittiin ortonormaaliksi ja edelleen pätee $(v_2, ..., v_n) = (J_2'(0), ..., J_n'(0))$.

Merkitään jälleen $A(r,\theta) = A(r)$. Kiinnitetään nyt radiaalinen etäisyys $t = r_0$ pisteestä p ja olkoon $(\dot{\gamma}(r_0), \mathcal{J}_2(r_0), ..., \mathcal{J}_n(r_0)) \subset T_{\gamma(r_0)}M$ ortonormaali kehys pisteessä $\gamma(r_0)$. Kirjoitetaan Jacobin kentät J_i tässä kehyksessä pisteessä $\gamma(r_0)$, jolloin saamme

$$J_i(r_0) = b_i^j \mathcal{J}_j(r_0),$$

missä $b_i^j \in \mathbb{R}$ ovat sopivat kertoimet, sillä kentille J_i ja geodeesin tangenttivektorille yhä pätee $J_i(r_0) \perp \dot{\gamma}(r_0)$. Tällöin voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\frac{A'(r_0)}{A(r_0)} &= \frac{\frac{\partial}{\partial r}|_{r=r_0} |J_2(r) \wedge ... \wedge J_n(r)|}{|J_2(r_0) \wedge ... \wedge J_n(r_0)|} \\
&= \frac{\sum_{i=2}^n |J_2(r_0) \wedge ... \wedge J_i'(r_0) \wedge ... \wedge J_n(r_0)|}{|J_2(r_0) \wedge ... \wedge J_n(r_0)|} \\
&= \frac{\left|\det(b_i^j)\right|}{\left|\det(b_i^j)\right|} \frac{\sum_{i=2}^n |\mathcal{J}_2(r_0) \wedge ... \wedge \mathcal{J}_i'(r_0) \wedge ... \wedge \mathcal{J}_n(r_0)|}{|\mathcal{J}_2(r_0) \wedge ... \wedge \mathcal{J}_n(r_0)|} \\
&= \sum_{i=2}^n |\mathcal{J}_2(r_0) \wedge ... \wedge \mathcal{J}_i'(r_0) \wedge ... \wedge \mathcal{J}_n(r_0)|,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

sillä ortonormaalin konstruktion perusteella $|\mathcal{J}_2(r_0) \wedge ... \wedge \mathcal{J}_n(r_0)| = 1$. Lisäksi koska vektorit $\mathcal{J}_2(r_0), ..., \mathcal{J}_n(r_0)$ ovat keskenään ortonormaalit, voimme kirjoittaa derivaatat $\mathcal{J}_i'$ niiden avulla, sillä pätee

$$\mathcal{J}_i' = \sum_{j=2}^{n} \langle \mathcal{J}_i', \mathcal{J}_j \rangle \mathcal{J}_j.$$

Tällöin saamme yhtälöstä (4.12) kullakin indeksillä i, $2 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned}\left| \mathcal{J}_2 \wedge ... \wedge \sum_{j=2}^{n} \langle \mathcal{J}_i', \mathcal{J}_j \rangle \mathcal{J}_j \wedge ... \wedge \mathcal{J}_n \right| &= \sum_{j=2}^{n} |\langle \mathcal{J}_i', \mathcal{J}_j \rangle| \, |\mathcal{J}_2 \wedge ... \wedge \mathcal{J}_j \wedge ... \wedge \mathcal{J}_n| \\ &= |\langle \mathcal{J}_i', \mathcal{J}_i \rangle| \, |\mathcal{J}_2 \wedge ... \wedge \mathcal{J}_i \wedge ... \wedge \mathcal{J}_n| \qquad (4.13) \\ &= |\langle \mathcal{J}_i', \mathcal{J}_i \rangle| \,,\end{aligned}$$

missä yhtälöön (4.13) saadaan, kun edellisen yhtälön oikean puolen summatermit häviävät kaikilla indekseillä $j \neq i$, sillä lineaarisesti riippuvien vektoreiden kulmatulo häviää. Toisin sanottuna näin käy silloin, kun sama indeksi esiintyy kulmatulossa kahdesti. Näin ollen saamme yhtälöstä (4.12)

$$\frac{A'(r_0)}{A(r_0)} = \sum_{i=2}^{n} |\langle \mathcal{J}_i'(r_0), \mathcal{J}_i(r_0) \rangle| \,. \tag{4.14}$$

Toisaalta myös kentät $\mathcal{J}_i$ ovat etäisyydellä r_0 geodeesin $\gamma(t) = \exp_p(t\theta)$ variaatiokenttiä, jolloin pätee $\mathcal{J}_i(t) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} \exp_p(t\theta + s\delta_i)$ jollakin sopivalla variaatiotermillä $\delta_i \in T_pM$. Tässä tapauksessa saamme

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_i'(r_0) &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=r_0} \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \exp_p(t\theta + s\delta_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=r_0} \exp_p(t\theta + s\delta_i) \\ &= \nabla_{\mathcal{J}_i(r_0)} \dot{\gamma}_\theta,\end{aligned}$$

jonka sijoitamme yhtälöön (4.14). Olettamalla, että olemme valinneet suunnistukset yhtenevästi, voimme jättää itseisarvomerkinnät pois. Näin olemme saaneet

$$\frac{A'(r_0,\theta)}{A(r_0,\theta)} = \sum_{i=2}^{n} \left\langle \nabla_{\mathcal{J}_i(r_0)} \dot{\gamma}_\theta, \mathcal{J}_i(r_0) \right\rangle = \sum_{i=2}^{n} \left\langle \nabla_{\mathcal{J}_i(r_0)} \theta, \mathcal{J}_i(r_0) \right\rangle = m(r_0, \theta),$$

sillä Gaussin lauseen perusteella radiaalinen suunta $\theta = \frac{\partial}{\partial r}$ on kohtisuorassa geodeettisia pallopintoja vasten. $\square$

Lauseesta 4.2 ja Laplace-vertailusta (lause 4.1) seuraa välittömästi Laplace-vertailua vastaavat vertailutulokset geodeettisten pallopintojen keskikaarevuudelle ja radiaalisten tilavuustiheyksien $A(\theta, r)/A_K(r)$ suhteelle.

Korollaari 4.3 (Keskikaarevuusvertailu)**.** *Oletetaan, että lauseen 4.1 ehdot täyttyvät. Tällöin r-säteisen geodeettisen pallon $S(p,r)$ keskikaarevuudelle $m(r)$ pätee vertailu,*

$$m(r) \leq m_K(r),$$

missä $m_K(r)$ on vastaavan geodeettisen pallon keskikaarevuus vertailuavaruudessa M_K.

Korollaari seuraa suoraan Laplace-vertailun tuloksesta ja lauseen 4.2 ensimmäisestä yhtälöstä. Tästä voimme näyttää edelleen monotonisuuden tilavuustiheyksien suhteelle:

Lause 4.4. *Olkoon yksikkövektori $\theta \in S_pM$ valittu radiaalinen suunta, ja oletetaan, että lauseen 4.1 ehdot täyttyvät. Tällöin tiheyksien suhde*

$$\frac{A(\theta,r)}{A_K(r)}$$

ei ole kasvava radiaalista geodeesia $\exp_p(r\theta)$ pitkin.

Todistus. Suunnalla θ ei ole tarkastelussa merkitystä, joten sivuutamme sen ja merkitsemme ainoastaan $A(r) := A(\theta,r)$. Lauseen 4.2 mukaan $m(r) = \frac{A'(r)}{A(r)}$ ja korollaarin 4.3 mukaan $m(r) \leq m_K(r)$, jolloin nämä yhdistämällä saamme ensiksi

$$\frac{A'(r)}{A(r)} = m(r) \leq m_K(r) = \frac{(A_K)'(r)}{A_K(r)}, \tag{4.15}$$

ja josta termejä järjestelemällä saamme epäyhtälön

$$\frac{A'(r)}{(A_K)'(r)} \leq \frac{A(r)}{A_K(r)}.$$

Tästä voimme näyttää, että pätee $\frac{\partial}{\partial r}\frac{A(r)}{A_K(r)} \leq 0$, jolloin väite seuraa. Näytämme tuloksen vastaesimerkin kautta: oletetaan, että pätee $\frac{\partial}{\partial r}\frac{A(r)}{A_K(r)} > 0$. Toisin sanottuna väitämme, että pätee

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{A(r)}{A_K(r)} = \frac{1}{(A_K)^2}\left(A'(r)A_K(r) - A(r)(A_K)'(r)\right) > 0$$
$$A'(r)A_K(r) > A(r)(A_K)'(r),$$

josta saamme suoraan

$$\frac{A'(r)}{(A_K)'(r)} > \frac{A(r)}{A_K(r)},$$

mikä on ristiriitadassa epäyhtälön (4.15) kanssa. Näin ollen pätee $\frac{A(r)}{A_K(r)} \leq 0$, minkä seurauksena saamme alkuperäisen väitteen. $\square$

5 Bishopin-Gromovin tilavuusvertailu ja sen sovelluksista

Edellisessä luvussa näytimme, miten oletuksesta Riccin kaarevuuden alarajaksi voidaan johtaa vertailutulos radiaalisen etäisyysfunktion Laplacelle ja keskikaarevuudelle. Näistä tuloksista johdimme edelleen tuloksen, että moniston M ja vertailuavaruuden M_K tilavuustiheyksien suhde A/A_K on monotonisesti vähenevä pallokoordinatistossa radiaalisen etäisyyden kasvaessa. Intuitiivisesti tämä viittaa siihen, että differentiaalisen tilavuuselementin $A_K dr d\Theta$ mitta kasvaa vertailuavaruudessa M_K etäisyyden r kasvaessa nopeammin kuin monistolla M. Mikäli näin olisi, oletettavasti myös geodeettisten kuulien tilavuus kasvaisi vertailuavaruudessa nopeammin kuin monistolla.

