# Kvanttimekaanisen spinin matemaattinen kuvaus

**Jenni Emilia Marjomaa**

**Perustieteiden korkeakoulu**

Kandidaatintyö
Espoo 13.9.2025

**Vastuuopettaja**

Prof. Eveliina Peltola

**Työn ohjaaja**

FT Joona Oikarinen

**Aalto-yliopisto**
**Perustieteiden korkeakoulu**

Copyright © 2025 Jenni Emilia Marjomaa

The document can be stored and made available to the public on the open internet pages of Aalto University.
All other rights are reserved.

**Aalto-yliopisto**
**Perustieteiden korkeakoulu**

**Aalto-yliopisto, PL 11000, 00076 AALTO**
**www.aalto.fi**
**Tekniikan kandidaatintyön tiivistelmä**

**Tekijä** Jenni Emilia Marjomaa

**Työn nimi** Kvanttimekaanisen spinin matemaattinen kuvaus

**Koulutusohjelma** Teknistieteellinen kandidaattiohjelma

**Pääaine** Matematiikka ja systeemitieteet **Pääaineen koodi** SCI3029

**Vastuuopettaja** Prof. Eveliina Peltola

**Työn ohjaaja** FT Joona Oikarinen

**Päivämäärä** 13.9.2025 **Sivumäärä** 60 **Kieli** Suomi

**Tiivistelmä**

Tässä kandidaatintyössä käsitellään kvanttimekaanista spiniä esitysteorian näkökulmasta. Työssä käydään läpi keskeisimmät asiat ryhmä- ja esitysteoriasta ja annetaan esimerkkejä. Työssä tarkastellaan Lien ryhmiä ja Lien algebroja. Erityisessä tarkastelussa ovat Lien ryhmät $SO(3)$ ja $SU(2)$, koska ne selittävät kvanttimekaanisen spinin.

Työssä myös todistetaan Schurin lemma ja luokitellaan kaikki ryhmän $SU(2)$ unitaariset redusoitumattomat esitykset. Lopuksi käsitellään ryhmien $SO(3)$ ja $SU(2)$ yhteyttä topologisesta näkökulmasta.

**Avainsanat** kvanttimekaaninen spin, ryhmä, ryhmähomomorfismi, esitys, $SO(3)$, $SU(2)$

**Aalto-yliopisto**
**Perustieteiden korkeakoulu**

**Aalto University, P.O. BOX 11000, 00076 AALTO**
**www.aalto.fi**
**Abstract of the bachelor's thesis**

**Author** Jenni Emilia Marjomaa

**Title** Quantum mechanical spin from the mathematical point of view

**Degree programme** Bachelor's Programme in Science and Technology

**Major** Mathematics and Systems Sciences **Code of major** SCI3029

**Teacher in charge** Prof. Eveliina Peltola

**Advisor** FT Joona Oikarinen

**Date** 13.9.2025 **Number of pages** 60 **Language** Finnish

**Abstract**

This bachelor thesis investigates quantum mechanical spin from the perspective of representation theory. The thesis covers foundations of group theory and representation theory. The focus is especially on the Lie groups $SO(3)$ and $SU(2)$, because the explanation of the quantum mechanical spin lies in the heart of these groups.

In the thesis, Schur's lemma will be proven. Additionally, the classification of the unitary irreducible representations of the group $SU(2)$ will be made. Lastly, the thesis investigates the topological connection between the groups $SO(3)$ and $SU(2)$.

**Keywords** quantum mechanical spin, group, group homomorphism, representation, $SO(3)$, $SU(2)$

# Sisällys

**Tiivistelmä** **3**

**Tiivistelmä (englanniksi)** **4**

**Sisällys** **5**

**1 Johdanto** **6**

**2 Alkuun** **7**

**3 Ryhmäesitykset** **15**
3.1 Ryhmät . . . . . 15
3.2 Esitykset . . . . . 19
3.3 Redusoitumattomat esitykset . . . . . 20
3.4 Unitaariset esitykset . . . . . 21
3.5 Schurin Lemma . . . . . 21

**4 Lien ryhmät $SO(3)$ ja $SU(2)$** **26**
4.1 Lien ryhmät . . . . . 26
4.2 Lien algebrat . . . . . 27
4.3 $SO(3)$ ja $SU(2)$ . . . . . 28
4.4 $\mathfrak{so}(3)$ ja $\mathfrak{su}(2)$ . . . . . 28
4.5 Lien algebran esitykset . . . . . 32

**5 Redusoitumattomien esitysten luokittelu** **35**
5.1 Ryhmän $U(1)$ redusoitumattomien esitysten luokittelu . . . . . 36
5.2 Ryhmän $SU(2)$ redusoitumattomien unitaaristen esitysten luokittelu . 38
5.3 Ryhmän $SU(2)$ Spin 1 -esitys . . . . . 45

**6 Kvanttimekaaninen spin** **47**
6.1 Ryhmien $SO(3)$ ja $SU(2)$ yhteys . . . . . 48
6.2 Ryhmä $SO(3)$ topologisena avaruutena . . . . . 50
6.3 Ryhmä $SU(2)$ on $SO(3)$:n universaali peite . . . . . 54
6.4 $SO(3)$:n projektiiviset unitaariset esitykset . . . . . 57

# 1 Johdanto

Tässä työssä tarkastellaan kvanttimekaanista spiniä esitysteorian näkökulmasta. Historiallisesti spinin ajateltiin ensin olevan konkreettisesti varatun hiukkasen pyörimistä, mutta myöhemmin fyysikko Wolfgang Pauli (1900–1958) ehdotti sen olevan puhtaasti sisäinen ominaisuus, eikä varsinaista pyörimistä. Tutkitaan spin $\frac{1}{2}$-hiukkasta eli fermionia, ja otetaan esimerkiksi elektroni. Kvanttimekaniikassa systeemin tilaa kuvataan vektorina kompleksisessa vektoriavaruudessa, jossa on hermiittinen sisätulo. Tällaista vektoriavaruutta kutsutaan tila-avaruudeksi. Tila-avaruus voi olla esimerkiksi aaltofunktioiden avaruus, joka klassisesti toteuttaa differentiaaliyhtälön. Ero kvanttimekaniikan ja klassisen mekaniikan välillä on mitattavien suureiden käsittely. Nämä mitattavat suureet voidaan käsittää hermiittisinä lineaarimuunnoksina tila-avaruudessa.

1920-luvulla fyysikot Otto Stern (1888–1969) ja Walther Gerlach (1889–1979) osoittivat kuuluisalla Stern-Gerlach-kokeella, että kvanttimekaaninen spin voi saada vain diskreettejä arvoja. Koeaseteleman suunnittelemiseen kului kauan aikaa, sillä harva fyysikko tuki avaruuskvantittumisen teoriaa. Stern uskoi tähän teoriaan ja Gerlachin kanssa suoritti kokeen hopea-atomeilla, mutta kokoojalevyllä ei havaittu tuloksia. Onnenkantamoisena Stern puhalsi vahingossa savukkeensa rikkipitoista savua kokoojalevylle, mikä sai hopean muuttumaan mustaksi hopeasulfidiksi. Levyllä havaittiin vastoin klassisen fysiikan ennustamaa tasaista jakaumaa kaksi selkeää, toisistaan erottuvaa hopea-atomiryhmää. Stern ja Gerlach luulivat todistaneensa vain ulkoisen magneettikentän aiheuttavan atomin kvantittuneen magneettisen momenttivektorin. Kului vuosia, että ymmärrettiin kokeen osoittavan kvanttimekaanisen spinin olevan hiukkasen sisäinen ominaisuus. [6]

Kvanttimekaniikan tutkimuksen alkuaikoina matemaatikko Herman Weyl (1885–1955) oli ensimmäisiä teoreettisia matemaatikoita, joka huomasi, että esitysteoriaa voidaan käyttää kvanttimekaniikassa. Weylille tuntui luonnolliselta hyödyntää ryhmiä ja niiden esityksiä kvanttimekaniikan diskreetin luonteen vuoksi. [21, Luku 1.1] Elektronin paikan kierrot avaruudessa voidaan kuvata rotaatioryhmänä $SO(3)$. Tämän ryhmän projektiiviset unitaariset esitykset selittävät kvanttimekaanisen spinin, mutta niiden tarkasteluun tarvitaan kiertotie. Käy ilmi, että ryhmän $SO(3)$ universaali peite on ryhmä $SU(2)$. Ryhmä $SU(2)$ koostuu kvanttimekaanisen spin-$\frac{1}{2}$-vektorien kierroista. Tämän ryhmän unitaariset esitykset ovat ekvivalentteja $SO(3)$:n projektiivisten unitaaristen esitysten kanssa. Elektroni palaa alkutilaansa vasta kahden kokonaisen kierroksen eli $4\pi$-kierron jälkeen. Tähän on syynä ryhmän $SO(3)$ kaksoispeite $SU(2)$.

Tutkielman ensimmäiset luvut käsittelevät kvanttimekaanista spiniä algebrallisesta näkökulmasta. Luvussa 2 esitellään työn kannalta keskeisimmät käsitteet ja määritelmät. Luku 3 keskittyy ryhmiin ja ryhmäesityksiin. Työssä käsitellään vain äärellisulotteisia ryhmiä. Luvussa 4 käydään läpi ryhmien $SU(2)$ ja $SO(3)$ ominaisuuksia. Luvussa 5 luokitellaan ryhmien $U(1)$ ja $SU(2)$ esitykset. Työn viimeisessä luvussa eli luvussa 6 tarkastellaan spinin käsitettä topologian näkökulmasta. Tämän luvun matemaattiset yksityiskohdat tarvitsevat sellaisia taustatietoja, joita tässä työssä ei voida esittää. Sen vuoksi luku on luonteeltaan narratiivinen.

# 2 Alkuun

Lukijalta odotetaan perustietoja lineaarialgebrasta [17], ryhmäteoriasta [11] sekä topologiasta [18]. Tässä luvussa käydään muistutuksena läpi työn kannalta oleellisia käsitteitä ja määritelmiä. Lineaarialgebraan pohjautuvat todistukset ovat saaneet innoituksensa Gilbert Strangin teoksesta [17, Luku 5.4].

**Määritelmä 2.1** (Käsitteitä)**.** Työssä käytettäviä tärkempiä merkintöjä ovat:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ = positiivisten kokonaislukujen joukko,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ = ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko,
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ = kokonaislukujen joukko,
- $\mathbb{R}$ = reaalilukujen joukko,
- $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$= ei-negatiivisten reaalilukujen joukko,
- $\mathbb{R}^n$ = reaalinen $n$-ulotteinen vektoriavaruus,
- $\mathbb{R}^{n\times n}$ = reaalisten neliömatriisien joukko,
- $\mathbb{C}$ = kompleksilukujen joukko,
- $\mathbb{C}^{n\times n}$ = kompleksisten neliömatriisien joukko,
- $\mathbb{Z}_2$ = jäännösluokkien modulo 2 -joukko,
- $[0, 1]$ = suljettu yksikköväli,
- $\mathbb{I}$ = identiteettimatriisi,
- $\mathbf{0}$ = nollamatriisi.

**Määritelmä 2.2** (Joukon topologia)**.** [19, Määritelmä 1.1] Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{J}$ kokoelma $X$:n osajoukkoja, toisin sanoen $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}(X)$. Sanotaan, että $\mathcal{J}$ on $X$:n topologia, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $U_j \in \mathcal{J}, j \in J \Rightarrow \bigcup\{U_j : j \in J\} \in \mathcal{J}$,
2. $\mathcal{J}$ sisältää alkioittensa äärelliset leikkaukset,
3. $\emptyset \in \mathcal{J}$ ja $X \in \mathcal{J}$.

**Määritelmä 2.3** (Topologinen avaruus)**.** [19, Määritelmä 1.1] Topologiseksi avaruudeksi kutsutaan paria $(X, \mathcal{J})$, jossa $X$ on joukko ja $\mathcal{J}$ jokin $X$:n topologia. Topologian $\mathcal{J}$ alkioita sanotaan $\mathcal{J}$-avoimiksi joukoiksi.

**Määritelmä 2.4** (Polku)**.** [18, Määritelmä 14.21] Olkoon $Y$ topologinen avaruus. Tarkastellaan suljettua yksikköväliä $I = [0, 1]$. Jatkuvaa kuvausta $s : I \to Y$ sanotaan $Y$:n poluksi. Sanotaan, että polku $s : I \to Y$ yhdistää $Y$:n pisteet $s(0)$ ja $s(1)$, joita kutsutaan $s$:n päätepisteiksi. Tarkasti ottaen $s(0)$ on $s$:n alkupiste ja $s(1)$ sen loppupiste, ja $s$ yhdistää $s(0)$:n $s(1)$:een. Jos $t \in I$ on aikaparametri, polku $s : I \to Y$ esittää, miten piste $s(t)$ liikkuu aikayksikössä alkupisteestä $s(0)$ loppupisteeseen $s(1)$.

**Määritelmä 2.5** (Suljetun välin jatkuva kuvaus)**.** [18, Määritelmä 14.21] Toisinaan poluksi kutsutaan yleisemmin mielivaltaisen suljetun välin $[a, b]$ jatkuvaa kuvausta $s : [a, b] \to Y$.

**Määritelmä 2.6** (Polkuyhtenäisyys)**.** [18, Määritelmä 14.21] Avaruus $Y$ on polkuyhtenäinen, jos jokainen pari $a, b \in Y$ voidaan yhdistää polulla $Y$:ssä.

**Määritelmä 2.7** (Ympäristö)**.** [19, Määritelmä 1.4] Olkoon $(X, \mathcal{J})$ topologinen avaruus ja $x \in X$, $B \subset X$. Jos $x \in U$ ja $U$ on avoin joukko $X$:ssä eli $U \in \mathcal{J}$, niin $U$ on pisteen $x$ ympäristö. Jos $B \subset U$ ja $U$ on avoin joukko $X$:ssä, niin $U$ on joukon $B$ ympäristö.

**Määritelmä 2.8** (Hausdorffin avaruus)**.** [19, Määritelmä 1.6] Sanotaan, että topologinen avaruus $(X, \mathcal{J})$ on Hausdorffin avaruus, jos sen eri pisteillä on erilliset ympäristöt. Hausdorffin avaruutta voidaan käyttää myös adjektiivina, jolloin se on pelkkä Hausdorff.

**Määritelmä 2.9** (Ominaisuus $N_2$)**.** [19, Määritelmä 12.2] Sanotaan, että $X$ on $N_2$-avaruus tai lyhyesti $X$ on $N_2$, jos $X$:llä on numeroituva kanta.

**Määritelmä 2.10** (Metriikka)**.** [18, Määritelmä 2.1] Olkoon $X$ joukko. Olkoon $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ kuvaus. Toisin sanoen, jokaista paria $x, y \in X$ kohti on annettu reaaliluku $d(x, y) \geq 0$. Sanotaan, että kuvaus $d$ on metriikka joukossa $X$, jos seuraavat ehdot täyttyvät kaikilla $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Lukua $d(x, y)$ sanotaan $x$:n ja $y$:n väliseksi $d$-etäisyydeksi.

*Huomautus* 2.11. [18, Määritelmä 2.1] Joukon $X$ ei tarvitse olla vektoriavaruus tai vektoriavaruuden osajoukko.

**Määritelmä 2.12** (Metrinen avaruus)**.** [18, Määritelmä 2.1] Metrinen avaruus on joukko $X$, jossa on määritelty jokin metriikka $d$. Täsmällisemmin ilmaistuna metrinen avaruus on pari $(X, d)$, jossa $X$ on joukko ja $d$ metriikka $X$:ssä.

**Esimerkki 2.13.** Vektoriavaruus $V$ on metrinen avaruus.

**Määritelmä 2.14** (Homeomorfismi)**.** [19, Määritelmä 3.14] Olkoot $(X, d)$ ja $(Y, d')$ metrisiä avaruuksia. Sanotaan, että kuvaus $g : X \to Y$ on homeomorfismi, jos sille pätee:

1. $g$ on bijektio, jolloin on olemassa käänteiskuvaus $g^{-1} : Y \to X$,
2. $g$ on jatkuva,
3. käänteiskuvaus $g^{-1}$ on jatkuva.

Lisäksi sanotaan, että $X$ on homeomorfinen $Y$:n kanssa, mitä merkitään $X \approx Y$.

**Määritelmä 2.15** (Cauchyn jono)**.** [18, Määritelmä 12.1] Metrisen avaruuden $(X, d)$ jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono, jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_k) < \epsilon$, kun $k, n \geq n_0$.

**Määritelmä 2.16** (Kuulat ja pallot)**.** [18, Määritelmä 2.6] Olkoon $(X, d)$ metrinen avaruus ja $y \in X, r > 0$. Määritellään:

$$\begin{aligned} B(y, r) &= \{x \in X : d(x, y) < r\}, \\ \bar{B}(y, r) &= \{x \in X : d(x, y) \leq r\}, \\ S(y, r) &= \{x \in X : d(x, y) = r\}. \end{aligned}$$

Sillä $d(y, y) = 0$, niin aina $y \in B(y, r) \subset \bar{B}(y, r)$. Joukko $B(y, r)$ on avoin kuula, jonka keskipiste on $y$ ja säde $r$. Joukko $\bar{B}(y, r)$ suljettu kuula, ja $S(y, r)$ on pallo. Joukkoa $B(y, r)$ kutsutaan myös pisteen $y$ kuulaympäristöksi. Joukon metriikkaa muutettaessa kuulat ja pallotkin muuttuvat. Täsmällisemmin voidaan merkitä $B_d(y, r)$.

**Määritelmä 2.17** ($n$-ulotteinen kuulaympäristö)**.** [18, Esimerkki 2.7.2] Olkoon $X = \mathbb{R}^n$, jossa on tavanomainen metriikka $d$. Tällöin $B(y, r)$ on tavanomainen pyöreä $n$-ulotteinen kuula, jolle voidaan käyttää merkintää $B^n(y, r)$.

**Määritelmä 2.18** (Monisto)**.** [19, Määritelmä 14.1] Sanotaan, että topologinen avaruus $X$ on $n$-monisto, $n \in \mathbb{N}$, jos pätee:

1. $X$ on Hausdorff,
2. $X$ on $N_2$,
3. jokaisella $y \in X$ on ympäristö, joka on homeomorfinen $B^n(y, r)$:n kanssa.

**Määritelmä 2.19** (Sisätulo ja sisätuloavaruus)**.** [18, Määritelmä 1.2] Olkoon $V$ vektoriavaruus. Kuvaus $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ on sisätulo $V$:ssä, jos seuraavat ehdot täyttyvät kaikilla $x, y, z \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
2. $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$,
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ,
5. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

Vektoriavaruutta, jossa on määritelty jokin sisätulo, kutsutaan sisätuloavaruudeksi.

**Määritelmä 2.20** (Hermiittinen sisätulo)**.** [15, Luku 2.3] Olkoon $V$ kompleksinen vektoriavaruus. Kuvaus $(x, y) \mapsto [x, y] : V \times V \to \mathbb{C}$ on hermiittinen sisätulo $V$:ssä, jos seuraavat ehdot toteutuvat kaikilla $x, y, z \in V$ ja $\alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,
3. $\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$,
4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
5. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ,
6. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$.

**Määritelmä 2.21** (Kanta)**.** [3, Luku 7] Olkoon $V$ vektoriavaruus. Sanotaan, että lineaarisesti riippumaton vektorijoukko $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ on vektoriavaruuden yksikäsitteinen kanta, jos jokaiselle vektorille $v$ on olemassa yksikäsitteiset kertoimet $\lambda_j$ siten, että

$$v = \sum_j \lambda_j v_j.$$

Sanotaan, että kantavektorit $v$ virittävät vektoriavaruuden $V$ kannan.

**Määritelmä 2.22** (Ulottuvuus)**.** [3, Luku 7] Sanotaan, että vektoriavaruudella $V$ on äärellinen ulottuvuus tai se on äärellisulotteinen, jos sillä on äärellinen kanta. Silloin vektoriavaruuden ulottuvuus $\dim(V)$ on kannan alkioiden lukumäärä. Jos $V = \{0\}$, niin tällöin määritellään $\dim(V) = 0$. Jos vektoriavaruuden kanta ei ole äärellinen, silloin sanotaan, että vektoriavaruuden kanta on ääretönulotteinen.

**Määritelmä 2.23** (Hilbertin avaruus)**.** [18, Määritelmä 12.4] Hilbertin avaruudet ovat täydellisiä sisätuloavaruuksia. Toisin sanoen Hilbertin avaruus on vektoriavaruus, jossa jokainen Cauchyn jono suppenee. Tällaista avaruutta merkitään $\mathcal{H}$.

**Määritelmä 2.24** (Kiertomatriisit)**.** [21, Luku 6] Kiertomatriisi $R_i(\theta) \in \mathbb{R}^3$, $i \in \{x, y, z\}, \theta \in [0, 2\pi]$ on lineaarikuvaus, joka toteuttaa kierron euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Kiertomatriisit ovat:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

**Määritelmä 2.25** (Paulin matriisit)**.** [1, Osa 2, Luku 1] Paulin matriisi $\sigma_i \in \mathbb{C}^{2\times 2}, i \in \{1, 2, 3\}$ on hermiittinen ja unitaarinen neliömatriisi. Nämä matriisit ovat määritelty seuraavasti:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

**Määritelmä 2.26** (Kommutaattori ja kommutaatiorelaatio)**.** [1, Osa 1, Luku 2] Oletetaan, että $A$ ja $B$ ovat lineaarikuvauksia kompleksisessa äärellisulotteisessa Hilbertin avaruudessa $\mathcal{H}$, ja olkoon $C$ niiden kommutaattori:

$$C = [A, B] = AB - BA. \tag{2.5}$$

Kommutaatiorelaatioksi kutsutaan yhtälöä, joka sisältää kommutaattorin $C$.

**Määritelmä 2.27** (Hermitoitu matriisi)**.** [17, Luku 5] Olkoon $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriisi. Jos matriisista $U$ otetaan transpoosi ja sen alkiot kompleksikonjugoidaan, silloin sanotaan, että $U^\dagger$ on hermitoitu matriisi. Sitä merkitään $U^\dagger$.

**Määritelmä 2.28** (Unitaarinen muunnos)**.** [14, Luku 4] Olkoon $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lineaarimuunnos. Sanotaan, että $U$ on unitaarinen, jos sille pätee:

$$U^\dagger = U^{-1} \quad \text{ja} \quad U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{I}. \tag{2.6}$$

Unitaarisen matriisin determinantti on 1.

*Huomautus* 2.29. Lineaarimuunnos, lineaarikuvaus ja matriisi ovat käsitteinä ekvivalentteja.

**Määritelmä 2.30** (Vinohermiittinen matriisi)**.** [21, Luku 5.2.2] Olkoon $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriisi. Sanotaan, että $U$ on vinohermiittinen, jos sille pätee:

$$A^\dagger = -A.$$

**Määritelmä 2.31** (Jälki)**.** [1, Osa 2, Luku 1] Olkoon $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ lineaarikuvaus. Jälki voidaan kirjoittaa summamuodossa:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn},$$

missä $a_{ij}$ on matriisin $A$ rivin $i$ ja sarakkeen $j$ alkio ja $i = j$. Sanotaan, että matriisin $A$ jälki on sen diagonaalialkioiden summa. Jälki toteuttaa myös hyödyllisen ominaisuuden kaikilla $n \times m$-matriiseilla $A, B$:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{ji}\right)\end{aligned}$$

Nyt, koska toisen summan sisällä on skalaarien vaihdannainen kertolasku, pätee:

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} B_{ji} \cdot A_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(BA)_{ii} \\ &= \operatorname{tr}(BA).\end{aligned}$$

**Määritelmä 2.32** (Diagonalisoituva matriisi)**.** [17, Luku 7.3] Olkoon $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kääntyvä neliömatriisi. Sanotaan, että $A$ on diagonalisoituva, jos on olemassa unitaarinen matriisi $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja diagonaalimatriisi $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siten, että pätee:

$$A = M\Lambda M^{\dagger},$$

missä $M$ on matriisi, jonka sarakkeina ovat $A$:n ominaisvektorit, $M^{\dagger}$ on hermitoitu matriisi $M$ ja $\Lambda$ on diagonaalimatriisi, jonka alkioina ovat $A$:n ominaisarvot.

**Lemma 2.33** (Matriisieksponentti)**.** *Olkoon $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisoituva matriisi. Silloin on olemassa unitaarinen matriisi $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja diagonaalimatriisi $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ siten, että matriisieksponentille pätee:*

$$e^{A} = e^{M\Lambda M^{\dagger}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M\Lambda M^{\dagger})^n}{n!} = Me^{\Lambda}M^{\dagger}.$$

*Todistus.* Todistetaan Taylorin sarjan avulla. Tässä oletetaan tunnetuksi, että matriisi korotettuna nollaan on identiteettimatriisi $\mathbb{I}$ ja nollan kertoma 0! on 1.

$$\begin{aligned}e^{M\Lambda M^{\dagger}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(M\Lambda M^{\dagger})^n}{n!} \\ &= \frac{1}{0!}(M\Lambda M^{\dagger})^0 + \frac{1}{1!}(M\Lambda M^{\dagger})^1 + \frac{1}{2!}(M\Lambda M^{\dagger})^2 + \frac{1}{3!}(M\Lambda M^{\dagger})^3 + ... \\ &= \mathbb{I} + M\Lambda M^{\dagger} + \frac{1}{2}M\Lambda M^{\dagger}M\Lambda M^{\dagger} + \frac{1}{6}M\Lambda M^{\dagger}M\Lambda M^{\dagger}M\Lambda M^{\dagger} + ... \\ &= \mathbb{I} + M\Lambda M^{\dagger} + \frac{1}{2}M\Lambda\mathbb{I}\Lambda M^{\dagger} + \frac{1}{6}M\Lambda\mathbb{I}\Lambda\mathbb{I}\Lambda M^{\dagger} + ...\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{I} + M\Lambda M^\dagger + \frac{1}{2}M\Lambda^2 M^\dagger + \frac{1}{6}M\Lambda^3 M^\dagger + ... \\
&= M(\mathbb{I} + \Lambda + \frac{1}{2}\Lambda^2 + \frac{1}{6}\Lambda^3 + ...)M^\dagger \\
&= M(\mathbb{I} + \Lambda + \frac{1}{2!}\Lambda^2 + \frac{1}{3!}\Lambda^3 + ...)M^\dagger \\
&= Me^\Lambda M^\dagger.
\end{aligned}
$$

□

**Lemma 2.34** (Matriisieksponentti diagonaalimatriisille)**.** *Olkoon $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonaalimatriisi. Jos $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ ovat matriisin $A$ diagonaalialkiot, niin silloin pätee:*

$$
e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{a_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & e^{a_n} \end{pmatrix}.
$$

*Todistus.* Todistukseen ei vaikuta matriisin $A$ ulottuvuus, joten yksinkertaistuksen vuoksi valitaan $2 \times 2$-matriisi, jonka diagonaalialkiot ovat $a, b \in \mathbb{C}$. Nyt saadaan:

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \\
&= \frac{1}{0!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^0 + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^1 + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2 + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^3 + ... \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + ... \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix} + ... \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2!}a^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2!}b^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3!}a^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3!}b^3 \end{pmatrix} + ...
\end{aligned}
$$

Summataan matriisit yhteen ja tunnistetaan eksponenttifunktion Taylorin sarjakehitelmä:

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 + a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + ... & 0 \\ 0 & 1 + b + \frac{1}{2!}b^2 + \frac{1}{3!}b^3 + ... \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

**Lemma 2.35** (Matriisieksponentin derivaatta)**.** *Olkoot $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriisi ja $\theta \in \mathbb{C}$ jokin muuttuja. Matriisieksponentin derivaatalle pätee:*

$$
\frac{d}{d\theta}e^{\theta A} = Ae^{\theta A}.
$$

*Todistus.* Todistetaan jälleen hyödyntämällä Taylorin sarjaa:

$$\frac{d}{d\theta}e^{\theta A} = \frac{d}{d\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\theta^n A^n.$$

Derivoinnin jälkeen summa kulkee termistä $n = 1$, sillä $\theta^0 = 1$ ja tämä vakio ei enää riipu $\theta$:sta, joten nyt voidaan kirjoittaa:

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}n\theta^{n-1}A^n.$$

Muistetaan, että $n$:n kertoma voidaan kirjoittaa myös $n! = n(n-1)!$, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\theta^{n-1}A^n)}{n(n-1)!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^{n-1}A^n}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}A\frac{\theta^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^{n-1}A^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Siirretään nyt saadun summan indeksöinti alkamaan indeksistä $n = 0$, mikä johtaa muotoon:

$$\begin{aligned}
&= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^n A^n}{n!}\\
&= Ae^{\theta A}.
\end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa tunnistettiin matriisieksponentin määritelmä. □

**Lemma 2.36.** *Jos $A$ on diagonalisoituva $n \times n$-matriisi, niin matriisieksponentille pätee* $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

*Todistus.* Koska $A$ voidaan diagonalisoida, matriisieksponentti voidaan kirjoittaa määritelmän 2.32 mukaisesti $e^A = e^{M\Lambda M^\dagger}$. Ratkaistaan matriisieksponentin determinantti ja muistetaan lemman 2.33 tulos:

$$\begin{aligned}
\det(e^{M\Lambda M^\dagger}) &= \det(Me^{\Lambda}M^\dagger)\\
&= \det(M)\det(e^{\Lambda})\det(M^\dagger).
\end{aligned}$$

Hyödynnetään sitten unitaarisen matriisin määritelmää 2.28:

$$\begin{aligned}
&= \det(e^{\Lambda}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n}\end{vmatrix} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_1}\cdots e^{\lambda_n}\\
&= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}.
\end{aligned}$$

Ratkaistaan seuraavaksi matriisin $A$ jälki ja käytetään jäljen määritelmän 2.31 ominaisuutta:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(M\Lambda M^\dagger)\\ &= \mathrm{tr}(\Lambda M M^\dagger)\\ &= \mathrm{tr}(\Lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.\end{aligned}$$

Eksponentioidaan yhtälön molemmat puolet, mikä johtaa tulokseen:

$$e^{\mathrm{tr}(A)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}.$$

Siis, $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. □

# 3 Ryhmäesitykset

## 3.1 Ryhmät

Ryhmäteoria on algebrallisten rakenteiden tutkimusta. Algebrallinen rakenne syntyy, kun joukossa määritellään yksi tai useampi laskutoimitus. Tämä laskutoimitus on sääntö, joka on määritelty aksiomaattisesti.