Tässä luvussa tavoitteenamme on johtaa edellisen luvun monotonisuustuloksesta eksplisiittisesti tilavuuksia koskevia vertailutuloksia. Ensiksi näytämme geodeettisia rengasalueita koskevan suhteellisen tilavuusvertailun, jonka erikoistapauksena saamme tunnetun Bishopin-Gromovin epäyhtälön. Tämän seurauksena näemme, että geodeettisten kuulien tilavuus vertailuavaruudessa todellakin kasvaa nopeammin kuin monistolla, kuten jo olemme aavistaneet.

Todistettuamme Bishopin-Gromovin epäyhtälön näytämme sen avulla, että Riemannin mitta on vähintään paikallisesti tuplaava alhaalta rajoitetun Riccin kaarevuuden monistoissa ja globaalisti tuplaava epänegatiivisen Riccin kaarevuuden tapauksessa. Tämän jälkeen todistamme Myersin lauseen ja siihen liittyvän Chengin rigideettituloksen, mutta toteamme, että käytetyillä kaarevuusoletuksilla saamamme metriset tulokset eivät tarjoa tyhjentäviä vastauksia moniston topologiasta.

5.1 Bishopin-Gromovin epäyhtälö

Esitämme aluksi rengasalueiden määritelmän.

Määritelmä 5.1. Olkoon piste $p \in M$ ja r, $R \in \mathbb{R}$ sisä- ja ulkosäteet, joilla pätee $r \leq R$, ja $\Gamma \subset S_pM$ mikä tahansa tangenttiavaruuden yksikköpallon mitallinen osajoukko. Tällöin määrittelemme p-keskeisen rengasalueen (*annulus*)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{r,R}(p) = \{x \in M :\ & r \leq r(x) \leq R, \\ & \text{jossa pisteet } p \text{ ja } x \text{ yhdistävällä minimaalisella geodeesilla } \gamma \\ & \text{pätee } \dot{\gamma}(0) \in S_pM\}\end{aligned}$$

ja rengasalueen Γ-osajoukon eli

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{\Gamma}_{r,R}(p) = \{x \in M :\ & r \leq r(x) \leq R, \\ & \text{jossa pisteet } p \text{ ja } x \text{ yhdistävällä minimaalisella geodeesilla } \gamma \\ & \text{pätee } \dot{\gamma}(0) \in \Gamma\}.\end{aligned}$$

Toisin sanottuna joukko Γ määrittelee kokonaisen rengasalueen $\mathcal{A}_{r,R}(p)$ ne sektorit, jotka muodostavat Γ-osajoukon $\mathcal{A}^{\Gamma}_{r,R}(p) \subset \mathcal{A}_{r,R}(p)$.

Esittämme rengasalueiden suhteellisen tilavuusvertailun:

Lause 5.2 (Suhteellinen tilavuusvertailu)**.** *Olkoot piste $p \in M$ ja $r, R, s, S \in \mathbb{R}$ p-keskeisten rengasalueiden sisä- ja ulkosäteet siten, että pätevät epäyhtälöt $r < R$, $s < S$, $s \leq r$ ja $S \leq R$. Olkoon lisäksi Γ määritelmän 5.1 mukainen yksikköpallon osajoukko sekä $\mathcal{A}^{\Gamma}_{r,R}(p)$, $\mathcal{A}^{\Gamma}_{s,S}(p)$ näitä vastaavat rengasalueiden Γ-osajoukot. Tällöin pätee epäyhtälö*

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{A}^{\Gamma}_{s,S}(p))}{\mathrm{Vol}(\mathcal{A}^{\Gamma}_{r,R}(p))} \geq \frac{\mathrm{Vol}_K(\mathcal{A}^{\Gamma}_{s,S})}{\mathrm{Vol}_K(\mathcal{A}^{\Gamma}_{r,R})},$$

missä yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos leikkauskaarevuus joukoissa $\mathcal{A}^{\Gamma}_{s,S}(p)$ ja $\mathcal{A}^{\Gamma}_{r,R}(p)$ on kaikkialla vakio K.

Lauseen todistuksessa käytämme apuna Gromovin lemmaa [Gro99]:

Lemma 5.3. *Olkoot $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ ja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ kaksi positiivista ja mitallista funktiota. Jos osamäärä f/g ei ole kasvava, niin tällöin kaikilla $R > r > 0$, $S > s > 0$ ja $r \geq s$, $R \geq S$ pätee epäyhtälö*

$$\frac{\int_r^R f(t)\,dt}{\int_s^S f(t)\,dt} \leq \frac{\int_r^R g(t)\,dt}{\int_s^S g(t)\,dt}.$$

Todistus. Olkoot funktiot $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ siten, että osamäärä f/g ei ole kasvava, ja määritellään apufunktio $H(x, y) := \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{\int_x^y g(t)\,dt}$. Näytetään, että apufunktion osittaisderivaatoille pätee $\frac{\partial H}{\partial x} \leq 0$ ja $\frac{\partial H}{\partial y} \leq 0$. Suoraviivaisella derivoinnilla saamme osittaisderivaataksi muuttujan y suhteen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{(\int_x^y g(t)\,dt)^2}\left(f(y)\int_x^y g\,dt - g(y)\int_x^y f(t)\,dt\right) \\
&= \frac{g(y)\int_x^y g(t)\,dt}{(\int_x^y g(t)\,dt)^2}\left(\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{\int_x^y g(t)\,dt}\right).
\end{aligned}$$

Koska osamäärä f/g ei ole kasvava, pätee $\frac{f(y)}{g(y)} \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{f(x)}{g(x)}$ silloin, kun pätee $x \leq t \leq y$, jolloin voimme päätellä

$$\begin{aligned}
\int_x^y f(t)\,dt &= \int_x^y \frac{f(t)}{g(t)} g(t)\,dt \\
&\geq \int_x^y \frac{f(y)}{g(y)} g(t)\,dt \\
&= \frac{f(y)}{g(y)}\int_x^y g(t)\,dt,
\end{aligned}$$

ja josta saamme epäyhtälön ylöspäin (yhä pätee $x \leq t \leq y$)

$$\frac{\int_x^y f(t)\,dt}{\int_x^y g(t)\,dt} \geq \frac{f(y)}{g(y)}. \tag{5.1}$$

Samoin voimme näyttää myös, että pätee

$$\begin{aligned}\int_x^y f(t)\,dt &= \int_x^y \frac{f(t)}{g(t)} g(t)\,dt \\ &\leq \int_x^y \frac{f(x)}{g(x)} g(t)\,dt \\ &= \frac{f(x)}{g(x)} \int_x^y g(t)\,dt,\end{aligned}$$

josta vuorostaan seuraa epäyhtälö alaspäin:

$$\frac{\int_x^y f(t)\,dt}{\int_x^y g(t)\,dt} \leq \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{5.2}$$

Täten saamme osittaisderivaataksi

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{g(y)\int_x^y g(t)\,dt}{(\int_x^y g(t)\,dt)^2}\left(\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{\int_x^y g(t)\,dt}\right) \leq 0,$$

sillä termi $\frac{g(y)\int_x^y g(t)\,dt}{(\int_x^y g(t)\,dt)^2}$ on epänegatiivinen ja epäyhtälön (5.1) perusteella pätee $\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{\int_x^y f(t)\,dt}{\int_x^y g(t)\,dt} \leq 0$.

Likimain samalla päättelyllä ja epäyhtälöä (5.2) käyttämällä saamme saman tuloksen osittaisderivaatalle $\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{1}{(\int_x^y g(t)\,dt)^2}\left(g(x)\int_x^y f(t)\,dt - f(x)\int_x^y g(t)\,dt\right) \\ &= \frac{g(x)\int_x^y g(t)\,dt}{(\int_x^y g(t)\,dt)^2}\left(\frac{\int_x^y f(t)\,dt}{\int_x^y g(t)\,dt} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

□

Nyt olemme valmiita esittämään todistuksen suhteelliselle tilavuusvertailulle (lause 5.2):

Todistus. Näytämme, että osamäärä

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathcal{A}_{x,y}^{\Gamma})}{\mathrm{Vol}_K(\mathcal{A}_{x,y}^{\Gamma})}$$

ei ole kasvava. Notaation yksinkertaistamiseksi jätämme merkitsemättä, että rengasalueet ovat p-keskeisiä, joten kirjoitamme vain $\mathcal{A}_{x,y}^{\Gamma} = \mathcal{A}_{x,y}^{\Gamma}(p)$.