Ryhmäteoria voidaan käsittää myös symmetrian tutkimisena. Fysiikassa symmetrioiden tutkiminen on oleellista, sillä se sallii meidän ymmärtää systeemin käyttäytymistä, joka muuten olisi liian monimutkaista mallintaa. Tässä kappaleessa todistukset mukailevat Jokke Häsän ja Johanna Rämön teosta [11, Luku 1] sekä Thomas Judsonin teosta [12, Luku 3].

**Määritelmä 3.1** (Laskutoimitus)**.** [11, Määritelmä 2.1] Olkoon $A$ epätyhjä joukko. Joukon $A$ laskutoimitus on kuvaus $A \times A \to A$. Laskutoimitus liittää jokaiseen joukon $A$ alkiopariin $(a, b)$ jonkin yksikäsitteisen kolmannen alkion joukosta A. Tätä alkiota sanotaan laskutoimituksen tulokseksi. Asiayhteydestä riippuen tulosta usein merkitään $ab, a \cdot b, a + b, a * b$ tai $a \circ b$.

**Määritelmä 3.2** (Identiteettialkio)**.** [11, Määritelmä 2.9] Joukon $A$ alkiota $\iota$ kutsutaan identiteettialkioksi, jos:

$$\iota \cdot a = a \quad \text{ja} \quad a \cdot \iota = a, \qquad \text{kaikilla } a \in A.$$

**Määritelmä 3.3** (Käänteisalkio)**.** [11, Määritelmä 2.12] Oletetaan, että laskutoimituksella $\cdot$ on identiteettialkio $\iota$. Olkoon $a \in A$. Alkiota $a^{-1}$ kutsutaan alkion $a$ käänteisalkioksi, jos:

$$a \cdot a^{-1} = \iota \quad \text{ja} \quad a^{-1} \cdot a = \iota.$$

**Määritelmä 3.4** (Ryhmä)**.** [11, Määritelmä 3.1] Olkoon ryhmä $(G, \cdot)$ joukko, jolla on laskutoimitus $\cdot$ ja, joka toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. On olemassa identiteettialkio $\iota \in G$.

2. Jokaisella $g \in G$ on olemassa käänteisalkio $g^{-1}$.

3. Laskutoimitus $\cdot$ on liitännäinen, eli pätee $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, kaikille $a, b, c \in G$.

Toisinaan ryhmä $(G, \cdot)$ voidaan kirjoittaa yksinkertaisesti $G$.

**Esimerkki 3.5.** Seuraavat ovat ryhmiä.

1. $(\mathbb{C}, +), (\mathbb{R}, +)$ ja $(\mathbb{Z}, +)$ ovat ryhmiä, joiden identiteettialkio on 0.

2. $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ja $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ovat ryhmiä, joiden identiteettialkio on 1.

3. Vektoriavaruus $V$, jonka laskutoimitus on vektorien yhteenlasku $+$ ja identiteettialkio on nollavektori $0_V$, on ryhmä $(V, +)$.

**Propositio 3.6.** *Olkoon $G$ ryhmä. Silloin pätee:*

1. *Identiteettialkio on yksikäsitteinen, toisin sanoen jos $\iota, f \in G$ toteuttavat $\iota a = a\iota = a$ ja $fa = af = a$ kaikille $a \in G$, niin $\iota = f$.*

2. *Olkoon $a \in G$. Käänteisalkio on yksikäsitteinen tarkoittaen, jos $\iota \in G$ on ryhmän $G$ identiteettialkio ja $b, c \in G$ ovat alkion $a \in G$ käänteisalkioita, toisin sanoen $ab = ba = \iota$ ja $ac = ca = \iota$, niin $b = c$.*

3. *Olkoon $a \in G$. Silloin $(a^{-1})^{-1} = a$.*

4. *Olkoon $a \in G$. Jos $a^2 = a$, niin $a = \iota$.*

*Todistus.* Todistetaan ominaisuus kerrallaan.

1. Jos $\iota, f \in G$ ovat molemmat identiteettialkioita, niin
$$\iota = \iota f = f.$$

2. Käänteisalkion yksikäsitteisyys seuraa, koska
$$b = b\iota = b(ac) = (ba)c = \iota c = c.$$

3. Koska $aa^{-1} = a^{-1}a = \iota$ pätee, niin $a^{-1}$ on oltava alkion $a$ käänteisalkio.

4. Jos $a^2 = a$ pätee ja muistetaan ryhmän määritelmän 3.4 toinen aksiooma, niin silloin seuraa
$$\iota = a^{-1}a = a^{-1}a^2 = a^{-1}(aa) = (a^{-1}a)a = \iota a = a.$$

□

**Määritelmä 3.7** (Vaihdannainen ryhmä)**.** [11, Luku 3] Ryhmää $(G, \cdot)$ sanotaan vaihdannaiseksi, jos laskutoimitus $\cdot$ on vaihdannainen. Toisin sanoen, jos $a \cdot b = b \cdot a$, kaikilla $a, b \in G$. Vaihdannaisia ryhmiä kutsutaan myös Abelin ryhmiksi norjalaisen matemaatikon Niels Henrik Abelin (1802–1829) mukaan.

**Esimerkki 3.8.** Vektoriavaruus $V$, jonka laskutoimitus on vektorien yhteenlasku $+$, on vaihdannainen ryhmä $(V, +)$.

**Määritelmä 3.9** (Laskutoimitustaulu)**.** [11, Luku 2.3] Äärellisessä joukossa määritellyn laskutoimituksen kaikki mahdolliset tulokset voidaan merkitä niin kutsuttuun laskutoimitustauluun. Taulun sarakkeet ja rivit nimetään joukon $A$ alkioilla. Taulukon riville $a$ sarakkeeseen $b$ kirjoitetaan tulos $a \cdot b$.

**Esimerkki 3.10.** [11, Esimerkki 2.16] Tarkastellaan joukon $\{\iota, x, y\}$ laskutoimitusta, joka on määritelty seuraavalla laskutoimitustaululla:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \iota & x & y \\ \hline \iota & \iota & x & y \\ x & x & y & \iota \\ y & y & \iota & x \end{array} \tag{3.1}$$

Taulusta (3.1) nähdään, että alkio $\iota$ on identiteettialkio. Alkion $x$ käänteisalkio on $y$ ja alkion $y$ käänteisalkio $x$. Tarkistamalla jokaisen alkioparin tulos huomataan, että laskutoimitus on vaihdannainen.

**Määritelmä 3.11** (Aliryhmä)**.** [11, Määritelmä 3.11] Olkoon $(G, \cdot)$ ryhmä ja $H \subset G$. Sanotaan, että pari $(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ aliryhmä, jos se toteuttaa seuraavat ehdot jokaisella $g, h \in H$:

1. $g \cdot h \in H$,
2. ryhmän $(G, \cdot)$ identiteettialkio on osajoukossa $H$,
3. alkion $g$ käänteisalkio $g^{-1} \in H$.

Jos $(H, \cdot)$ on ryhmän $(G, \cdot)$ aliryhmä, merkitään $(H, \cdot) \leqslant (G, \cdot)$. Jos laskutoimitus tunnetaan, voidaan merkitä myös lyhyesti $H \leqslant G$. Jos $H$ on ryhmän $G$ aliryhmä ja pätee $H \neq G$, sanotaan, että $H$ on ryhmän $G$ aito aliryhmä ja silloin merkitään $H < G$.

**Esimerkki 3.12.** [11, Esimerkki 3.12] Jokaisella ryhmällä $G$ on aliryhmät $G$ ja $\{\iota\}$. Nämä aliryhmät ovat niin kutsutut triviaalit aliryhmät.

**Määritelmä 3.13** (Vasen sivuluokka)**.** [11, Määritelmä 10.1] Tarkastellaan ryhmää $G$ ja sen aliryhmää $H$. Joukkoa

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

sanotaan aliryhmän $H$ vasemmaksi sivuoluokaksi ja alkiota $a$ sivuluokan edustajaksi. Vasempien sivuluokkien joukkoa $\{aH : a \in G\}$ merkitään $G/H$.

**Määritelmä 3.14** (Oikea sivuluokka)**.** [11, Luku 10.4] Olkoon $G$ ryhmä ja $H$ sen aliryhmä. Joukkoa

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

kutsutaan aliryhmän $H$ oikeaksi sivuoluokaksi ja alkiota $a$ sivuluokan edustajaksi. Oikeiden sivuluokkien joukolle $\{Ha : a \in G\}$ käytetään merkintää $H\backslash G$.

*Huomautus* 3.15. [11, Luku 10.4] Yleisesti oikeat ja vasemmat sivuluokat eivät ole samat. Kuitenkin, jos ryhmä on vaihdannainen, tällöin kaikilla $a \in G$ pätee $aH = Ha$.

**Määritelmä 3.16** (Normaali aliryhmä)**.** [11, Määritelmä 15.4] Ryhmän $G$ aliryhmä $N$ on normaali, jos sen vasemmat ja oikeat sivuluokat ovat samat eli $aN = Na$ jokaisella $a \in G$.

**Määritelmä 3.17** (Tekijäryhmä)**.** [11, Määritelmä 15.8] Tarkastellaan ryhmää $G$ sekä sen normaalia aliryhmää $N$ ja $g, h \in G$. Ryhmää $G/N$ sanotaan ryhmän $G$ tekijäryhmäksi aliryhmän $N$ suhteen, kun laskutoimituksena on $gN \cdot hN = ghN$.

**Määritelmä 3.18** (Ryhmähomomorfismi)**.** [11, Määritelmä 18.1] Tarkastellaan ryhmiä $(G, \cdot)$ ja $(H, \cdot)$. Ryhmähomomorfismi on kuvaus $f : G \to H$, joka säilyttää ryhmän rakenteen seuraavasti:

$$f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2), \qquad \text{kaikilla } g_1, g_2 \in G.$$

Toisinaan ryhmähomomorfismia kutsutaan yksinkertaisesti homomorfismiksi, jos asiayhteydestä käy ilmi, että käsitellään ryhmiä.

**Määritelmä 3.19** (Isomorfismi)**.** [11, Luku 18] Bijektiivistä homomorfismia kutsutaan isomorfismiksi. Jos kyseinen isomorfismi on olemassa, silloin merkitään $G \cong H$, ja sanotaan, että ryhmät $G$ ja $H$ ovat isomorfisia.

**Propositio 3.20.** *Olkoot $G$ ja $H$ ryhmiä, sekä $f : G \to H$ homomorfismi. Silloin pätee:*

1. *jos ryhmän $G$ identiteettialkio on $\iota_G$ ja ryhmän $H$ identiteettialkio on $\iota_H$, niin $f(\iota_G) = \iota_H$,*
2. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}, \quad \forall a \in G,$
3. *jos $S$ on ryhmä ja $g : H \to S$ on homomorfismi, silloin kompositio $g \circ f : G \to S$ on homomorfismi.*

*Todistus.* Todistetaan kohta kerrallaan.

1. Kun $f$ on homomorfismi ja proposition 3.6 kohta 4 on voimassa, niin $f(\iota_G) = f(\iota_G \cdot \iota_G) = f(\iota_G) \cdot f(\iota_G) = \iota_H \cdot \iota_H = \iota_H^2 = \iota_H$.
2. Määritelmän 3.18 mukaisesti pätee, $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(\iota_G) = \iota_H$. Ja kääntäen $f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(\iota_G) = \iota_H$. Tästä seuraa $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

3. Olkoot $x_1, x_2 \in G$. Määritelmän 3.18 mukaisesti voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1x_2) = g(f(x_1x_2)) = g(f(x_1)f(x_2)) &= g(f(x_1))g(f(x_2)) \\ &= (g \circ f)(x_1)(g \circ f)(x_2).\end{aligned}$$

□

**Määritelmä 3.21** (Ryhmän toiminta)**.** [12, Luku 14.1] Tarkastellaan joukkoa $X$ ja ryhmää $(G, \cdot)$. Sanotaan, että ryhmän $(G, \cdot)$ vasen toiminta joukossa $X$ on homomorfismi $G \times X \to X$, siten että $(g, x) \mapsto gx$, missä:

1. $\iota x = x, \quad \forall x \in X,$
2. $(g_1g_2)x = g_1(g_2x), \quad \forall x \in X$ ja $\forall g_1, g_2 \in G.$

Vastaavasti sanotaan, että ryhmän $(G, \cdot)$ oikea toiminta joukossa $X$ on kuvaus $X \times G \to X$, siten että $(x, g) \mapsto xg$, missä:

1. $x\iota = x, \quad \forall x \in X,$
2. $x(g_2g_1) = (xg_2)g_1, \quad \forall x \in X$ ja $\forall g_1, g_2 \in G.$

## 3.2 Esitykset

**Määritelmä 3.22** (Yleinen lineaarinen ryhmä)**.** [14, Luku 1] Yleinen lineaarinen ryhmä muodostuu $n$-ulotteisen vektoriavaruuden $V$ kääntyvistä lineaarikuvauksista, joille pätee $L : V \to V$. Tätä ryhmää merkitään $GL(V) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$, missä $V = \mathbb{C}$ tai $V = \mathbb{R}$. Ryhmä $GL(V)$ ei ole Abelin ryhmä, sillä sen laskutoimitus on matriisikertolasku, joka ei yleisesti ole vaihdannainen.