Saamme rengasalueen $\mathcal{A}_{x,y}^{\Gamma}$ tilavuuden integroimalla tiheyttä $A(r)$ joukossa, jossa eksponenttifunktio $\exp_p$ on injektiivinen:

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{A}_{x,y}^{\Gamma}) := \int_{\Gamma}\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(\omega, r)\,dr\,d\omega, \tag{5.3}$$

missä pätee $x < y$ ja $\mathrm{inj}_p(\omega)$ on injektiivisyyssäde suuntaan $\omega \in S_pM$.

Integroimisrajojen huolellisella valinnalla varmistamme, ettei mahdollinen leikkausura aiheuta ongelmia. Ylärajan $\min\{y, \mathrm{inj}_p(\omega)\}$ valinnalla varmistamme, että pysymme leikkausuran ulkopuolella. Tällöin integroimme kussakin suunnassa enintään niin kauas, että kulkemamme radiaalinen geodeesi on minimaalinen. Mikäli leikkausura ylitettäisiin, päädyttäisiin integroimaan kahdesti rengasalueen jonkin osajoukon yli. Alarajan $\min\{x, \mathrm{inj}_p(\omega)\}$ valinnalla varmistamme, että valituilla rajoilla on ensinnäkään mitään integroitavaa leikkausuraa ylittämättä. Jos pätee $\min\{x, \mathrm{inj}_p(\omega)\} = \mathrm{inj}_p(\omega)$, niin pätee tietysti $\min\{y, \mathrm{inj}_p(\omega)\} = \mathrm{inj}_p(\omega)$ ja häviää integraali kokonaan, mikä on toki myös hyvin määritelty tulos.

Koska korollaarin 4.4 perusteella tiheyksien suhde $A(r)/A_K(r)$ ei ole kasvava radiaalisia geodeeseja pitkin ja olemme valinneet rajat siten, että leikkausurasta ei tarvitse huolehtia, saamme lemman 5.3 nojalla epäyhtälön

$$\frac{\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr}{\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr} \geq \frac{\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(r)\,dr}{\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(r)\,dr},$$

kun pätee $z \geq y > x$. Tästä saamme termejä järjestelemällä ja muokkaamalla vertailuavaruuden tiheyden A_K integraalia

$$\begin{aligned}\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(r)\,dr &\geq \frac{\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr}{\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr} \int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(r)\,dr \\ &\geq \frac{\int_{x}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr}{\int_{x}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr} \int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(r)\,dr, \end{aligned} \tag{5.4}$$

sillä haluamme tarkastella vain mielekästä tapausta $x < \mathrm{inj}_p(\omega)$, sillä kuten yhtälön (5.3) käsittelyssä todettiin, jos alarajalla pätee $\mathrm{inj}_p(\omega) < x$, häviää integraali ja epäyhtälö pelkistyy tautologiaksi $0 \geq 0$.

Käsitellään seuraavaksi epäyhtälön (5.4) termin

$$\frac{\int_{x}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr}{\int_{x}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr}$$

integraalien ylärajoja. Arvioidaksemme tätä alaspäin, saamme ylärajalle kolme eri tapausta, jotka käsittelemme erikseen.

i) Oletetaan, että pätee $\mathrm{inj}_p(\omega) \leq y \leq z$. Tällöin saamme integraalin monotonisuuden nojalla

$$1 = \frac{\int_{x}^{\mathrm{inj}_p(\omega)} A_K(r)\,dr}{\int_{x}^{\mathrm{inj}_p(\omega)} A_K(r)\,dr} \geq \frac{\int_{x}^{y} A_K(r)\,dr}{\int_{x}^{z} A_K(r)\,dr},$$

koska $[x, \mathrm{inj}_p(\omega)] \subseteq [x, z]$ ja tiheys A_K on positiivinen funktio.

ii) Tapauksessa $y \leq \mathrm{inj}_p(\omega) \leq z$ pätee

$$\frac{\int_x^y A_K(r)\,dr}{\int_x^{\mathrm{inj}_p(\omega)} A_K(r)\,dr} \geq \frac{\int_x^y A_K(r)\,dr}{\int_x^z A_K(r)\,dr},$$

sillä edelleen $[x, \mathrm{inj}_p(\omega)] \subseteq [x, z]$ ja voimme hyödyntää integraalin monotonisuutta.

iii) Sen sijaan jos pätee $y \leq z \leq \mathrm{inj}_p(\omega)$, saamme suoraan yhtälön

$$\frac{\int_x^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr}{\int_x^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr} = \frac{\int_x^y A_K(r)\,dr}{\int_x^z A_K(r)\,dr}.$$

Voimme siis kaikissa kolmessa tapauksessa arvioida ylärajan suhteen

$$\frac{\int_x^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr}{\int_x^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A_K(r)\,dr} \geq \frac{\int_x^y A_K(r)\,dr}{\int_x^z A_K(r)\,dr},$$

joten sijoittaessamme tämän epäyhtälöön (5.4) saamme

$$\int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{y,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(r)\,dr \geq \frac{\int_x^y A_K(r)\,dr}{\int_x^z A_K(r)\,dr} \int_{\min\{x,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}}^{\min\{z,\,\mathrm{inj}_p(\omega)\}} A(r)\,dr. \tag{5.5}$$

Kun epäyhtälö (5.5) integroidaan puolittain joukon Γ yli, saamme

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{A}^\Gamma_{x,y}) \geq \frac{\int_x^y A_K(r)\,dr}{\int_x^z A_K(r)\,dr} \mathrm{Vol}(\mathcal{A}^\Gamma_{x,z}) = \frac{\mathrm{Vol}_K(\mathcal{A}^\Gamma_{x,y})}{\mathrm{Vol}_K(\mathcal{A}^\Gamma_{x,z})} \mathrm{Vol}(\mathcal{A}^\Gamma_{x,z}),$$

ja väite seuraa. □

Jos valitaan $x = 0$, $y = r$ sekä $z = R > r$, suuntajoukoksi koko yksikkötangenttipallo, $\Gamma = S_pM$ ja $p \in M$ on mielivaltainen piste, saamme suhteellisen tilavuusvertailun suorana sovelluksena Bishopin-Gromovin epäyhtälönä tunnetun tuloksen:

Lause 5.4 (Bishopin-Gromovin epäyhtälö)**.** *Funktio*

$$\phi(R) := \frac{\mathrm{Vol}(B(p,R))}{\mathrm{Vol}_K(B(R))}$$

ei ole kasvava välillä $(0, \infty)$ *ja sen raja-arvolle pätee*

$$\lim_{R \to 0} \phi(R) = 1.$$

Erityisesti pätee Bishopin epäyhtälö

$$\mathrm{Vol}(B(p,R)) \leq \mathrm{Vol}_K(B(R)).$$

Yhtäsuuruus pätee, jos ja vain jos kuulat $B(p,R) \subset M$ *ja* $B(R) \subset M_K$ *ovat isometrisia.*

Todistus. Lauseesta 5.2 seuraa suoraan epäyhtälö

$$\phi(R) = \frac{\mathrm{Vol}(B(p,R))}{\mathrm{Vol}_K(B(R))} \leq \frac{\mathrm{Vol}(B(p,r))}{\mathrm{Vol}_K(B(r))},$$

kun valitaan suuntajoukoksi $\Gamma = S_pM$, sisäsäteiksi nolla ja ulkosäteet $R > r$, mikä implikoi funktion monotonisuuden. Säteen lähestyessä nollaa geodeettiset kuulat alkavat yhä enemmän muistuttaa euklidisia kuulia, mistä voi päätellä raja-arvon $\lim_{R\to 0} \phi(R) = 1$. $\square$

Lauseen on nykymuodossaan todistanut Gromov [Gro99] vuonna 1981 Bishopin varhaisemman tuloksen [Bis63] pohjalta.

Bishop-Gromovin epäyhtälön vahvuus on sen globaalissa luonteessa. Aiemmassa Bishopin epäyhtälössä tarkastelu oli rajoitettu kuuliin, joiden säde on pienempi kuin moniston injektiivisyyssäde. Lopputuloksena olemme saaneet Riccin kaarevuuden alarajasta johdetun vahvan globaalin metrisen tuloksen joutumatta asettamaan ehtoja paikallisille injektiivisyyssäteille.

5.2 Mitan tuplaavuus ja peitelauseet: lokaalista globaaliin analyysiin

Käyttämällä Bishopin-Gromovin epäyhtälöä voimme johtaa metristen avaruuksien yleisiä tuplaavuusominaisuuksia sellaisille monistoille, joiden Riccin kaarevuus on sopivasti alhaalta rajoitettu. Kertaamme ensiksi tuplaavan mitan yleisen määritelmän:

Määritelmä 5.5 (Tuplaava mitta)**.** Metrisen avaruuden (X, d) epätriviaali mitta μ on *globaalisti tuplaava*, jos on olemassa ainoastaan mitasta μ riippuva tuplaavuusvakio $C_X \geq 1$ siten, että epäyhtälö

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_X \mu(B(x,r))$$

pätee samankeskisillä kuulilla kaikilla keskipisteillä $x \in X$ ja säteillä $r > 0$.

Erityisesti epänegatiivisen Riccin kaarevuuden $\mathrm{Ric} \geq 0$ tapauksessa, jolloin voimme valita vertailuavaruudeksi euklidisen avaruuden kaarevuudella $K = 0$, saamme Bishopin-Gromovin epäyhtälöstä

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,2R))}{\mathrm{Vol}(B(p,R))} \leq \frac{V^n(2R)^n}{V^n R^n} = 2^n, \tag{5.6}$$

missä V^n on n-ulotteisen yksikkökuulan euklidinen tilavuus. Muotoilemme tästä lauseen:

Lause 5.6. *Olkoon (M^n, g) Riemannin monisto, jonka Riccin kaarevuus on epänegatiivinen. Tällöin Riemannin mitta on monistossa M^n globaalisti tuplaava vakiolla $C_M = 2^n$.*

Yksinkertaisella peiteargumentilla voimme osoittaa ilmeisen tuloksen, jonka mukaan M^n on tuplaava myös metrisenä avaruutena (M^n, d), jos Riccin kaarevuus on epänegatiivinen. Määritelmän mukaan metrinen avaruus on tuplaava, jos on olemassa vakio $N \in \mathbb{N}$ siten, että mikä tahansa kuula $B(x,r)$ voidaan peittää enintään N kappaleella kuulia $B(x_i, r/2)$. Toisin sanottuna pätee $B(x,r) \ \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r/2)$ jollakin sopivalla joukolla pisteitä $\{x_1, ..., x_N\} \subset B(x,r)$.

Tapauksessa Ric ≥ 0 voimme näyttää avaruuden tuplaavuuden valitsemalla kuulan $B(p, 2R)$ ja mahdollisimman suuren kokoelman $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...\}$ pareittain pistevieraita avoimia kuulia $B_i = B(x_i, R/2)$, joille pätee $B_i \subset B(p, 2R)$. Tällöin kaksinkertaiseksi venytetyt kuulat $B(x_i, R)$ peittävät kuulan $B(p, 2R)$: jos näin ei olisi, olisi olemassa piste $x' \in B(p, 2R)$ siten, että pätisi $d(x', x_i) \geq R$ kaikkien kuulien $B_i \in \mathcal{B}$ keskipisteille x_i. Toisaalta voimme tässä tapauksessa lisätä kuulan $B(x', R/2)$ kokoelmaan $\mathcal{B}$, sillä se on pistevieras kokoelman kaikkien muiden kuulien kanssa, koska pätee $d(x', B_i) \geq \frac{R}{2}$. Näin jatkamalla voimme täydentää kokoelman $\mathcal{B}$ sellaiseksi, että pätee $B(p, 2R) \subset \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}} 2B_i$. Toisaalta mitan tuplaavuudesta saamme, että kuulaan $B(p, 2R)$ mahtuu enintään

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p, 2R)}{\mathrm{Vol}(B(p, \frac{R}{2}))} \leq \frac{V^n(2R)^n}{V^n\left(\frac{R}{2}\right)^n} = 4^n$$

kappaletta $R/2$-säteisiä kuulia. Toisin sanottuna mikä tahansa $2R$-säteinen kuula voidaan peittää 4^n kappaleella R-säteisiä kuulia, mistä seuraa, että monisto M on tuplaava metrisenä avaruutena, kun pätee Ric $(M) \geq 0$.

Saamme siis epänegatiivisen Riccin kaarevuuden tapauksessa helposti globaalin tuplaavuustuloksen. Yhtä helposti voimme myös näyttää, että jos Riccin kaarevuudelle ei päde Ric $(M) \geq 0$, emme voi taata globaalia tuplaavuutta pelkällä kaarevuusoletukselle.

Yksinkertaisin vastaesimerkki on hyperbolinen taso $\mathbb{H}^2$, jonka leikkauskaarevuus on vakio $K \equiv -1$. Tiedämme yhtälön (2.12) perusteella, että vakiokaarevuuden $K < 0$ tapauksessa normaalit Jacobin kentät geodeesia γ pitkin ovat muotoa

$$J(t) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}t)E(t),$$

missä $E(t)$ on paralleeli ja geodeesin nopeusvektoriin nähden ortogonaalinen vektorikenttä geodeesia pitkin. Tällöin saamme lauseen 2.16 mukaan r-säteisen kuulan tilavuudeksi hyperbolisessa tasossa

$$\mathrm{Vol}_{-1}(B(r)) = s_1 \int_0^r \sinh(t)\, dt = s_1 \left(\cosh(r) - 1\right),$$

missä s_{n-1} on $(n-1)$-ulotteisen yksikköpallon pinta-ala. Tämän perusteella saamme tilavuuksien suhteeksi

$$\frac{\mathrm{Vol}_{-1}(B(2r))}{\mathrm{Vol}_{-1}(B(r))} = \frac{\cosh(2r) - 1}{\cosh(r) - 1} = 2(\cosh(r) + 1),$$

mikä ei selvästikään ole määritelmän 5.5 mukainen tuplaavuusvakio, vaan eksponentiaalisesti kasvava säteen r funktio. Riemannin mitta hyperbolisessa tasossa $\mathbb{H}^2$ ei siis ole tuplaava.

Voimme kuitenkin johtaa arvion r-säteisen kuulan tilavuudelle yhdesti yhtenäisessä n-ulotteisessa hyperbolisessa avaruudessa, jonka vakiokaarevuus on $K < 0$. Koska selkeästi kaikilla $r \geq 0$ pätee epäyhtälö $r \leq \sinh(r) \leq re^r$, voimme tämän perusteella arvioida kaikilla vakiokaarevuuksilla $K < 0$

$$s_{n-1}r^n \leq \mathrm{Vol}_K(B(x,r)) \leq s_{n-1}r^n e^{(n-1)\sqrt{-K}r}. \tag{5.7}$$

Globaalin tuplaavuden sijaan voimme näyttää epäyhtälön (5.7) avulla niin kutsutun *paikallisen tuplaavuusehdon* pätevän kaikissa alhaalta rajoitetun Riccin kaarevuuden monistoissa. Näytämme seuraavan lauseen:

Lause 5.7. *Olkoon M^n täydellinen Riemannin monisto, jonka Riccin kaarevuus toteuttaa ehdon $\mathrm{Ric} \geq (n-1)K$ jollakin vakiolla $K \in \mathbb{R}$. Tällöin Riemann in mitta on monistossa M paikallisesti tuplaava vakiolla $C(n,K,R) = 2^n \exp((n-1)\sqrt{|K|}R)$. Toisin sanottuna kaikille kuulille $B(p,r)$, joiden säteelle pätee $2r \leq R$, on voimassa epäyhtälö*

$$\mathrm{Vol}\, B(p,2r) \leq 2^n e^{(n-1)\sqrt{|K|}R}\, \mathrm{Vol}\, B(p,r).$$

Lisäksi jos pätee $K \geq 0$, niin epäyhtälö (5.6) on voimassa, jolloin Riemannin mitta on monistossa M^n globaalisti tuplaava tuplaavuusvakiolla $C_E = 2^n$.

Todistus. Epäyhtälöstä (5.7) ja Bishopin-Gromovin epäyhtälöstä saadaan suoraan

$$\frac{\mathrm{Vol}\, B(p,2r)}{\mathrm{Vol}\, B(p,r)} \leq \frac{\mathrm{Vol}_K\, B(2r)}{\mathrm{Vol}_K\, B(r)} \leq \frac{s_{n-1}(2r)^n e^{2(n-1)\sqrt{|K|}r}}{s_{n-1}r^n} = 2^n e^{2(n-1)\sqrt{|K|}r}.$$

Koska kuulan säteelle pätee ehto $2r \leq R$, niin $e^{2(n-1)\sqrt{|K|}r} \leq e^{(n-1)\sqrt{|K|}R}$ ja väite seuraa. □

Paikallisen tuplaavuuden voi helposti yleistää myös muotoon

$$\mathrm{Vol}\, B(p,R) \leq e^{(n-1)\sqrt{|K|}R} \left(\frac{R}{r}\right)^n \mathrm{Vol}\, B(p,r), \tag{5.8}$$

soveltamalla edellistä todistusta suoraan kuuliin $B(p,r)$ ja $B(p,R)$, kun säteille pätee $r \leq R$.

Kysymys tuplaavuudesta on luonnollisesti mielenkiintoinen lähinnä avoimien monistojen tapauksessa. Kompakteissa monistoissa läpimitta $\mathrm{diam}(M)$ on aina rajoitettu, joten paikallisen tuplaavuuden maksimisäteeksi voidaan valita $R = \mathrm{diam}(M)$, jolloin tulokseksi saadaan globaali tuplaavuus.

Bishopin-Gromovin tilavuusvertailun avulla voidaan monistolle konstruoida erilaisia globaaleja tai paikallisia peitteitä, jotka ovat tärkeitä työkaluja siirryttäessä paikallisista tuloksista globaaliin analyysiin. Näytämme tässä globaalin peitelauseen, jossa konstruoimme avoimista kuulaympäristöistä koko monistolle M avoimen peitteen, joka on paikallisesti äärellinen, ja jonka kuulat ovat sopivasti pienennettyinä pistevieraita. Seuraava lause on variaatio Hebeyn [Heb00] esittämästä peitelauseesta.