**Määritelmä 3.23** (Erityinen lineaarinen ryhmä)**.** [9, Luku 1.2.1] Erityinen lineaarinen ryhmä muodostuu $n$-ulotteisen vektoriavaruuden $V$ kääntyvistä lineaarikuvauksista, joiden determinantti on 1. Ryhmää merkitään $SL(V)$. Lisäksi pätee $SL(V) \subset GL(V)$.

**Määritelmä 3.24** (Ryhmäesitys)**.** [7, Määritelmä 1.1] Olkoon ryhmä $G$ äärellinen. Ryhmäesitykseksi kutsutaan homomorfismia, jolle pätee:

$$\pi : G \to GL(V).$$

Ryhmäesitystä voidaan myös kutsua vain esitykseksi, jos asiayhteydeystä on selvää, että käsitellään ryhmiä.

**Esimerkki 3.25.** Determinanttifunktio on esitys $\det : GL(V) \to \mathbb{C} \setminus \{0\} = GL(\mathbb{C})$. Olkoot $A, B \in GL(V)$ ryhmiä. Silloin pätee:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

## 3.3 Redusoitumattomat esitykset

**Määritelmä 3.26** (Invariantti aliavaruus)**.** [3, Määritelmä 10.1.1] Tarkastellaan ryhmää $G$. Olkoon $\pi : G \to GL(V)$ esitys. Esityksen invariantti aliavaruus on vektorialiavaruus $W \subset V$, joka toteuttaa seuraavan ehdon kaikilla $g \in G$:

$$\pi(g)W \subset W.$$

**Esimerkki 3.27.** Triviaaliavaruus $\{0_V\}$ ja koko vektoriavaruus $V$ ovat invariantteja aliavaruuksia.

**Määritelmä 3.28** (Aliesitys)**.** [7, Luku 1.1] Olkoon $\pi : G \to GL(V)$ esitys. Olkoon $W \subset V$ invariantti aliavaruus. Lineaarinen kuvaus $\pi(g) : V \to V$ voidaan rajoittaa aliavaruuteen $W$ jokaiselle $g \in G$. Koska aliavaruus on invariantti, rajoite $\pi(g)|_W =: \tilde{\pi}(g)$ määrittelee kuvauksen $\tilde{\pi}(g) : W \to W$. Näin kuvaus $\tilde{\pi}(g) : G \to GL(W)$ on uusi esitys, ja tällöin sanotaan, että $W$ on aliesitys vektoriavaruudessa $V$.

**Määritelmä 3.29** (Suora summa)**.** [3, Lause 7.4.2] Olkoon $V$ vektoriavaruus. Olkoot $U, W \subset V$ aliavaruuksia. Silloin sanotaan, että $U + W$ on suora summa, jos jokainen vektori $U + W$:ssä voidaan ilmaista yksikäsitteisesti muodossa $u + w$, missä $u \in U, w \in W$. Suoraa summaa merkitään $U \oplus W$. Nyt pätee yhtäpitävästi:

1. $U + W$ on vektoriavaruuksien $U$ ja $W$ suora summa $U \oplus W$,
2. $U \cap W = \{0\}$,
3. $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W)$.

**Esimerkki 3.30.** Tarkastellaan vektoriavaruutta $V = \mathbb{R}^2$. Olkoot $U, W \subset V$ aliavaruuksia. Jos $U = \text{span}\{(1, 1)\}$ ja $W = \text{span}\{(1, -1)\}$, niin tällöin $U \cap W = \{\vec{0}\}$ ja $U \oplus W = \mathbb{R}^2$. Näiden aliavaruuksien leikkaus on origo $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$.

**Määritelmä 3.31** (Esitysten suora summa)**.** [13, Määritelmä 1.35] Olkoot $\pi_U : G \to GL(U)$ ja $\pi_W : G \to GL(W)$ ryhmän $G$ kaksi eri esitystä. Määritellään nyt alkiolle $g \in G$ kuvaus $\pi(g) : U \oplus W \to U \oplus W$ asettamalla

$$\pi(g)(u, w) := (\pi_U(g)u, \pi_W(g)w), \qquad u \in U, w \in W.$$

Nyt nähdään, että $\pi : G \to GL(U \oplus W)$ on esitys vektoriavaruudessa $U \oplus W$. Tätä esitystä kutsutaan esitysten $\pi_U$ ja $\pi_W$ suoraksi summaksi. Huomattavaa on myös, että esitykset $\pi_U$ ja $\pi_W$ ovat esityksen $\pi$ aliesityksiä.

**Määritelmä 3.32** (Redusoitumaton esitys)**.** [13, Määritelmä 1.44] Sanotaan, että ryhmän $G$ esitys $\pi : G \to GL(V)$ vektoriavaruudessa $V \neq \{0_V\}$ on redusoitumaton, jos esityksen ainoat invariantit aliavaruudet ovat triviaaliavaruus $\{0_V\} \subset V$ ja vektoriavaruus itse $V \subset V$. Redusoitumatonta esitystä ei voida hajottaa aliesityksiksi.

## 3.4 Unitaariset esitykset

**Lemma 3.33.** *Unitaarinen muunnos $U$ säilyttää sisätulon.*

*Todistus.* Näytetään, että tilojen $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ sisätulo määritelmän 2.23 täydellisessä sisätuloavaruudessa on yhtä suuri kuin tilojen $U|\psi\rangle, U|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ sisätulo. Koska määritelmä 2.28 on voimassa, voidaan kirjoittaa:

$$\langle U\varphi, U\psi\rangle = \langle\varphi|U^\dagger U|\psi\rangle = \langle\varphi|\mathbb{I}|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi, \psi\rangle.$$

□

**Määritelmä 3.34** (Unitaarinen ryhmä)**.** [1, Osa 2, Luku 1] Sanotaan, että $U(n)$ on unitaarinen ryhmä, joka sisältää kaikki kompleksiset $n \times n$ -matriisit. Nämä lineaarikuvaukset säilyttävät sisätulon avaruudessa $\mathbb{C}^n$:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}^i w^i, \quad v, w \in \mathbb{C}^n,$$

jossa merkintä $\bar{v}$ tarkoittaa $v$:n kompleksikonjugointia. Tämä ryhmä tunnetaan fysiikassa myös kaikkien kvanttimekaniikan symmetrioiden ryhmänä.

**Määritelmä 3.35** (Unitaarinen esitys)**.** [14, Luku 4] Tarkastellaan äärellistä ryhmää $G$. Sanotaan, että esitys $\pi$ on unitaarinen, jos sille pätee:

$$\pi : G \to U(n).$$

## 3.5 Schurin Lemma

Esitysteoriassa Schurin lemma on perustavanlaatuinen, sillä se on oleellinen työkalu redusoitumattomien esitysten löytämisessä. Käytännössä lemma todistaa, että kaksi esitystä, jotka ovat linkitettyinä toisiinsa matriisin avulla, niin tämä matriisi on joko nollamatriisi tai sitten se on kääntyvä neliömatriisi. Toisin sanoen jälkimmäisessä tapauksessa käsiteltävät esitykset ovat isomorfisia ja niiden ulottuvuus sekä ryhmän toiminta on sama. Schurin lemman todistus on tehty mukaillen Noah Millerin todistusta [14, Luku 2].

**Määritelmä 3.36** (Ryhmähomomorfismin kuva ja ydin)**.** [11, Luku 1.7] Tarkastellaan ryhmiä $G$ ja $H$. Olkoon $f : G \to H$ ryhmähomomorfismi. Sanotaan, että ryhmähomorfismin kuva on joukko

$$\mathrm{im}(f) := \{f(g) : g \in G\}$$

ja ryhmähomomorfismin ydin on joukko

$$\ker(f) := \{g \in G : f(g) = \iota_H\}.$$

**Määritelmä 3.37** (Esitysten homomorfismi)**.** [13, Määritelmä 1.32] Tarkastellaan ryhmää $G$ ja kompleksisia vektoriavaruuksia $V_1$ ja $V_2$. Olkoot $\pi_1 : G \to GL(V_1)$ ja $\pi_2 : G \to GL(V_2)$ esityksiä. Sanotaan, että lineaarikuvaus $T : V_1 \to V_2$ on esitysten homomorfismi, jos sille pätee:

$$T\pi_1(g) = \pi_2(g)T, \qquad \text{kaikilla} \quad g \in G.$$

Vektoriavaruutta, joka sisältää kaikki esitysten homomorfismit, merkitään $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$.

**Määritelmä 3.38** (Ekvivalentit esitykset)**.** [13, Määritelmä 1.33] Tarkastellaan esityksiä $\pi_1 : G \to GL(V_1)$ ja $\pi_2 : G \to GL(V_2)$. Sanotaan, että esitykset $\pi_1$ ja $\pi_2$ ovat ekvivalentteja, jos esitysten homomorfismi $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ on bijektio. Toisinaan puhutaan myös esitysten isomorfismista.

*Huomautus* 3.39. [14, Luku 1] Ekvivalentit esitykset voidaan määritellä myös matriisien avulla. Olkoot $\pi_1 : G \to GL(V_1)$ ja $\pi_2 : G \to GL(V_2)$ esityksiä. Sanotaan, että esitykset $\pi_1$ ja $\pi_2$ ovat ekvivalentteja, jos on olemassa lineaarikuvaus $A : V_1 \to V_2$ siten, että:

$$\pi_1(g) = A^{-1}\pi_2(g)A, \qquad \text{kaikilla} \quad g \in G.$$

**Esimerkki 3.40** (Ekvivalentit esitykset ovat pohjimmiltaan sama esitys)**.** Tarkastellaan esitystä $\pi : \mathbb{R} \to GL(\mathbb{R}^2)$. Nyt, olkoon $x \in (\mathbb{R}, +)$ ja $\pi$ määritelty siten, että:

$$\pi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tarkistetaan, että $\pi$ on homomorfismi:

$$\pi(x+y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pi(x)\pi(y).$$

Määritelmän 3.18 nojalla $\pi$ on homomorfismi. Olkoon $x \in (\mathbb{R}, +)$ ja $\hat{\pi}$ määritelty siten, että

$$\hat{\pi}(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \frac{-e^x+1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Varmistetaan, että $\hat{\pi}(x)$ on homomorfismi:

$$\hat{\pi}(x+y) = \begin{pmatrix} e^{(x+y)} & 0 \\ \frac{-e^{(x+y)}+1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \frac{-e^x+1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ \frac{-e^y+1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \hat{\pi}(x)\hat{\pi}(y).$$

Siis $\hat{\pi}$ on homomorfismi. Määritelmän 3.38 mukaisesti on olemassa $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ kääntyvä lineaarikuvaus, jolle tulisi päteä $\hat{\pi} = T^{-1}\pi T$. Määritellään nyt lineaarikuvaus $T$ siten, että:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ja ratkaistaan:

$$\begin{aligned}
\hat{\pi} &= T^{-1}\pi T \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \frac{-e^x+1}{2} & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Huomataan, että esitys $\hat{\pi}$ on siis vain representaatio toisessa kannassa esityksestä $\pi$. Itse asiassa määritelmä 3.38 merkitsee esityksen kannan vaihtoa ja pohjimmiltaan $\pi_1$ ja $\pi_2$ ovat sama esitys. Määritelmässä 3.38 voidaan siis kirjoittaa $\pi_1 = \pi_2$. Kaaviokuvassa (3.2) on visuaalisesti havainnollistettu operaattorin $T$ toimintaa.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\pi_1(g)"] \arrow[d, "T"] \arrow[rr, bend left, "\pi_2(g)"] & V_1 \arrow[d, "T"] \\
V_2 \arrow[r, "\pi_2(g)"] \arrow[u, bend left, "T^{-1}"] & V_2
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

**Lause 3.41** (Schurin Lemma)**.** *Jos määritelmä 3.37 on voimassa, silloin pätee:*

1. *Jos $\pi_1$ ja $\pi_2$ eivät ole ekvivalentteja esityksiä, silloin $T = \mathbf{0}$.*
2. *Jos $\pi_1 = \pi_2$, silloin $T = \lambda\mathbb{I}$ jollekin $\lambda \in \mathbb{C}$.*

*Todistus.* Todistetaan kohta kerrallaan.

1. Tiedetään, että $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ on lineaarikuvaus. Esitysten homomorfismin $T$ ydin ja kuva ovat:

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \{v_1 \in V_1 : T(v_1) = 0_{V_2}\}, \\
\mathrm{im}(T) &= \{T(v_1) : v_1 \in V_1\}.
\end{aligned}$$

   Lisäksi muistetaan $T$:n määritelmä 3.37. Otetaan nyt alkio $v_1$ joukosta $\ker(T)$ ja operoidaan siihen lineaarikuvauksella $T\pi_1(g)$, jolloin huomataan, että:

$$\begin{aligned}
T\pi_1(g)v_1 = (T\pi_1(g))v_1 = (\pi_2(g)T)v_1 = \pi_2(g)T(v_1) = \pi_2(g)0_{V_2} = 0_{V_2} \\
\Rightarrow \pi_1(g)v_1 \in \ker(T), \quad \forall g \in G, \quad \forall v_1 \in \ker(T).
\end{aligned}$$

   Toisin sanoen $\pi_1(g)\ker(T) \subset \ker(T)$. Ja, koska $\pi_1(g)$ on kääntyvä matriisi kaikilla $g \in G$, niin pätee myös $\ker(T) \subset \pi_1(g)\ker(T)$. Siis $\pi_1(g)\ker(T) = \ker(T)$.

Tarkastellaan nyt esitysten homomorfismin $T$ kuvaa. Koska kaikille $v_2 \in \mathrm{im}(T)$ on olemassa $v_1 \in V_1$ siten, että $T(v_1) = v_2$, niin operoimalla esityksellä $\pi_2(g)$ vektoriin $v_2$ saadaan:

$$\pi_2(g)v_2 = \pi_2(g)T(v_1) = (\pi_2(g)T)v_1 = T\pi_1(g)v_1 \in \mathrm{im}(T).$$

Siis $\pi_2(g)\mathrm{im}(T) \subset \mathrm{im}(T)$. Samasta syystä kuin joukon $\ker(T)$ tapauksessa, pätee myös $\mathrm{im}(T) \subset \pi_2(g)\mathrm{im}(T)$, jolloin $\pi_2(g)\mathrm{im}(T) = \mathrm{im}(T)$.

Määritelmän 3.28 mukaisesti $\ker(T)$ on esityksen $\pi_1$ aliesitys ja $\mathrm{im}(T)$ on esityksen $\pi_2$ aliesitys. Nyt, koska $\pi_1$ ja $\pi_2$ ovat redusoitumattomia esityksiä, niiden ainoat invariantit aliavaruudet ovat triviaaliavaruus $\{ 0_{V_1}\} \subset V_1$ ja $\{ 0_{V_2}\} \subset V_2$ sekä koko vektoriavaruus $V_1 \subset V_1$ ja $V_2 \subset V_2$. Siten meillä on kaksi vaihtoehtoa:

(a) Jos $\ker(T) = \{ 0_{V_2}\}$ ja $\mathrm{im}(T) = V_2$, niin silloin $T$ on bijektiivinen kuvaus, jolloin määritelmän 3.38 kohdan 2. mukaan esitysten $\pi_1$ ja $\pi_2$ tulisi olla ekvivalentteja, mikä johtaa ristiriitaan.

(b) Jos $\ker(T) = V_2$ ja $\mathrm{im}(T) = \{ 0_{V_2}\}$, silloin $T = \mathbf{0}$.

2. Esitysten yhtäsuuruus $\pi_1 = \pi_2$ merkitsee myös $V_1 = V_2$. Merkitään siis $V_1 = V_2 = V$, jolloin meillä on esitys $\pi : G \to GL(V)$ kompleksiselle vektoriavaruudelle $V$. Lisäksi homomorfismi $T$ kommutoi kaikkien esitysten alkioiden kanssa, tarkoittaen:

$$T\pi(g) = \pi(g)T, \qquad \text{kaikilla } g \in G.$$

Algebran peruslauseen nojalla [10] on olemassa $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ siten, että

$$Tv = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad (T - \lambda\mathbb{I})v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(T - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

Jotta tällä karakteristisella polynomilla on olemassa ratkaisuja, tulee joukon $\ker(T - \lambda\mathbb{I})$ olla vähintään 1-ulotteinen.

Nyt, jos $v \in \ker(T - \lambda\mathbb{I})$, silloin

$$\begin{aligned}(T - \lambda\mathbb{I})\pi(g)v = \pi(g)(T - \lambda\mathbb{I})v = \pi(g)0_V = 0_V \\ \Rightarrow \pi(g)v \in \ker(T - \lambda\mathbb{I}).\end{aligned}$$

Siis $\ker(T - \lambda\mathbb{I})$ on esityksen $\pi_1$ aliesitys. Ja, koska $\pi_1$ on redusoitumaton esitys ja $\ker(T - \lambda\mathbb{I})$ on vähintään 1-ulotteinen, silloin on oltava $\ker(T - \lambda\mathbb{I}) = V$ ja $\mathrm{im}(T - \lambda\mathbb{I}) = \{ 0_V\}$, mistä seuraa $T = \lambda\mathbb{I}$.

□

**Seurauslause 3.42** (Schurin Lemma)**.** *Jos $G$ on vaihdannainen ryhmä, niin silloin kaikki sen redusoitumattomat esitykset $\pi$ kompleksisessa vektoriavaruudessa $V$ ovat 1-ulotteisia.*

*Todistus.* Vaihdannaisen ryhmän $G$ esitykselle $\pi$ pätee:

$$\pi(g_1)\pi(g_2) = \pi(g_2)\pi(g_1), \qquad \text{kaikilla } g_1, g_2 \in G.$$

Schurin Lemman 3.41 mukaan kaikki esitykset $\pi$ ovat muotoa:

$$\pi(g) = \lambda_g \mathbb{I}, \quad g \in G.$$

Nyt, olkoon $\pi_a(g)$ 1-ulotteinen esitys. Ja, koska $\pi_a$ on yksiulotteinen esitys eli $V = \mathbb{C}$, niin $GL(V) = GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja esitykselle $\pi_a(g)$ pätee:

$$\pi_a(g) = \lambda_g.$$

Tarkastellaan sitten 2-ulotteista esitystä $\pi_b(g)$. Tämä esitys on muotoa:

$$\pi_b(g) = \begin{pmatrix} \lambda_g & 0 \\ 0 & \lambda_g \end{pmatrix}.$$

Kaksiulotteisen esityksen tapauksessa vektori $v = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$ virittää aidon aliavaruuden, johon rajoittumalla saadaan muodostettua aliesitys $\pi_b(g)(c, 0) = (\lambda_g c, 0) \in \operatorname{span}\{(1, 0)\}$ kaikilla $c \in \mathbb{C}$. Siis $\pi_b$ ei ole redusoitumaton esitys. Tästä seuraa, että $\pi(g) = \lambda_g \mathbb{I}$ on redusoitumaton esitys vain silloin, kun $\mathbb{I}$ on $1 \times 1$-identiteettimatriisi. □

**Seurauslause 3.43** (Schurin Lemma)**.** *Oletetaan, että esitys $\pi : G \to GL(V)$ on redusoituva, jolloin se voidaan hajottaa redusoitumattomiin esityksiin $\pi_k : G \to GL(V_k)$ seuraavasti:*

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \pi_1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_2(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi_n(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

*missä kaikki esitykset $\pi_k$ ovat keskenään ei-ekvivalentteja. Jos esitysten homomorfismi $H : V \to V$ kommutoi koko esityksen $\pi(g)$ kanssa, tällöin pätee:*

$$\pi(g)H = H\pi(g), \qquad \textit{kaikilla } g \in G.$$

*Silloin lineaarikuvaus $H$ tulee muotoon:*

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{I} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \textit{joillakin } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

*Todistus.* Olkoon $V_k \subset V$ esityksen $\pi_k$ aliesitys. Määritellään projektio-operaattori siten, että $P_k : V \to V$ on lineaarikuvaus, jolle pätee $P_k v = v$, jos $v \in V_k$, $P_k v = 0$ ja, jos $v \in V_k^\perp$ kaikille $k \in \mathbb{N}$. Nyt saadaan:

$$\begin{aligned}(P_kHP_l)\pi(g) &= P_kH(P_l\pi(g)) = P_kH\pi(g)P_l = P_k(H\pi(g))P_l \\ &= P_k\pi(g)HP_l = (P_k\pi(g))HP_l \\ &= \pi(g)(P_kHP_l), \qquad \forall g \in G,\ \forall k,l \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Operaattori $(P_kHP_l)$ kommutoi siis kaikkien esityksen $\pi$ alkioiden kanssa. Lineaarikuvausta $(P_kHP_l)$ voidaan myös tarkastella kuvauksena $(P_kHP_l) : V_l \to V_k$ ja tällöin pätee:

$$(P_kHP_l)\pi_l(g) = \pi_k(g)(P_kHP_l), \qquad \text{kaikilla } g \in G.$$

Schurin Lemman 3.41 nojalla, jos $\pi_k$ ja $\pi_l$ eivät ole ekvivalentteja esityksiä, niin silloin $(P_kHP_l) = \mathbf{0}$. Jos taas $\pi_k$ ja $\pi_l$ ovat ekvivalentteja esityksiä ja esimerkin 3.40 mukaisesti pätee $\pi_k = \pi_l$, niin silloin $l = k$ ja $(P_kHP_k) = \lambda\mathbb{I}$, jollakin $\lambda = \lambda_k \in \mathbb{C}$. □

# 4 Lien ryhmät $SO(3)$ ja $SU(2)$

Lien ryhmä voidaan karkeasti käsittää jatkuvana ryhmänä, sillä tämän ryhmän laskutoimitus ja käänteisoperaatio ovat differentioituvia jokaisessa ryhmän pisteessä. Kvanttimekaanisen spinin kannalta olennaiset Lien ryhmät ovat $SO(3)$ ja $SU(2)$.

## 4.1 Lien ryhmät

**Määritelmä 4.1** (Lien ryhmä)**.** [20, Määritelmä 3.1] Tarkastellaan ryhmää $(G, \cdot)$. Sanotaan, että $(G, \cdot)$ on Lien ryhmä, jos se on monisto (määritelmä 2.18), ja sen laskutoimitus $G \cdot G \to G$ ja käänteisoperaatio $^{-1} : G \to G$ ovat sileitä kuvauksia.

**Esimerkki 4.2.** [1, Osa 2, Luku 1] Määritelmän 3.34 unitaarinen ryhmä $U(n)$ on Lien ryhmä.

**Määritelmä 4.3** (Erityinen unitaarinen ryhmä $SU(n)$)**.** [9, Luku 1.2.2] $SU(n)$ on erityinen unitaarinen ryhmä ja $SU(n) \subset U(n)$. Tätä Lien ryhmää kutsutaan erityiseksi, sillä sen kaikkien matriisien determinantti on 1.

**Määritelmä 4.4** (Ortogonaalinen ryhmä $O(n)$)**.** [1, Osa 2, Luku 1] Ortogonaalinen ryhmä $O(n)$ sisältää kaikki kääntyvät $n \times n$ -matriisit, joille pätee $M^T = M^{-1}$, missä $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $M^T$ on matriisin $M$ transpoosi.

**Määritelmä 4.5** (Erityinen ortogonaalinen ryhmä $SO(n)$)**.** [1, Osa 2, Luku 1] $SO(n)$ on erityinen ortogonaalinen ryhmä ja $SO(n) \subset O(n)$. Ryhmään kuuluvien matriisien determinantti on 1.

**Määritelmä 4.6** (Lien matriisiryhmä)**.** [9, Määritelmä 1.4] Olkoon $G$ Lien ryhmä ja $G \leqslant GL(V)$ suljettu. Sanotaan, että $G$ on Lien matriisiryhmä, jos sille pätee: Jos $A_m$ on mielivaltainen jono $G$:ssä ja $A_m$ suppenee johonkin matriisiin $A$, niin silloin joko $A \in G$ tai $A$ ei ole kääntyvä.

**Esimerkki 4.7.** [9, Luku 1.2] Ryhmät $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $GL(V)$ ja $SL(V)$ ovat Lien matriisiryhmiä.

## 4.2 Lien algebrat

Lien algebra on tärkeä työkalu Lien ryhmien tutkimisessa. Kun muistetaan Lien ryhmän määritelmä 4.1, niin käy ilmi, että Lien ryhmän rakenne on melkeinpä kokonaan määritelty sen mukaan, miten se käyttäytyy lähellä ryhmän identiteettiä.

**Määritelmä 4.8** (Lien algebra)**.** [4, Määritelmä 1.1] Lien algebra on vektoriavaruus $\mathfrak{g}$, jolla on bilineaarinen operaatio $[\cdot\,,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ siten, että kaikille $x, y, z \in \mathfrak{g}$ pätee:

1. $[x, y] = -[y, x]$,
2. $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$,
3. $[x, x] = 0$,
4. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$.

Ensimmäistä ehtoa sanotaan antikommutatiivisuudeksi ja toista Jacobin identiteetiksi. Bilineaarista operaatiota $[\cdot, \cdot]$ kutsutaan myös Lien sulkeiksi.

*Huomautus* 4.9. [21, Luku 2.3] Fysiikassa Lien algebran $\mathfrak{g}$ alkioista käytetään myös nimitystä generaattori.

**Propositio 4.10.** *[20, Esimerkki 3.5] Mikä tahansa vektoriavaruus $V$ on Lien algebra, jos jokainen Lien sulkeista asetetaan olemaan* 0*. Tällaista Lien algebraa sanotaan vaihdannaiseksi Lien algebraksi.*

*Todistus.* Olkoon $V$ vektoriavaruus, jolla on bilineaarinen operaatio $[\cdot\,,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Asetetaan nämä Lien sulkeet olemaan 0, niin määritelmän 4.8 ensimmäinen ja kolmas ehto toteutuvat triviaalisti:

$$\begin{aligned} &[x, y] = 0 = -[y, x], \\ &[x, x] = 0, \qquad \forall x, y \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Myös toinen ja neljäs ehto toteutuvat määritelmässä 4.8, sillä pätee:

$$\begin{aligned} &[[x, y], z] = 0, [[y, z], x] = 0, [[z, x], y] = 0, \\ &\quad \Rightarrow [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0, \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Kuten myös,

$$[x + y, z] = 0 = [x, z] + [y, z], \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

□

**Määritelmä 4.11** (Eksponenttikuvaus)**.** [9, Määritelmä 3.40] Olkoon $G$ Lien matriisiryhmä, jolla on Lien algebra $\mathfrak{g}$. Määritellään eksponenttikuvaus siten, että:

$$e : \mathfrak{g} \to G.$$

Toisin sanoen, eksponenttikuvaus ryhmälle $G$ on lemman 2.33 matriisieksponentti, joka on rajoitettu $G$:n Lien algebralle $\mathfrak{g}$.

**Määritelmä 4.12** (Lien matriisiryhmän Lien algebra)**.** [9, Määritelmä 3.18] Olkoon $G$ Lien matriisiryhmä. Ryhmän $G$ Lien algebra $\mathfrak{g}$ on kaikkien matriisien $X$ joukko siten, että kaikille $t \in \mathbb{R}$ pätee $e^{tX} \in G$.

**Esimerkki 4.13.** Esimerkin 4.7 Lien matriisiryhmien Lien algebrat ovat $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$, $\mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{gl}(V)$ ja $\mathfrak{sl}(V)$.