Lause 5.8. *Olkoon* (M^n, g) *täydellinen Riemannin monisto, jonka Riccin kaarevuudelle pätee* $\operatorname{Ric}(M) \geq (n-1)K$ *jollakin vakiolla* $K \in \mathbb{R}$*, ja olkoon* $\rho > 0$*. Tällöin on olemassa joukko* $\{p_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ *moniston* M *pisteitä siten, että kuulien kokoelma* $\{B(p_j, r)\}_{j\in\mathcal{J}}$ *on kaikilla* $r \geq \rho$ *paikallisesti äärellinen avoin peite monistolle* M *ja kaikki kuulat* $B(p_i, \frac{\rho}{2})$ *ovat pareittain pistevieraita. Lisäksi peitteen kerrannaisuus on kussakin pisteessä enintään* $C = C(n, r, K, \rho)$*: jokainen piste kuuluu enintään* C *kappaleeseen peitteen kuulia* $B(p_j, r)$*.*

Todistus. Muodostetaan kokoelma X_ρ kaikista mahdollisista numeroituvista jonoista moniston M pisteitä siten, että jonon pisteet ovat toisistaan vähintään etäisyydellä ρ:

$$X_\rho = \{(p_i)_\mathcal{I} : p_i \in M \ \text{ siten, että kukin jono } \mathcal{I} \text{ on numeroituva ja jonon pisteille pätee } d(p_i, p_j) \geq \rho \text{ kun } i \neq j\}.$$

Tällöin perhe X_ρ on osittain järjestetty sisältyvyyden suhteen ja sen jokaisella täydellisesti järjestetyllä osajoukolla on yläraja. Tällöin Zornin lemman perusteella X_ρ sisältää maksimaalisen elementin, jota merkitsemme $(p_i)_\mathcal{M}$.

Konstruktion perusteella kuulat $B(p_i, \rho/2)$ ja $B(p_j, \rho/2)$ ovat pistevieraita, kun p_i ja p_j ovat saman jonon kaksi eri pistettä. Maksimaalisuudesta puolestaan seuraa, että joukko $\{B(p, r) : p \in (p_i)_\mathcal{M}\}$ on avoin peite, kun $r \geq \rho$, sillä muutoin olisi olemassa piste $p' \in M$ siten, että etäisyydelle pätisi $d(p', p) \geq \rho$ kaikilla pisteillä $p \in (p_i)_\mathcal{M}$, jolloin jono ei olisi maksimaalinen.

Näytämme seuraavaksi, että jokainen piste kuuluu vain äärelliseen määrään peitteen kuulia $B(p_i, r)$, missä $p_i \in (p_i)_\mathcal{M}$. Kiinnitetään piste $x \in M$ ja säde $r \geq \rho$. Olkoon nyt

$$\mathcal{I}_r(x) = \{p_j \in (p_i)_\mathcal{M} : x \in B(p_j, r)\}$$

keskipisteiden joukko niistä r-säteisistä kuulista, jotka sisältävät valitun pisteen x. Tämän joukon koko on tarkalleen peitteen kerrannaisuus pisteessä x. Kun valitsemme säteeksi $r \geq \rho$, saamme paikallisesta tuplaavuudesta (lause 5.7) arvion

$$\operatorname{Vol} B(x, r) \geq \frac{1}{2^n} e^{-(n-1)\sqrt{|K|}2r} \operatorname{Vol} B(x, 2r).$$

Kolmioepäyhtälön perusteella kuulien yhdiste $\cup_{i\in\mathcal{I}_r(x)} B(p_i, \rho/2)$ sisältyy joukkoon $B(x, 2r)$, ja koska kaikki kuulat $B(p_i, \rho/2)$ ovat pareittain pistevieraita, saamme edellisestä epäyhtälöstä mitan monotonisuuden ja additiivisuuden perusteella

$$\operatorname{Vol} B(x, r) \geq \frac{1}{2^n} e^{-(n-1)\sqrt{|K|}2r} \sum_{i\in\mathcal{I}_r(x)} \operatorname{Vol} B(p_i, \rho/2). \tag{5.9}$$

Toisaalta epäyhtälön (5.8) mukaan pätee myös

$$\operatorname{Vol} B(p_i, \rho/2) \geq \left(\frac{\rho}{4r}\right)^n e^{-(n-1)\sqrt{|K|}2r} \operatorname{Vol} B(p_i, 2r),$$

sillä pätee $\rho/2 < 2r$. Kun sijoitamme tämän tuloksen epäyhtälön (5.9) oikealle puolelle, saamme

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol} B(x,r) &\geq \frac{1}{2^n} e^{-(n-1)\sqrt{|K|}2r} \sum_{i\in\mathcal{I}_r(x)} \left(\frac{\rho}{4r}\right)^n e^{-(n-1)\sqrt{|K|}2r} \operatorname{Vol} B(p_i,2r) \\ &= \left(\frac{\rho}{8r}\right)^n e^{-(n-1)\sqrt{|K|}4r} \sum_{i\in\mathcal{I}_r(x)} \operatorname{Vol} B(p_i,2r) \\ &\geq \left(\frac{\rho}{8r}\right)^n e^{-(n-1)\sqrt{|K|}4r} \, |\mathcal{I}_r(x)| \operatorname{Vol} B(x,r),\end{aligned}$$

missä $|\mathcal{I}_r(x)|$ on joukon $\mathcal{I}_r(x)$ mahtavuus. Viimeisen epäyhtälön muodostamiseksi käytimme jälleen sisältyvyyttä $B(x,r) \subset B(p_i,2r)$ ja mitan monotonisuutta. Saamme täten pisteessä x peitteen kerrannaisuuden ylärajaksi

$$|\mathcal{I}_r(x)| \leq \left(\frac{8r}{\rho}\right)^n e^{4(n-1)\sqrt{|K|}r} = C(n,r,K,\rho)$$

millä tahansa pisteellä $x \in M$. Tästä voimme päätellä myös, että kuulalla $B(x,r)$ on epätyhjä leikkaus peitteen kuulista enintään $C(n,2r,K,\rho)$ kappaleen kanssa. □

Lause 5.8 on globaali variaatio Gromovin pakkauslemmasta:

Lause 5.9 (Gromovin pakkauslemma, [Gro99])**.** *Olkoon (M^n,g) täydellinen Riemannin monisto, jonka Riccin kaarevuudelle pätee* $\operatorname{Ric}(M) \geq (n-1)K$*, ja olkoon vakiot $r, \varepsilon > 0$ sekä piste $x \in M$. Tällöin on olemassa kuulan $B(x,r)$ peite, joka koostuu kuulista $B(p_i,\varepsilon)$, joiden keskipisteille pätee $p_i \in B(x,r)$. Kuulien $B(p_i,\varepsilon)$ lukumäärä peitteessä on enintään $C_1(n,Kr^2,r/\varepsilon)$ ja peitteen kerranaisuus on enintään $C_2(n,H\epsilon^2)$.*

Todistus. Tilavuusvertailuun perustuva todistus lemmalle löytyy esimerkiksi viitteestä [Zhu97, lemma 3.6]. □

Molemmille tässä esitetyille peitetuloksille lötyyy lukuisia sovelluksia. Esimerkiksi pakkauslemmalla on tärkeä osa Gromovin kompaktiuslauseen todistuksessa, jossa näytetään n-ulotteisten, ylhäältä rajoitetun läpimitan ja alhaalta rajoitetun Riccin kaarevuuden monistojen avaruuden olevan kompakti Gromov-Hausdorff-metriikassa [Gro99]. Lauseen 5.8 peitteelle on puolestaan lukuisia sovelluksia epälineaarisessa analyysissä Riemannin monistoilla. Aiheeseen perehtymistä varten suosittelemme esimerkiksi viitteitä [Heb00] ja [SC02].

5.3 Tilavuusvertailun sovelluksia: metrisiä ja topologisia tuloksia

Esittelemme tässä Bishopin-Gromovin epäyhtälölle muutamia suoria sovelluksia. Osassa näistä alkuperäiset todistukset perustuvat toisiin menetelmiin, mutta joihin tilavuusvertailu tarjoaa vaihtoehtoisia ja mieltymyksestä riippuen mahdollisesti yksinkertaisempia todistuksia.

Ensimmäisenä esitämme maksimaalisia tilavuuksia koskevan ilmeisen rigiditeettituloksen:

Lause 5.10 (Maksimaalisen tilavuuden isometrialause)**.** *Olkoon M^n täydellinen Riemannin monisto.*

(i) Jos pätee $\mathrm{Ric}\,(M) \geq 0$ *ja*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B(p,r))}{V^n r^n} = 1,$$

millä tahansa pisteellä $p \in M$, ja missä V^n on euklidisen n-yksikkökuulan tilavuus, niin monisto M^n on isometrinen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa.

(ii) Jos pätee $\mathrm{Ric}\,(M) \geq n-1$ *ja*

$$\mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(S^n),$$

niin M on isometrinen pallon S^n kanssa.