## 4.3 $SO(3)$ ja $SU(2)$

**Määritelmä 4.14** (Lien ryhmä $SO(3)$)**.** [1, Osa 2, Luku 1] Lien ryhmä $SO(3) \subset GL(\mathbb{C}^3)$ on määritelty seuraavasti:

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times 3} : R^{-1} = R^T, \det R = +1\}.$$

**Määritelmä 4.15** (Lien ryhmä $SU(2)$)**.** [21, Luku 3] Lien ryhmä $SU(2)$ on määritelty seuraavasti:

$$SU(2) = \{U \in \mathbb{C}^{2\times 2} : U^{-1} = U^\dagger, \det U = +1\}.$$

Lien ryhmillä $SU(2)$ ja $SO(3)$ on yhteys toisiinsa, ja tämä yhteys on se, jossa kvanttimekaaninen spin elää. Pureudutaan tähän yhteyteen tarkemmin tutkimalla $SO(3)$:n ja $SU(2)$:n Lien algebroja.

## 4.4 $\mathfrak{so}(3)$ ja $\mathfrak{su}(2)$

**Määritelmä 4.16** (Lien algebra $\mathfrak{so}(3)$)**.** [21, Luku 6.1] Jokaiselle Lien algebran $\mathfrak{so}(3)$ alkiolle $g \in \mathfrak{so}(3)$ pätee:

$$\mathfrak{so}(3) = \{M \in \mathbb{R}^{3\times 3} : M^T = -M,\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}.$$

**Määritelmä 4.17** (Lien algebra $\mathfrak{su}(2)$)**.** [21, Luku 6.1] Jokaiselle Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$ alkiolle $g \in \mathfrak{su}(2)$ pätee:

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} : X^\dagger = -X,\ \mathrm{Tr}(X) = 0\}.$$

**Määritelmä 4.18** (Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$ kanta)**.** [14, Luku 11] Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$ kannan muodostavat seuraavat matriisit:

$$X_1 = -\frac{i}{2}\sigma_1, \quad X_2 = -\frac{i}{2}\sigma_2, \quad X_3 = -\frac{i}{2}\sigma_3,$$

missä $\sigma_i, i \in \{1, 2, 3\}$, on määritelmän (2.4) Paulin matriisi. Toisin sanoen, nämä ovat ryhmän $SU(2)$ generaattorit.

**Lemma 4.19.** *Jos $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin $g \in U(n)$ ominaisarvo, niin pätee:*

$$\lambda = e^{i\theta}, \quad \textit{jollain } \theta \in [0, 2\pi[. \tag{4.1}$$

*Todistus.* Nyt siis $gv = \lambda v$ jollain vektorilla $v \neq \vec{0} \in V$. Koska $g$ on unitaarinen, se säilyttää sisätulon:

$$\langle gv, gv \rangle = \langle v, v \rangle = \| v \|^2 .$$

Toisaalta ominaisvektorin määritelmästä seuraa:

$$\langle gv, gv \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = |\lambda|^2 \| v \|^2 .$$

On siis oltava $|\lambda|^2 = 1$ eli $\lambda$ voidaan kirjoittaa muodossa (4.1). □

**Lemma 4.20.** *Jokainen $g \in SU(2)$ voidaan kirjoittaa muodossa $g = e^{X_i}$ jollain $X_i \in \mathfrak{su}(2)$.*

*Todistus.* Olkoon $g \in SU(2)$. Tällöin määritelmän 4.15 $g^\dagger = g^{-1}$ ja $\det(g) = 1$. Matriisi $g$ voidaan diagonalisoida määritelmän 2.32 mukaisesti, joten $g = M\Lambda M^\dagger$. Lemman 4.19 nojalla $\Lambda$:n ominaisarvot ovat muotoa $\lambda_i = e^{i\theta_i}$. Tästä seuraa:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \\
&= \exp(\mathrm{diag}(i\theta_1, i\theta_2).
\end{aligned}$$

Merkitään:

$$D := \mathrm{diag}(i\theta_1, i\theta_2).$$

Nyt on voimassa lemman 2.33 mukaisesti $g = M\Lambda M^\dagger = Me^D M^\dagger = e^{MDM^\dagger}$. Seuraavaksi halutaan todistaa, että $MDM^\dagger \in \mathfrak{su}(2)$ eli määritelmän 4.17 ehdot pitävät:

1. Matriisi $g$ on unitaarinen, joten sille pätee määritelmän (2.6) nojalla:

$$\begin{aligned}
g^\dagger = g^{-1} &= (Me^D M^\dagger)^{-1} \\
&= (M^\dagger)^{-1} e^{-D} (M)^{-1} \\
&= (M^{-1})^{-1} e^{-D} (M)^\dagger \\
&= Me^{-D} M^\dagger.
\end{aligned}$$

   Toisaalta voidaan kirjoittaa:

$$g^\dagger = (Me^D M^\dagger)^\dagger = (M^\dagger)^\dagger e^{D^\dagger} M^\dagger = Me^{D^\dagger} M^\dagger.$$

   Saadaan siis $g^\dagger = Me^{-D} M^\dagger = Me^{D^\dagger} M^\dagger$ eli $-D = D^\dagger$, josta seuraa $(MDM^\dagger)^\dagger = MD^\dagger M^\dagger = M(-D)M^\dagger$.

2. Koska matriisin $g$ determinantti on 1 ja muistetaan lemman 2.36 tulos, saadaan:

$$\begin{aligned} 1 = \det(g) &= \det(Me^D M^\dagger) \\ &= \det(M)\det(e^D)\det(M^\dagger) \\ &= \det(M)e^{\mathrm{tr}(D)}\det(M^{-1}) \\ &= \det(M)e^{\mathrm{tr}(D)}\det(M)^{-1} = e^{\mathrm{tr}(D)}. \end{aligned}$$

Siis täytyy päteä $\mathrm{tr}(D) = 0$. Määritelmän 4.17 ehdot täyttyvät, joten $MDM^\dagger \in \mathfrak{su}(2)$.

*Huomautus* 4.21. Lemma 4.20 pätee myös ryhmälle $SO(3)$ ja sen Lien algebralle $\mathfrak{so}(3)$. Todistus on täsmälleen sama, kunhan transpoosin kompleksikonjugaatti muutetaan transpoosiksi.

□

**Propositio 4.22** (Lien algebran $\mathfrak{so}(3)$ kanta)**.** *Lien ryhmän $SO(3)$ Lien algebran $\mathfrak{so}(3)$ kannan muodostavat seuraavat generaattorit:*

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Todistus.* Todistetaan suoralla laskulla. Lasketaan tässä generaattorimatriisi $L_1$, loput voidaan todistaa samaan tapaan. Koska $SO(3)$:n alkio $R_x(\theta)$ tunnetaan, ja se on määritelmän (2.1) mukainen, hyödynnetään lemmaa 2.35 käänteisesti, jolloin saadaan ratkaistua $L_1 \in \mathfrak{so}(3)$:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{d}{d\theta} R_x(\theta)\bigg|_{\theta=0} \\ &= \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\bigg|_{\theta=0} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{d}{d\theta}1\big|_{\theta=0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{d\theta}\cos\theta\big|_{\theta=0} & \frac{d}{d\theta}-\sin\theta\big|_{\theta=0} \\ 0 & \frac{d}{d\theta}\sin\theta\big|_{\theta=0} & \frac{d}{d\theta}\cos\theta\big|_{\theta=0} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Propositio 4.23.** *Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$ generaattorien $X_j$ kommutaatiorelaatiot ovat:*

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

*Todistus.* Todistus on suora lasku. Lasketaan tässä kommutaatiorelaatio $[X_1, X_2]$. Kaksi muuta voidaan todistaa samaan tapaan. Määritelmän 2.26 mukaisesti voidaan laskea:

$$\begin{aligned}
[X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 \\
&= -\frac{i}{2}\sigma_1\left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right) - \left(-\frac{i}{2}\sigma_2\right)\left(-\frac{i}{2}\sigma_1\right) \\
&= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\left(-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right) - \left(-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right)\left(-\frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{i^2}{4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} - \frac{i^2}{4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix} \\
&= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \\
&= X_3.
\end{aligned}$$

□

**Määritelmä 4.24** (Kompleksinen Lien algebra $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$)**.** [14, Luku 11] Vaikka kompleksiset lineaarikombinaatiot $\mathfrak{su}(2)$:n generaattoreista $X_j$ eivät kuulu $\mathfrak{su}(2)$:een, voidaan määritellä kompleksinen Lien algebra $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$. Tällöin kompleksiset lineaarikombinaatiot generaattoreista $X_j$ ovat myös sallittuja, tarkoittaen:

$$S_j \equiv iX_j.$$

Kompleksisen Lien algebran $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ kanta on:

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{X_1, X_2, X_3\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3\}.$$

**Lause 4.25.** *Lien algebrat* $\mathfrak{su}(2)$ *ja* $\mathfrak{so}(3)$ *ovat isomorfisia.*

*Todistus.* Todistus on suora lasku. Ratkaistaan proposition 4.22 mukaisten generaattorien $L_j$ kommutaatiorelaatiot, jotta voidaan tutkia, miten kanta kuvautuu avaruudelta toiselle. Lasketaan tässä yksi kommutaatiorelaatio, muut relaatiot voidaan laskea samaan tapaan. Lasketaan kommutaatiorelaatio generaattorien $L_1$ ja $L_2$ välillä:

$$[L_1, L_2] = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= L_3.
\end{aligned}
$$

Kommutaatiorelaatiot ovat:

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2.$$

Ja nyt, jos verrataan saatuja relaatioita proposition 4.23 $X_j$:n kommutaatiorelaatiohin, huomataan, että Lien algebran $\mathfrak{su}(2)$:n generaattorien $X_j$ kommutaattiorelaatiot ja Lien algebran $\mathfrak{so}(3)$:n generaattorien $L_j$ kommutaattiorelaatiot vastaavat toisiaan. Tästä seuraa $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ eli $\mathfrak{su}(2)$ ja $\mathfrak{so}(3)$ ovat isomorfisia. Käytännössä tämä tulos tarkoittaa sitä, että lineaarikuvaus, joka kuvaa $\mathfrak{su}(2)$:n kannan $\mathfrak{so}(3)$:n kannaksi on Lien algebran isomorfismi. □

## 4.5 Lien algebran esitykset

Kappaleessa 3 on määritelty esitys ryhmähomomorfismina, joka säilyttää ryhmän laskutoimituksen ja maalijoukkona on yleinen lineaarinen ryhmä $GL(V)$. Samalla tavalla voidaan määritellä Lien algebralle esitys, joka säilyttää Lien sulkeet. Tämän alaluvun todistukset on tehty mukaillen viitettä [14, Kappale 9].

**Määritelmä 4.26** (Lien algebran esitys)**.** [21, Luku 5.4] Tarkastellaan esitystä $\pi : G \to GL(V)$. Tällöin jollekin $X \in \mathfrak{g}$ esitys $\pi(e^{tX})$ on polku ryhmässä $GL(V)$, joka kulkee ryhmän identiteetin läpi ajanhetkellä $t = 0$. Tämän polun nopeusvektori ajanhetkellä $t = 0$ on siten Lien algebran $\mathfrak{gl}(V)$ alkio, toisin sanoen:

$$\frac{d}{dt}\pi(e^{tX})\bigg|_{t=0} \in \mathfrak{gl}(V).$$

Voidaan siis määritellä kuvaus

$$\pi' : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V),$$

siten, että

$$\pi'(X) \equiv \frac{d}{dt}\pi(e^{tX})\bigg|_{t=0}. \tag{4.2}$$

**Lause 4.27** (Lien algebran esityksen ominaisuudet)**.** *Olkoon $\pi : G \to GL(\mathbb{C})$ Lien ryhmän esitys. Tällöin Lien algebran esitys 4.26 toteuttaa seuraavat ominaisuudet:*

*1.* $\pi(e^{tX}) = e^{t\pi'(X)}, \quad \forall X \in \mathfrak{g},$

*2.* $\pi'(gXg^{-1}) = \pi(g)\pi'(X)\pi(g)^{-1}, \quad \forall g \in G,\ X \in \mathfrak{g},$

*3.* $\pi'(\alpha X + \beta Y) = \alpha\pi'(X) + \beta\pi'(Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},$

*4.* $\pi'([X, Y]) = [\pi'(X), \pi'(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$

*Todistus.* Todistetaan ominaisuus kerrallaan.

1. Lien algebran esitykselle pätee

$$\frac{d}{dt}\pi(e^{tX}) = \frac{d}{dt}\pi(e^{(t+0)X}), \quad \text{kaikilla } X \in \mathfrak{g}.$$

Jos merkitään $s = 0$, niin derivoimalla sen suhteen saadaan,

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{ds}\pi(e^{(t+s)X})\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\pi(e^{tX}e^{sX})\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\pi(e^{tX})\pi(e^{sX})\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\pi(e^{sX})\Big|_{s=0}\ \pi(e^{tX}) \\
&= \pi'(X)\pi(e^{tX}).
\end{aligned}$$

Tästä nähdään, että $g(t) = \pi(e^{tX})$ toteuttaa differentiaaliyhtälön $\frac{d}{dt}g = g\pi'(X)$, jonka alkuehtona on ryhmähomomorfismista seuraava ehto $g(0) = 1$. Tällä differentiaaliyhtälöllä on siten yksikäsitteinen ratkaisu

$$g(t) = e^{t\pi'(X)},$$

josta seuraa, että

$$g(t) = \pi(e^{tX}) = e^{t\pi'(X)}.$$

2. Ensimmäisen ominaisuuden perusteella voidaan kirjoittaa

$$e^{t\pi'(gXg^{-1})} = \pi(e^{tgXg^{-1}}).$$

Oikeanpuoleiseen eksponenttitermiin voidaan hyödyntää Taylorin sarjakehitelmää siten, että

$$\begin{aligned}
e^{tgXg^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tgXg^{-1})^k \\
&= \mathbf{1} + \frac{t^1}{1!}(gXg^{-1})^1 + \frac{t^2}{2!}(gXg^{-1})^2 + ... \\
&= g(\mathbf{1} + tX + \frac{t^2}{2}X^2 + ...)g^{-1} = ge^{tX}g^{-1},
\end{aligned}$$

josta saadaan

$$\begin{aligned} e^{t\pi'(gXg^{-1})} &= \pi(ge^{tX}g^{-1}) \\ &= \pi(g)\pi(e^{tX})\pi(g^{-1}) \\ &= \pi(g)\pi(e^{tX})\pi(g)^{-1} \\ &= \pi(g)e^{t\pi'(X)}\pi(g)^{-1}. \end{aligned}$$

Derivoidaan nyt yhtälöä puolittain muuttujan $t$ suhteen ja asetetaan $t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{t\pi'(gXg^{-1})}\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\pi(g)e^{t\pi'(X)}\pi(g)^{-1})\bigg|_{t=0} \\ \pi'(gXg^{-1}) &= \pi(g)\pi'(X)\pi(g)^{-1}. \end{aligned}$$

3. Ilmaistaan ensin $\pi'(\alpha X + \beta Y)$ Lien algebran määritelmän (4.2) avulla ja hyödynnetään vakiolla kertomisen lineaarisuutta:

$$\begin{aligned} \pi'(\alpha X + \beta Y) &= \frac{d}{dt}\pi(e^{t(\alpha X+\beta Y)})\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\pi(e^{t\alpha X+t\beta Y})\bigg|_{t=0}. \end{aligned}$$

Yleisesti matriisit $X$ ja $Y$ eivät kommutoi, joten hyödynnetään Baker–Campbell–Hausdorff -kaavaa [2] sekä ryhmähomomorfismin ominaisuuksia, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt}\pi(e^{t\alpha X+t\beta Y+\frac{1}{2}[t\alpha X,t\beta Y]+\frac{1}{12}[t\alpha X,[t\alpha X,t\beta Y]]+\dots})\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\pi(e^{t\alpha X+t\beta Y+\frac{1}{2}t^2[\alpha X,\beta Y]+\frac{1}{12}t^3[\alpha X,[\alpha X,\beta Y]]+\dots})\bigg|_{t=0}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi olisi tarkistettava, suppeneeko Baker–Campbell–Hausdorff -sarja. Tässä todistuksessa tieto otetaan annettuna, että kyseinen sarja suppenee, mutta lineaarisuuden tarkan todistuksen voi katsoa viitteestä [9, Lause 3.28]. Nyt, koska Baker–Campbell–Hausdorff -sarja suppenee, niin saadaan:

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt}\pi(e^{t\alpha X})\pi(e^{t\beta Y})\pi(e^{O(t^2)})\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}e^{t\alpha\pi'(X)}e^{t\beta\pi'(Y)}\pi(e^{O(t^2)})\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}e^{t\alpha\pi'(X)+t\beta\pi'(Y)}\pi(e^{O(t^2)})\bigg|_{t=0} \\ &= \alpha\pi'(X) + \beta\pi'(Y), \qquad \text{kaikilla } \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa derivoitiin $t$:n suhteen, asetettiin $t = 0$ ja tunnistettiin Lien algebran esityksen määritelmä (4.2).

4. Tarkistetaan ensin, että Lien algebra toteuttaa Lien sulkeet:

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}(e^{tX} Y e^{-tX})\bigg|_{t=0}. \tag{4.3}$$

Hyödynnetään nyt derivoinnin ketjusääntöä:

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}(e^{tX} Y)\bigg|_{t=0} e^{-tX} + e^{tX} Y \frac{d}{dt}(e^{-tX})\bigg|_{t=0} \\
&= X e^{0 \cdot X} Y e^{0 \cdot X} - e^{0 \cdot X} Y X e^{0 \cdot X} \\
&= XY - YX = [X, Y].
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että voidaan kirjoittaa:

$$\pi'([X, Y]) = \pi'\left(\frac{d}{dt}(e^{tX} Y e^{-tX})\bigg|_{t=0}\right).$$

Nyt voidaan hyödyntää kohdassa 3. todistettua $\pi'$:n lineaarisuutta ja ominaisuutta 2:

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}(\pi'(e^{tX} Y e^{-tX}))\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\pi(e^{tX})\pi'(Y)\pi(e^{-tX}))\bigg|_{t=0}.
\end{aligned}$$

Hyödynnetään nyt ominaisuutta 1. ja lopuksi tunnistetaan Lien sulkeet (4.3):

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}(e^{t\pi'(X)} \pi'(Y) e^{-t\pi'(X)})\bigg|_{t=0} \\
&= [\pi'(X), \pi'(Y)], \qquad \text{kaikilla } X, Y \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

□

*Huomautus* 4.28. Lause 4.27 osoittaa, että voimme tutkia Lien ryhmän esityksiä $\pi$ tutkimalla kyseisen Lien ryhmän Lien algebran esityksiä $\pi'$.

# 5 Redusoitumattomien esitysten luokittelu

Kun esityksiä luokitellaan, halutaan eksplisiittisesti löytää ryhmän jokainen esitys. Luokittelussa etsitään ryhmän redusoitumattomat esitykset, joista voidaan rakentaa kaikki muut esitykset. Tässä kappaleessa tehdään ryhmien $U(1)$ ja $SU(2)$ unitaaristen ja redusoitumattomien esitysten luokittelu. Esitysten unitaarisuus on olennaista kvanttimekaniikan sovelluksissa. Tämän luvun todistukset ovat saaneet innoituksensa viitteistä [14, Kappale 12] ja [21, Kappale 8].

## 5.1 Ryhmän $U(1)$ redusoitumattomien esitysten luokittelu

**Propositio 5.1.** *Lien ryhmä $(U(1), \cdot)$ on vaihdannainen ryhmä, jonka laskutoimitus on matriisikertolasku $\cdot$. Ryhmä sisältää kaikki vaihetermit $e^{i\theta}$ siten, että pätee*

$$U(1) = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

*Todistus.* Määritelmän 3.34 mukaan ryhmä $U(n)$ sisältää kaikki kompleksiset, unitaariset $n \times n$ -matriisit, jotka säilyttävät sisätulon. Nyt, merkitään $U^{1\times 1}$ unitaarista $1 \times 1$ -matriisia, jonka tulee toteuttaa määritelmä 2.28. Täytyy siis päteä:

$$U^{1\times 1}(U^{\dagger})^{1\times 1} = (U^{\dagger})^{1\times 1}U^{1\times 1} = \mathbb{I}.$$

Tästä seuraa: Jos $c \in U(1)$, niin $c\bar{c} = 1$. Tällöin $c\bar{c} = c^2 = 1$. Ryhmä $U(1)$ koostuu siis kompleksiluvuista, joiden itseisarvo on 1. Ryhmän $U(1)$ alkiot voidaan siis esittää muodossa $e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$.

Tarkistetaan vielä, että $U(1)$ on vaihdannainen ryhmä. Olkoot $x, y \in U(1)$, joille on olemassa $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ siten, että $x = e^{i\theta_1}, y = e^{i\theta_2}$. Nyt siis seuraa:

$$xy = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1+i\theta_2} = e^{i\theta_2+i\theta_1} = e^{i\theta_2}e^{i\theta_1} = yx.$$

□

**Seurauslause 5.2.** *Unitaarisen ryhmän $U(1)$ jokainen redusoitumaton esitys on yksiulotteinen.*

*Todistus.* Väite seuraa Schurin Lemman ensimmäisestä seurauslauseesta 3.42. □

**Propositio 5.3.** *Jokainen unitaarisen ryhmän $U(1)$ redusoitumaton esitys $\pi$ voidaan ilmaista muodossa:*

$$\pi_k(e^{i\theta}) = e^{ik\theta}, \tag{5.1}$$

*missä $k \in \mathbb{Z}$.*

*Todistus.* Unitaarisen ryhmän jokainen alkio on kompleksiluku, joten voidaan tutkia esityksen $\pi : U(1) \to GL(\mathbb{C})$ derivaattaa:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\pi(e^{i\theta}) &= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i(\theta+\Delta\theta)}) - \pi(e^{i\theta})}{\Delta\theta} \\
&= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i\theta}e^{i\Delta\theta}) - \pi(e^{i\theta})}{\Delta\theta} \\
&= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i\theta})\pi(e^{i\Delta\theta}) - \pi(e^{i\theta})}{\Delta\theta} \\
&= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i\theta})\pi(e^{i\Delta\theta}) - \pi(e^{i\theta} \cdot 1)}{\Delta\theta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i\theta})\pi(e^{i\Delta\theta}) - \pi(e^{i\theta})\pi(1)}{\Delta\theta} \\
&= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i\theta})(\pi(e^{i\Delta\theta}) - \pi(1))}{\Delta\theta} \\
&= \pi(e^{i\theta}) \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i\Delta\theta}) - \pi(1)}{\Delta\theta} \\
&= \pi(e^{i\theta}) \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\pi(e^{i(0+\Delta\theta)}) - \pi(e^{i\cdot 0})}{\Delta\theta} \\
&= \pi(e^{i\theta}) \left.\frac{d}{d\theta}\pi(e^{i\theta})\right|_{\theta=0} \qquad || \left.\frac{d}{d\theta}\pi(e^{i\theta})\right|_{\theta=0} =: a \\
&= \pi(e^{i\theta})a = a\pi(e^{i\theta}).
\end{aligned}
$$

Huomataan, että vakio $a$ riippuu yksiselitteisesti kyseessä olevasta esityksestä $\pi$. Saatu tulos voidaan vielä ilmaista lauseen 4.27 ensimmäisen ominaisuuden mukaisesti, jolloin saadaan

$$\pi(e^{i\theta}) = e^{ia\theta}.$$

Homomorfismiominaisuus vaatii, että on oltava $e^{ia2\pi} = 1$, mikä taas tarkoittaa, että $a = k \in \mathbb{Z}$. Esitys voidaan kirjoittaa siis muodossa (5.1). □

**Propositio 5.4.** *Olkoon $\pi : U(1) \to GL(V)$ esitys. Vektoriavaruudelle $V$ on olemassa kanta siten, että tässä kannassa kaikilla $g \in G$ esitys $\pi(g)$ on aina diagonaalinen.*

*Todistus.* Jos $\pi : U(1) \to GL(\mathbb{C}^n)$ on unitaarinen esitys, niin seurauslause 3.43 sanoo, että:

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \pi_1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_2(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi_k(g) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

missä $\pi_i : U(1) \to GL(V_i)$ esitykset ovat redusoitumattomia esityksiä. Ja seurauslauseen 3.42 nojalla tiedetään, että $U(1)$:n redusoitumattomat esitykset ovat 1-ulotteisia, joten matriisissa (5.2) voidaan merkitä $k = n$ ja saadaan:

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \pi_1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pi_2(g) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pi_n(g) \end{pmatrix},$$

missä $\pi_j(g) = e^{i\theta k_j}$ jollain $k_j \in \mathbb{Z}$.

□

*Huomautus* 5.5. [21, Lause 2.3] Ryhmän $U(1)$ redusoitumattomat esitykset ovat aina unitaarisia.

## 5.2 Ryhmän $SU(2)$ redusoitumattomien unitaaristen esitysten luokittelu

Kappaleessa keskitytään nimenomaan löytämään ryhmän $SU(2)$ unitaariset redusoitumattomat esitykset. Kvanttimekaniikassa vaaditaan, että aikakehitysoperaattori on unitaarinen eli se säilyttää sisätulon Hilbertin avaruudessa. Toisin sanoen mitattavat suureet säilyvät.

**Määritelmä 5.6** (Nosto- ja laskuoperaattorit)**.** [21, Luku 8.1.2] Olkoot,

$$S_+ = S_1 + iS_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_- = S_1 - iS_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

missä $S_+, S_- \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$. Kumpikaan operaattoreista ei ole hermiittinen tai vinohermiittinen, mutta ne toteuttavat:

$$(S_+)^\dagger = (S_1 + iS_2)^\dagger = S_1 - iS_2 = S_-,$$

$$(S_-)^\dagger = (S_1 - iS_2)^\dagger = S_1 + iS_2 = S_+.$$

Ja samoin Lien algebran esityksien nosto- ja laskuoperaattorit toteuttavat:

$$\pi'(S_+)^\dagger = \pi'(S_1 + iS_2)^\dagger = \pi'(S_1)^\dagger + \pi'(iS_2)^\dagger = \pi'(S_1) - \pi'(iS_2) = \pi'(S_-),$$

$$\pi'(S_-)^\dagger = \pi'(S_1 - iS_2)^\dagger = \pi'(S_1)^\dagger - \pi'(iS_2)^\dagger = \pi'(S_1) + \pi'(iS_2) = \pi'(S_+).$$

**Propositio 5.7.** *Lien algebran $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ alkiot $S_j$ toteuttavat seuraavat kommutaatiorelaatiot:*

$$[S_1, S_2] = iS_3, \quad [S_2, S_3] = iS_1, \quad [S_3, S_1] = iS_2,$$
$$[S_3, S_-] = -S_-, \quad [S_+, S_-] = 2S_3, \quad [S_3, S_+] = S_+.$$

*Todistus.* Todistetaan laskemalla kommutaatiorelaatio $[S_1, S_2]$. Muut lasketaan samalla tavalla.

$$\begin{aligned}
[S_1, S_2] &= \left[\frac{1}{2}\sigma_1, \frac{1}{2}\sigma_2\right] \\
&= \frac{1}{4}[\sigma_1, \sigma_2] \\
&= \frac{1}{4}(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1) \\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} \\
&= i\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= iS_3.
\end{aligned}$$

□

**Propositio 5.8.** *Olkoon $iS_3 \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ Lien algebran $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ alkio. Alkio $e^{\theta 2iS_3} \in SU(2)$ voidaan esittää matriisina:*

$$e^{i\theta 2S_3} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

*Todistus.* Kirjoitetaan $e^{i\theta 2S_3} \in SU(2)$ muodossa:

$$e^{i\theta 2S_3} = e^{i\theta 2\frac{1}{2}\sigma_3} = \exp\left(i\theta 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(i\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ja, koska kyseessä on matriisieksponentti diagonaalimatriisille, niin lemman 2.34 nojalla pätee:

$$e^{i\theta 2S_3} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

□

*Huomautus* 5.9. [14, Luku 12] Proposition 5.8 tulos voidaan nähdä kuvauksen $\pi : U(1) \to GL(\mathbb{C}^2)$ alkiona. Tällöin voidaan sanoa, että $U(1)$ on isomorfinen $\mathfrak{su}(2)$:n alkion $iS_3$:n generoiman $SU(2)$:n aliryhmän kanssa, mikä mahdollistaa $U(1)$:n esitysteorian hyödyntämisen $SU(2)$:n unitaaristen esitysten luokittelussa.