Todistus. Tapauksessa (i) vertailukaarevuus on euklidinen, toisin sanottuna pätee $K = 0$, jolloin saamme Bishopin-Gromovin epäyhtälöstä suoraan

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(p,r_0))}{V^n r_0^n} \geq \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(B(p,r))}{V^n r^n} = 1,$$

minkä seurauksena pätee $\mathrm{Vol}(B(p,r_0)) \geq V^n r_0^n$. Toisaalta Bishopin epäyhtälön perusteella pätee myös $V^n r_0^n \geq \mathrm{Vol}(B(p,r_0))$, minkä perusteella saamme yhtälön $V^n r_0^n = \mathrm{Vol}(B(p,r_0))$ ja isometria seuraa. Tapaus (ii) seuraa samalla tekniikalla, mutta vertailuavaruus on $M_1^n = S^n$. Riittävän suurella säteellä R saamme $\mathrm{Vol}(B(p,R)) = \mathrm{Vol}(M) = \mathrm{Vol}(S^n)$, minkä jälkeen päättely etenee samoin. □

Seuraavaksi esitämme Myersin lauseen, joka on klassinen tulos positiivisen Riccin kaarevuuden monistoille. Lause osoittaa, että positiivisella vakiolla rajoitettu Riccin kaarevuus muodostaa ylärajan moniston läpimitalle ja näin ollen tekee monistosta välttämättä kompaktin. Kaarevuus ja kompaktisuus periytyvät moniston universaaliin peiteavaruuteen, jolloin saamme myös tuloksen koskien moniston perusryhmää $\pi_1(M)$.

Lause 5.11 (Myersin lause, [Mye41])**.** *Olkoon (M^n, g) täydellinen Riemannin monisto, jonka Riccin kaarevuus on alhaalta rajoitettu positiivisella vakiolla $K > 0$ siten, että pätee* $\mathrm{Ric}\,(M) \geq (n-1)K > 0$*. Tällöin moniston halkaisijalle pätee* $\mathrm{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{K}}$*. Erityisesti monisto on tällöin kompakti.*

Lisäksi moniston universaali peite on kompakti ja perusryhmä (engl. fundamental group) $\pi_1(M)$ äärellinen.

Perinteinen todistus Myersin lauseelle etenee esimerkiksi geodeesin kaarenpituuden toisen variaation tai indeksimuodon kautta, jolloin voidaan näyttää pituuden $\pi/\sqrt{K}$ ylittävien geodeesien sisältävän ainakin yhden konjugaattipisteen. Tällainen todistus löytyy esimerkiksi viitteestä [Lee97], lause 11.8. Samantyyppisellä todistuksella oli näytetty jo aiemmin vastaava tulos, jossa moniston leikkauskaarevuus oletettiin positiivisen vakion rajaamaksi. Tässä tapauksessa Riccin kaarevuudelle asetettu samanlainen rajoitus on kuitenkin riittävä yhtä vahvan tuloksen todistamiseksi, ja

Myers muodosti Riccin kaarevuuteen perustuvan version vuonna 1941. Alkujaan lauseen voi jäljittää Bonnet'n tulokseen pinnoille vuodelta 1855, minkä vuoksi lause tunnetaan myös Bonnet'n-Myersin lauseena. Tässä esitämme tilavuusvertailuun perustuvan todistuksen.

Todistus. Näytämme lauseen ristiriidan avulla. Olkoon p ja q moniston M kaksi eri pistettä, siten, että niiden etäisyydelle pätee $d(p,q) = r(q) > \pi/\sqrt{K}$. Moniston täydellisyyden perusteella on olemassa kaarenpituuden mukaan parametrisoitu minimaalinen geodeesi $\gamma(t)$, joka yhdistää pisteet p ja q. Oletetaan, että $\gamma(0) = p$ ja $\gamma(\tau) = q$. Koska oletuksemme mukaan $\gamma(t)$ on minimaalinen geodeesi välillä $t \in [0,\tau]$, se ei ylitä leikkausuraa C_p tällä välillä. Jos $\gamma(t)$ kulkisi tällä välillä leikkausuran kautta, ei se olisi pisteet p ja q yhdistävä minimaalinen geodeesi. Toisin sanottuna etäisyysfunktio $r(\gamma(t))$ on sileä välillä $t \in [0,\tau]$ ja erityisesti pisteessä $t = \pi/\sqrt{K}$, sillä pisteiden oletetun etäisyyden perusteella $\pi/\sqrt{K} \in [0,\tau]$. Tällöin radiaalisen etäisyysfunktion Laplace-vertailun (lause 4.1) perusteella pätee

$$\Delta r \leq (n-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r).$$

Toisaalta jos tarkastelemme raja-arvoa $r \to \pi/\sqrt{K}$, havaitsemme, että

$$\Delta r \leq \lim_{r\to\pi/\sqrt{K}} (n-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r) = -\infty,$$

mikä on ristiriidassa etäisyysfunktion r sileyden kanssa. Tästä päättelemme, että geodeesi $\gamma(t)$ kohtaa leikkausuran C_p pisteessä $\gamma(\pi/\sqrt{K})$, jolloin etäisyys pisteestä p on $\pi/\sqrt{K}$. Koska sama päättely pätee jokaisessa pisteessä, saamme moniston halkaisijalle $\operatorname{diam}(M) = \pi/\sqrt{K}$.

Todistaaksemme perusryhmää $\pi_1(M)$ koskevan tuloksen olkoon $P : \tilde{M} \to M$ moniston M universaali peite. Koska (M,g) on Riemannin monisto, myös $\tilde{M}$ varustettuna metriikalla $\tilde{g} = P_*g$ on Riemannin monisto siten, että peitekuvaus P on paikallisesti isometria. Näin ollen myös $\tilde{M}$ on täydellinen ja sillä pätee $\operatorname{Ric}(\tilde{M}) \geq (n-1)K > 0$, jolloin myös $\tilde{M}$ on Myersin lauseen perusteella kompakti ja määritelmän perusteella $\tilde{M}$ on myös yhdesti yhtenäinen.

Olkoon nyt pisteet $p \in M$ ja $\tilde{p} \in \tilde{M}$ siten, että pätee $P(\tilde{p}) = p$. Peitekuvauksen ominaisuuksista tiedämme, että alkukuva $P^{-1}(p) \subset \tilde{M}$ on diskreetti ja siinä on äärellinen määrä pisteitä, koska $\tilde{M}$ on kompakti. Lisäksi on olemassa bijektio p-kantaisen perusryhmän $\pi_1(M,p)$ ja alkukuvan $P^{-1}(p)$ välillä. Näin ollen $\pi_1(M,p)$ on äärellinen. $\square$

Myersin lauseen seuraus koskien perusryhmän äärellisyyttä muodostaa merkittävän topologisen rajoitteen positiivisen Riccin kaarevuuden monistoille, mutta se on kuitenkin samalla myös likimain ainoa perusryhmiä koskeva tulos, joka on erityinen positiiviselle Riccin kaarevuudelle.

Jos tarkastelemme myös avoimia monistoja ja oletamme Riccin kaarevuuden epänegatiiviseksi, tiedämme Milnorin klassisen tuloksen [Mil68] perusteella, että moniston M perusryhmän $\pi_1(M)$ mikä tahansa äärellisesti generoitu aliryhmä kasvaa enintään polynomisesti. Tämä tulos voidaan itse asiassa näyttää tilavuusvertailun ja pakkausargumentin avulla (ks. esimerkiksi [Ber03, lause 109] tai [Zhu97, lause 3.11]). Sen sijaan Milnorin konjektuuri on yhä avoin ongelma. Sen mukaan $\pi_1(M)$ on äärellisesti generoitu, jos moniston M Riccin kaarevuus on epänegatiivinen. Konjektuuri on kuitenkin näytetty todeksi useissa erikoistapauksissa, joissa tilannetta on täydennetty jollakin metrisellä lisäoletuksella. Viite [SS06] on kattava katsaus aiheen tutkimuksen nykytilaan.

Huomautus: Moniston täydellisyys on oleellinen kriteeri Myersin lauseelle. Esimerkiksi kahdesta pisteestä puhkaistun pallon $M = S^2 \setminus \{p, -p\}$ Riccin kaarevuus on kaikkialla vakio $\mathrm{Ric} = 1$, mutta sen perusryhmä on selkeästi ääretön. Lisäksi pallon universaali peite $\tilde{M}$ on kompakti ja sen läpimitalle pätee $\mathrm{diam}(\tilde{M}) = \pi$.

Myersin lauseessa emme voi myöskään heikentää vaatimusta Riccin kaarevuudesta esimerkiksi muotoon $\mathrm{Ric} > 0$. On nimittäin helppoa konstruoida täydellisiä monistoja, joiden Riccin kaarevuus on kaikkialla positiivinen, mutta jotka eivät ole kompakteja. Tämän seikan havainnollistamiseksi esitämme yksinkertaisen vastaesimerkin:

Esimerkki. Olkoon pinta S euklidiseen avaruuteen $\mathbb{R}^3$ upotettu hyperboloidi

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1, \quad z > 0$$

varustettuna euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ indusoimalla Riemannin metriikalla. Koska pinta S on pyörähdyspinta, voidaan se esittää parametrisoinnilla

$$s(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sqrt{1+r^2}) \qquad r \in [0, \infty)\,, \quad \theta \in [0, 2\pi)\,.$$

Parametrisoinnista saamme pinnan tangenttivektorit

$$\partial_r = \left(\cos\theta, \sin\theta, r/\sqrt{1+r^2}\right) \quad \text{ja} \quad \partial_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\,,$$

joille pätee selvästi $\partial_r \perp \partial_\theta$ indusoidun metriikan suhteen.

Avaruuteen $\mathbb{R}^3$ upotettujen pintojen teoriasta tiedämme, että tällä parametrisoinnilla hyperboloidin ensimmäiseksi ja toiseksi perusmuodoksi voidaan johtaa

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} \frac{1+2r^2}{1+r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{II} = \frac{1}{\sqrt{1+2r^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{1+r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Pinnan Gaussin kaarevuus, joka on tässä tapauksessa kaksiulotteisen pinnan ainoa mahdollinen leikkauskaarevuus, on tällöin perusmuotojen avulla lausuttuna

$$K = \frac{\det \mathrm{II}}{\det \mathrm{I}} = \frac{1}{(1+2r^2)^2} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} > 0.$$

Koska leikkauskaarevuus K on kaikkialla positiivinen, pätee myös $\mathrm{Ric} > 0$, mutta saamme tilavuudeksi

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sqrt{\det I}\, d\theta\, dr = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r\sqrt{1+2r^2}}{\sqrt{1+r^2}}\, d\theta\, dr = \infty,$$

sillä vaikka kaarevuus on kaikkialla positiivinen, ei sillä ole positiivista alarajaa: $\lim_{r\to\infty} K = \lim_{r\to\infty} \mathrm{Ric} = 0$.

Yhtäsuuruuden $\operatorname{diam}(M) = \pi/\sqrt{K}$ tapauksessa Myersin lause voidaan täydentää isometriatulokseksi Chengin (1975, [Che75]) lauseella:

Lause 5.12 (Suurimman halkaisijan isometrialause)**.** *Jos lauseen 5.11 ehdot täyttävälle moniston M^n läpimitalle pätee tarkalleen* $\operatorname{diam}(M) = \pi/\sqrt{K}$*, on M^n isometrinen pallon $S^n(K)$ kanssa.*

Chengin alkuperäinen todistus perustuu Dirichlet-ominaisarvojen vertailuun. Ensimmäinen tilavuusvertailua hyödyntävä todistus vaikuttaa löytyvän lähteestä [Shi83].

Todistus. Olkoon monisto M siten, että sen halkaisijalle pätee $\operatorname{diam}(M) = \pi/\sqrt{K}$, ja valitaan seuraavaksi pisteet $p, q \in M$ etäisyydellä $d(p,q) = \pi/\sqrt{K}$. Tällöin kuulat $B(p, \pi/(2\sqrt{K}))$ ja $B(q, \pi/(2\sqrt{K}))$ ovat pistevieraita, sillä muutoin voisimme valita pisteen $x \ni B(p, \pi/(2\sqrt{K})) \cap B(q, \pi/(2\sqrt{K}))$, jolloin pisteiden etäisyydeksi saisimme

$$d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) < \pi/\sqrt{K},$$

mikä olisi ristiriita. Lisäksi on selvää, että kuulien yhdisteelle pätee $B(p, \pi/2\sqrt{K}) \cup B(q, \pi/2\sqrt{K}) \subseteq M$. Tällöin mitan monotonisuuden ja subadditiivisuuden nojalla pätee epäyhtälö

$$\operatorname{Vol}(M) \geq \operatorname{Vol}(B(p, \pi/(2\sqrt{K}))) + \operatorname{Vol}(B(q, \pi/(2\sqrt{K}))).$$

Epäyhtälön oikean puolen termeihin voimme soveltaa Bishopin-Gromovin epäyhtälöä, jolloin saamme

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(M) \geq{}& \operatorname{Vol}(B(p, \pi/\sqrt{K})) \cdot \frac{\operatorname{Vol}_K(B(\pi/(2\sqrt{K})))}{\operatorname{Vol}_K(B(\pi/\sqrt{K}))} \\ &+ \operatorname{Vol}(B(q, \pi/\sqrt{K})) \cdot \frac{\operatorname{Vol}_K(B(\pi/(2\sqrt{K})))}{\operatorname{Vol}_K(B(\pi/\sqrt{K}))}.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Koska vertailuavaruuden M_K leikkauskaarevuus on kaikkialla positiivinen vakio K, vastaa M_K euklidista palloa, jonka säde on $1/\sqrt{K}$. Tällöin saamme tilavuuksien suhteeksi

$$\frac{\operatorname{Vol}_K(B(\pi/(2\sqrt{K})))}{\operatorname{Vol}_K(B(\pi/\sqrt{K}))} = \frac{1}{2},$$

joten saamme epäyhtälöstä (5.10)

$$\operatorname{Vol}(M) \geq \frac{1}{2}\operatorname{Vol}(B(p, \pi/\sqrt{K})) + \frac{1}{2}\operatorname{Vol}(B(q, \pi/\sqrt{K})). \tag{5.11}$$

Toisaalta oletimme, että halkaisijalle pätee $\operatorname{diam}(M) = \pi/\sqrt{K}$, joten on oltava $\operatorname{Vol}(M) = \operatorname{Vol}(\overline{B(p, \pi/\sqrt{K})}) = \operatorname{Vol}(B(p, \pi/\sqrt{K})$. Tämän perusteella saamme epäyhtälöstä (5.11)

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(M) &\geq \frac{1}{2}\operatorname{Vol}(M) + \frac{1}{2}\operatorname{Vol}(M) \\ &= \operatorname{Vol}(M).\end{aligned}$$

Tällöin kaikki todistuksen epäyhtälöt muuttuvat yhtälöiksi, ja tästä seuraa, että monisto M^n on isometrinen pallon $S^n(K)$ kanssa. □

Chengin lause on merkittävä rigiditeettitulos positiivisen Riccin kaarevuuden monistoille. Vahvemmalla oletuksella leikkauskaarevuudesta Groven-Shiohaman palloteoria (1977, [GS77]) osoittaa, että jos moniston M^n leikkauskaarevuudelle K pätee $K \geq H > 0$ ja läpimitalle $\operatorname{diam}(M) > \pi/(2\sqrt{H})$, on M^n homeomorfinen pallon S^n kanssa. Luonnollista olisi siis olettaa, että olisi ehkä mahdollista muodostaa vastaava topologinen rigiditeettitulos myös Riccin kaarevuuden tapauksessa.

Koska matalissa ulottuvuuksissa ($n \leq 3$) leikkauskaarevuus ja Riccin kaarevuus vastaavat toisiaan, voidaan Groven-Shiohaman tulos yleistää pienin muutoksin myös Riccin kaarevuudelle näissä ulottuvuuksissa [SZ97]. Sen sijaan korkeammissa ulottuvuuksissa ($n \geq 4$), tulos ei enää päde. Tämän osoitti Andersonin [And90] konstruoima metriikka yhdistetyn summan $\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ muodostamassa neliulotteisessa monistossa. Vastaesimerkissä Riccin kaarevuudelle pätee Ric $\geq n-1$ ja moniston läpimitalle $\operatorname{diam}(M) \ \geq \pi - \varepsilon$ mielivaltaisen pienellä $\epsilon > 0$. Näin ollen M ei ole homeomorfinen pallon S^4 kanssa millään $\varepsilon > 0$. Täten Andersonin esimerkki osoittaa, ettei Riccin kaarevuudelle ole yleisessä tapauksessa Groven-Shiohaman teorian tyyppistä topologista tulosta. Vastaesimerkki yleistyy tapauksiin $\operatorname{dim}(M) \geq 4$ ja esimerkiksi Otsu [Ots91] on konstruoinut vastaavia metriikoita muuan muassa monistoille $S^{n-2} \times S^2$, missä valitaan $n \geq 5$.

Bishopin-Gromovin tilavuusvertailusta voidaan johtaa myös alaraja kuulan $B(p,r)$ tilavuudelle. Kompaktin moniston M tapauksessa tiedämme, että koko moniston tilavuudelle pätee $\operatorname{Vol}(M) = \operatorname{Vol}(B(p, \operatorname{diam}(M)))$, sillä moniston läpimitta on rajoitettu. Tällöin voimme johtaa tilavuusvertailun monotonisuustuloksesta alarajan yksittäisen kuulan tilavuudelle. Saamme Bishopin-Gromovin epäyhtälöstä,

$$\operatorname{Vol}(B(p,r)) \geq \operatorname{Vol}_K(B(r)) \frac{\operatorname{Vol}(M)}{\operatorname{Vol}_K(B(\operatorname{diam} M))} = C_{M,K} \operatorname{Vol}_K(B(r)),$$

kun kuulan säde on rajoitettu, $r < \operatorname{diam}(M)$ ja pätee $\operatorname{Ric}(M) \geq (n-1)K$. Tämän seurauksena saamme esimerkiksi ylärajan

$$\frac{\operatorname{Vol}(M)}{\operatorname{Vol}(B(p,r))} \leq \frac{\operatorname{Vol}_K(B(\operatorname{diam} M))}{\operatorname{Vol}_K(B(r))}$$

r-säteisten kuulien lukumäärälle moniston peitteessä, joka konstruoidaan kuulista.

Avoimien monistojen tapauksessa saamme Calabin-Yaun lauseesta vastaavan heikomman tuloksen kuulien tilavuuden kasvulle, kun kuulat ovat riittävän suuria.

Lause 5.13 (Calabi-Yau, [Yau76]). *Olkoon (M^n, g) täydellinen ja avoin Riemannin monisto, jonka Riccin kaarevuus on epänegatiivinen. Tällöin geodeettisen kuulan $B(p,r)$ tilavuus kasvaa vähintään lineaarisesti. Toisin sanottuna pätee*

$$\operatorname{Vol}(B(p,r)) \geq C(n,p) r$$

jollakin positiivisella vakiolla $C(n,p)$, kun säde r on riittävän suuri.

Todistus. Tässä todistuksessa valitsemme säteeksi $r > 2$. Koska M on täydellinen ja avoin Riemannin monisto, ainakin yhdellä pisteellä $p \ \in M$ on olemassa kaarenpituuden mukaan parametrisoitu geodeesi $\gamma(t) : [0, \infty) \to M$ siten, että $\gamma(0) = p$ ja $d(p, \gamma(t)) = t$ kaikilla $t > 0$.

Olkoon nyt $\mathcal{A}_{\gamma(t)}(t-1,t+1) \subset M$ rengasalue, jonka keskipiste on $\gamma(t)$ ja jonka sisäsäde on $t-1$ ja ulkosäde $t+1$ geodeesia γ pitkin mitattuna. Kun pätee $t > 1$, saamme rengasalueiden suhteellisesta tilavuusvertailusta (lause 5.2)

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(\gamma(t),t-1))}{\mathrm{Vol}(\mathcal{A}_{\gamma(t)}(t-1,t+1))} \geq \frac{V^n(t-1)^n}{V^n(t+1)^n - V^n(t-1)^n}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Vol}(B(\gamma(t),t-1)) \geq \frac{(t-1)^n}{(t+1)^n-(t-1)^n}\,\mathrm{Vol}(\mathcal{A}_{\gamma(t)}(t-1,t+1))$$

Toisaalta pätee $B(p,1) \subset \mathcal{A}_{\gamma(t)}(t-1,t+1)$, kun $t > 1$. Tällöin monotonisuuden perusteella saamme

$$\mathrm{Vol}(B(\gamma(t),t-1)) \geq \frac{(t-1)^n}{(t+1)^n-(t-1)^n}\,\mathrm{Vol}(B(p,1)),$$

ja koska pätee $B(\gamma(t),t-1) \subset B(p,2t-1)$, saamme

$$\mathrm{Vol}(B(p,2t-1)) \geq \frac{(t-1)^n}{(t+1)^n-(t-1)^n}\,\mathrm{Vol}(B(p,1)).$$

Olkoon nyt vakio $C(n,p) = \inf_{t\in[3/2,\infty)} \frac{(t-1)^n}{(t+1)^n-(t-1)^n} \cdot \frac{1}{t} \cdot \mathrm{Vol}(B(p,1))$, jolloin saamme ehdolla $r > 2t-1 \geq 2\cdot\frac{3}{2}-1 = 2$ lopullisen epäyhtälön

$$\mathrm{Vol}(B(p,r)) \geq C(n,p)\cdot r.$$

□

Lauseen ilmeisenä seurauksena saamme tuloksen avointen ja epänegatiivisen Riccin kaarevuuden monistojen tilavuudelle:

Korollaari 5.14. *Olkoon M^n täydellinen avoin Riemannin monisto, jonka Riccin kaarevuus on kaikkialla epänegatiivinen. Tällöin moniston tilavuus on ääretön.*

A Symboliluettelo

∂_{x^i}, $\frac{\partial}{\partial x^i}$	koordinaattikartan x indusoima kantavektori tangenttiavaruudessa T_pM
$\otimes$	tensoritulo
∇	Riemannin konnektio
$\sharp$	indeksin korottaminen $\sharp : T_l^{k+1}M \to T_{l+1}^kM$
$\mathcal{A}(p)$	p-keskeinen rengasalue
$A(r,\theta)$	tilavuustiheys geodeettisissa pallokoordinaateissa
$\#$	monistojen yhdistetty summa
$\flat$	indeksin alentaminen
$B(p,r)$	p-keskeinen geodeettinen kuula
C_p	pisteen p leikkausura
δ_j^i	Kroneckerin delta
d	etäisyysfunktio
dx^i	koordinaattikartan x indusoima kantavektori kotangenttiavaruudessa T_p^*M
g_{ij}	metriikan g komponentit
g^{ij}	käänteisen metriikan g^{-1} komponentit
$g_{ij,k}$	metriikan osittaisderivaatta $\partial_{x^k} g_{ij}$
Γ_{jk}^i	metriikan Christoffelin symbolit
$\Gamma(E)$	vektorikimpun (E,π,M) sileiden sektioiden avaruus
$\Gamma(TM)$	sileiden vektorikenttien avaruus
$\Gamma(T^*M)$	sileiden kovektorikenttien avaruus
$\Gamma(T_l^kM)$	sileiden (k,l)-tensorikenttien avaruus
inj_p	kuvauksen $exp_p : T_pM \to M$ injektiivisyyssäde
$\mathrm{inj}_p(\theta)$	etäisyys $exp_p : T_pM \to M$ leikkausuraan suunnassa $\theta \in T_pM$
K	leikkauskaarevuus
M^n	n-ulotteinen sileä (Riemannin) monisto
m_Q	hyperpinnan $Q \subset M$ keskikaarevuus
π	kanoninen projektio perusavaruuteen
$\pi_1(M)$	moniston M perusryhmä
R	Riemannin kaarevuusendomorfismi
Rm	Riemannin kaarevuustensori
Ric	Riccin kaarevuus
$S(p,r)$	p-keskeinen geodeettinen pallo
S_pM	yksikköpallo tangenttiavaruudessa T_pM
T_pM	moniston M tangenttiavaruus pisteessä p
TU	tangenttikimppu $\amalg_{p\in U} T_pM$, $U \subseteq M$
T_l^kM	(k,l)-tensori
$\mathrm{tr_g}$	2-kovariantin tensorin jälki, ks. yhtälö (2.4)

Viitteet

[And90] Michael T Anderson. “Metrics of positive Ricci curvature with large diameter”. *manuscripta mathematica* 68.1 (1990), s. 405–415.

[BS09] Simon Brendle ja Richard Schoen. “Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms”. *Journal of the American Mathematical Society* 22.1 (2009), s. 287–307.

[Ber03] Marcel Berger. *A panoramic view of Riemannian geometry.* Berlin: Springer, 2003.

[Bis63] Richard L. Bishop. “A relation between volume, mean curvature and diameter”. *Notices of the American Mathematical Society* 10 (1963), s. 364.

[Boc46] Salomon Bochner. “Vector fields and Ricci curvature”. *Bulletin of the American Mathematical Society* 52.9 (1946), s. 776–797.

[Car92] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics, theory & applications. Boston: Birkhäuser, 1992.

[Che75] Shiu-Yuen Cheng. “Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications”. *Mathematische Zeitschrift* 143.3 (lokakuu 1975), s. 289–297.

[GS77] Karsten Grove ja Katsuhiro Shiohama. “A generalized sphere theorem”. *Annals of Mathematics* 106.1 (1977), s. 201–211.

[Gro99] Mikhail Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces.* Progress in mathematics. Käännös ranskankielisestä originaalista (1981). Basel: Birkhäuser, 1999.

[Heb00] Emmanuel Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities.* Vol. 5. American Mathematical Soc., 2000.

[Jos11] Jürgen Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis.* 6. painos. Heidelberg ; New York: Springer, 2011.

[Lee03] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds.* Graduate Texts in Mathematics. Lisäpainokset: 2006. New York, NY: Springer, 2003.

[Lee97] John M. Lee. *Riemannian manifolds : an introduction to curvature.* New York, NY: Springer, 1997.

[Mil68] John Milnor. “A note on curvature and fundamental group”. *Journal of Differential geometry* 2.1 (1968), s. 1–7.

[Mye41] S. B. Myers. “Riemannian manifolds with positive mean curvature”. *Duke Math. J.* 8.2 (kesäkuu 1941), s. 401–404.

[Ots91] Yukio Otsu. “On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter”. *Mathematische Zeitschrift* 206.1 (1991), s. 255–264.

[Per02] Grisha Perelman. “The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications”. *arXiv Mathematics e-prints*, math/0211159 (2002). Julkaisematon.

[Pet06] Peter Petersen. *Riemannian geometry*. 2. painos. Graduate texts in mathematics. New York: Springer, 2006.

[SC02] Laurent Saloff-Coste. *Aspects of Sobolev-type inequalities*. Vol. 289. Cambridge University Press, 2002.

[SS06] Zhongmin Shen ja Christina Sormani. “The Topology of Open Manifolds with Nonnegative Ricci Curvature”. *arXiv Mathematics e-prints*, math/0606774 (2006). Julkaisematon.

[SZ97] Ying Shen ja Shunhui Zhu. “Ricci curvature, minimal surfaces and sphere theorems”. *arXiv:dg-ga/9709002* (1997). Julkaisematon.

[Shi83] Katsuhiro Shiohama. “A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature”. *Transactions of the American Mathematical Society* 275.2 (1983), s. 811–819.

[Yau76] Shing-Tung Yau. “Some Function-Theoretic Properties of Complete Riemannian Manifold and Their Applications to Geometry”. *Indiana University Mathematics Journal* 27 (1976), s. 659–670.

[Zhu97] Shunhui Zhu. “The Comparison Geometry of Ricci Curvature”. Teoksessa: *Comparison Geometry*. Cambridge University Press. 1997, s. 221–262.