**Propositio 5.10.** *Lien algebran $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ esityksen alkion $\pi'(S_3)$ ominaisarvot ovat puolilukuja $\frac{k}{2}$, missä $k \in \mathbb{Z}$.*

*Todistus.* Tiedetään, että $X = i2S_3 \in \mathfrak{su}(2)$. Proposition 5.4 mukaan Lien ryhmän esityksen alkiolle $\pi'(i2S_3)$ voidaan valita sopiva kanta ja, koska $\theta$ kulkee välillä $[0, 2\pi[$, voidaan periodisuuden nojalla kirjoittaa:

$$\pi(e^{i2\theta S_3}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\theta k_n} \end{pmatrix}.$$

Lien algebran esitykselle $\pi' : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(V)$ ja sen alkiolle pätee määritelmän 4.26 mukaisesti:

$$\begin{aligned} \pi'(i2S_3) &= \frac{d}{d\theta}\pi(e^{\theta iS_3})\Big|_{\theta=0} \\ &= \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} e^{i\theta k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\theta k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\theta k_n} \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0} \\ &= \begin{pmatrix} ik_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ik_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ik_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyt, koska Lien algebran esitys $\pi'$ on reaalinen lineaarikuvaus, se voidaan kompleksifioida määritelmän 4.24 nojalla siten, että nyt $\pi' : \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{sl}(V)$. Kerrotaan siis alkiota $\pi'(i2S_3)$ esimerkiksi kompleksiluvulla $-\frac{i}{2}$, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned}
\pi'(S_3) &= \frac{d}{d\theta}\pi(e^{\theta S_3})\bigg|_{\theta=0} \\
&= \frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} e^{\frac{k_1}{2}\theta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\frac{k_2}{2}\theta} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\frac{k_n}{2}\theta} \end{pmatrix}\bigg|_{\theta=0} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{k_1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{k_n}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ominaisarvoyhtälön [3, Määritelmä 10.1.2] nojalla diagonaalimatriisin diagonaalialkiot ovat sen ominaisarvot, mistä seuraa, että $\pi'(S_3)$:n ominaisarvot ovat $\frac{k}{2}$. □

**Määritelmä 5.11** (Paino)**.** [21, Luku 8.1.2] Olkoon $\frac{k}{2}$ Lien algebran $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ esityksen alkion $\pi'(S_3)$ ominaisarvo. Tämä $k \in \mathbb{Z}$ on esityksen $\pi$ paino.

**Määritelmä 5.12** (Painoavaruus)**.** [21, Luku 8.1.2] Olkoon esityksen $\pi$ aliavaruus $V_k \subset V$, joka toteuttaa ehdon:

$$v \in V_k \implies \pi'(S_3)v = \frac{k}{2}v.$$

Tällaista aliavaruutta $V_k$ kutsutaan esityksen $k$-painoavaruudeksi, missä $k \in \mathbb{Z}$. Kaikki tämän aliavaruuden vektorit ovat Lien algebran esityksen $\pi'(S_3)$ ominaisvektoreita, joiden ominaisarvo on $\frac{k}{2}$.

**Propositio 5.13** (Lasku- ja nosto-operaattoreiden painot)**.** *Kun määritelmä 5.12 on voimassa, niin silloin pätee jokaiselle $v_k \in V_k$:*

$$\begin{aligned}
\pi'(S_3)\pi'(S_+)v_k &= \left(\frac{k}{2}+1\right)\pi'(S_+)v_k, \\
\pi'(S_3)\pi'(S_-)v_k &= \left(\frac{k}{2}-1\right)\pi'(S_-)v_k.
\end{aligned}$$

*Todistus.* Todistetaan ensimmäinen tulos suoralla laskulla. Lasku on jälkimmäiselle tulokselle sama etumerkki huomioiden. Tarkastellaan esitystä $\pi' : \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{gl}(V)$. Muistetaan sitten kommutaatiorelaatio $[S_3, S_+] = S_+$, josta saadaan johdettua tulos kommutaattorin avulla ja muistamalla sitten homomorfismin määritelmä:

$$\begin{aligned}
\pi'(S_3)\pi'(S_+) - \pi'(S_+)\pi'(S_3) &= [\pi'(S_3), \pi'(S_+)] \\
&= \pi'([S_3, S_+]) \\
&= \pi'(S_+).
\end{aligned}$$

Ja nyt, jos operoidaan Lien algebran $\mathfrak{gl}(V)$ alkiolla $\pi'(S_3)\pi'(S_+)$ mielivaltaiseen vektoriin $v_k \in V$, saadaan:

$$\begin{aligned}
\pi'(S_3)\pi'(S_+)v_k &= (\pi'(S_+)\pi'(S_3) + [\pi'(S_3), \pi'(S_+)])v_k \\
&= (\pi'(S_+)\pi'(S_3) + \pi'([S_3, S_+]))v_k \\
&= (\pi'(S_+)\pi'(S_3) + \pi'(S_3))v_k \\
&= \pi'(S_+)(\pi'(S_3) + 1)v_k \\
&= \pi'(S_+)\left(\frac{k}{2} + 1\right)v_k \\
&= \left(\frac{k}{2} + 1\right)\pi'(S_+)v_k, \quad \text{kaikilla } v_k \in V.
\end{aligned}$$

□

**Määritelmä 5.14** (Painoavaruuden ulottuvuus)**.** [21, Luku 8.1.2] Painoavaruuden ulottuvuutta $\dim(V_k)$ kutsutaan painon $k$ kertaluvuksi esityksessä $\pi$.

**Määritelmä 5.15** (Maksimi- ja minimipainovektorit)**.** [14, Luku 12] Vektoreita $v_{k_H}, v_{k_L} \in V \setminus \{\vec{0}\}$, jotka toteuttavat

$$\begin{aligned}
\pi'(S_+)v_{k_H} &= 0, \\
\pi'(S_-)v_{k_L} &= 0,
\end{aligned}$$

kutsutaan maksimi- ja minimipainovektoreiksi, joilla on suurin ja matalin paino $k_H, k_L \in \mathbb{Z}$. Kumpikin vektoreista on Lien algebran esityksen $\pi'(S_3)$ ominaisvektori. Vektorilla $v_{k_H}$ on suurin ominaisarvo $\frac{k_H}{2}$ ja vektorilla $v_{k_L}$ on pienin ominaisarvo $\frac{k_L}{2}$.

**Lemma 5.16.** *Olkoon $\pi : SU(2) \to GL(V)$ äärellisulotteinen redusoitumaton esitys, jossa $V$ on kompleksinen vektoriavaruus. Olkoot $v_{k_H} \in V$ ja aliavaruus $P \subset V$, joka toteuttaa:*

$$P \equiv span_{\mathbb{C}}\{v_{k_H}, \pi'(S_-)v_{k_H}, \pi'(S_-)^2 v_{k_H}, \pi'(S_-)^3 v_{k_H}, \cdots\}. \tag{5.3}$$

*Tämä aliavaruus $P$ on suljettu jokaisen Lien algebran esityksen alkion $\pi'(X) \in \mathfrak{su}(2)$ toiminnan suhteen.*

*Todistus.* Aliavaruus $P$ on suljettu jokaisen Lien algebran esityksen alkion $\pi'(X) \in \mathfrak{su}(2)$ toiminnan suhteen, jos ja vain jos se on suljettu jokaisen kompleksifioidun Lien algebran $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ alkion suhteen. Toisin sanoen:

$$\pi'(X)p \in P \Leftrightarrow i\pi'(X)p \in P, \qquad \text{jokaiselle } p \in P, X \in \mathfrak{su}(2).$$

Näytetään, että $P$ on suljettu kompleksifioidun Lien algebran $\mathfrak{su}_{\mathbb{C}}(2)$ suhteen. Kompleksifioidun Lien algebran kanta on

$$\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{S_+, S_-, S_3\}.$$

1. Olkoon $p \in P$ määritelty siten, että:

$$p = a_1 v_{k_H} + a_2 \pi'(S_-) v_{k_H} + \cdots + a_n \pi'(S_-)^n v_{k_H},$$

missä $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Koska lineaarikombinaatio on määritelty vektoriavaruudessa $V$, siitä seuraa, että $\pi'(S_-)p \in P$.

2. Lien algebran esityksen $\pi'(S_3)$ tapauksessa muistetaan, että propositio 5.13 pätee, josta seuraa

$$\begin{aligned}
\pi'(S_3)p &= \pi'(S_3)(v_{k_H} + \pi'(S_-)v_{k_H} + \pi'(S_-)^2 v_{k_H} + \cdots) \\
&= \pi'(S_3)v_{k_H} + \pi'(S_3)\pi'(S_-)v_{k_H} + \pi'(S_3)\pi'(S_-)^2 v_{k_H} + \cdots \\
&= \frac{k}{2} v_{k_H} + \left(\frac{k}{2} - 1\right) \pi'(S_-)v_{k_H} + \left(\frac{k}{2} - 2\right) \pi'(S_-)^2 v_{k_H} + \cdots
\end{aligned}$$

Nyt nähdään, että $\pi'(S_3)p \in P$.

3. Lasketaan ensin kommutaatiorelaatio

$$[\pi'(S_+), \pi'(S_-)] = \pi'([(S_+), (S_-)]) = \pi'(2S_3) = 2\pi'(S_3),$$

missä hyödynnettiin homomorfismin määritelmää ja proposition 5.7 tulosta. Ja määritelmän (2.5) mukaisesti kommutaatiorelaation voi ilmaista myös muodossa

$$\begin{aligned}
[\pi'(S_+), \pi'(S_-)] &= \pi'(S_+)\pi'(S_-) - \pi'(S_-)\pi'(S_+) && (5.4) \\
\Rightarrow \pi'(S_+)\pi'(S_-) &= \pi'(S_-)\pi'(S_+) + [\pi'(S_+), \pi'(S_-)] && (5.5) \\
&= \pi'(S_-)\pi'(S_+) + 2\pi'(S_3). && (5.6)
\end{aligned}$$

Ja kommutoidaan nyt $\pi'(S_+)$ jokaisen $\pi'(S_-)$ termin ohi kaikilla $m \in \mathbb{Z}$ ja hyödynnetään välituloksia (5.5) ja (5.6):

$$\begin{aligned}
\pi'(S_+)\pi'(S_-)^m v_{k_H} &= \pi'(S_+)\pi'(S_-)\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H} \\
&= (\pi'(S_-)\pi'(S_+) + [\pi'(S_+), \pi'(S_-)])\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H} \\
&= (\pi'(S_-)\pi'(S_+) + 2\pi'(S_3))\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H} \\
&= \pi'(S_-)\pi'(S_+)\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H} + 2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H} \\
&= \pi'(S_-)((\pi'(S_-)\pi'(S_+) + 2\pi'(S_3))\pi'(S_-)^{m-2} v_{k_H} \\
&\quad + 2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H} \\
&= \pi'(S_-)^2\pi'(S_+)\pi'(S_-)^{m-2} v_{k_H} + \pi'(S_-)2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^{m-2} v_{k_H} \\
&\quad + 2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H}.
\end{aligned}$$

Huomataan, että kommutointitermien avaaminen alkaa muodostaa kaavan. Järjestellään termit uudelleen siten, että ensimmäisenä on kommutointitermi, ja jäljessä tulevat kommutoidut termit:

$$\begin{aligned}
&= \pi'(S_-)^2\pi'(S_+)\pi'(S_-)^{m-2} v_{k_H} + 2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H} \\
&\quad + \pi'(S_-)2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^{m-2} v_{k_H}.
\end{aligned}$$

Termien kommutointia voidaan jatkaa $m$ kertaa, ja koska määritelmän 5.15 mukaan pätee, että maksimaalinen painovektori kumoaa ensimmäisen termin, voidaan muodostaa äärellinen summa:

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \pi'(S_-)^j 2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^{m-1-j} v_{k_H}$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} \pi'(S_-)^{m-1-j} 2\pi'(S_3)\pi'(S_-)^j v_{k_H}.$$

Muistetaan sitten proposition 5.13 toinen tulos, jolloin saadaan:

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \pi'(S_-)^{m-1-j} 2\left(\frac{k_H}{2} - j\right)\pi'(S_-)^j v_{k_H}$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} \pi'(S_-)^{m-1-j}(k_H - 2j)\pi'(S_-)^j v_{k_H}$$
$$= \sum_{j=0}^{m-1} (k_H - 2j)\pi'(S_-)^{m-1-j+j} v_{k_H}$$
$$= \left(\sum_{j=0}^{m-1} k_H - 2j\right)\pi'(S_-)^{m-1} v_{k_H}.$$

Siis $\pi'(S_+)p \in P$.

□

*Huomautus* 5.17. Jokainen Lien ryhmän esityksen alkio $\pi(g)$ voidaan esittää Lien algebran esityksen alkioiden $\pi'(X)$ summana.

**Lemma 5.18.** *Kaikille $g \in SU(2)$ on olemassa $X \in \mathfrak{su}(2)$ siten, että pätee:*

$$\pi(g) = \mathbb{I} + \pi'(X) + \frac{1}{2!}\pi'(X)^2 + \frac{1}{3!}\pi'(X)^3 + ...$$

*Todistus.* Lauseen 4.27 1. ominaisuuden ja lemma 4.20 nojalla voidaan kirjoittaa:

$$\pi(g) = \pi(e^X) = e^{\pi'(X)}.$$

Hyödynnetään sitten eksponenttifunktion Taylorin sarjakehitelmää:

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\pi'(X)^k$$
$$= \frac{1}{0!}\pi'(X)^0 + \frac{1}{1!}\pi'(X)^1 + \frac{1}{2!}\pi'(X)^2 + \frac{1}{3!}\pi'(X)^3 + ...$$

Kun käytetään tietoa, että matriisi eksponenttiin 0 on identiteettimatriisi ja 0! on 1, saadaan

$$= \mathbb{I} + \pi'(X) + \frac{1}{2!}\pi'(X)^2 + \frac{1}{3!}\pi'(X)^3 + ...$$

□

**Lemma 5.19.** *Jokainen ryhmän $SU(2)$ äärellisulotteinen redusoitumaton esitys voidaan virittää operoimalla laskuoperaatorilla maksimipainovektoriin $v_{k_H}$.*

*Todistus.* Olkoot $g \in SU(2)$ ja $X \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$. Tarkastellaan esitystä $\pi : SU(2) \to GL(V)$. Aliavaruus $P \subset V$ on määritelmän (5.3) mukainen. Sitten lemman 5.18 nojalla saadaan kaikille $p \in P$:

$$\pi(g)p = \left(\mathbb{I} + \pi'(X) + \frac{1}{2!}\pi'(X)^2 + \frac{1}{3!}\pi'(X)^3 + ...\right)p.$$

Lemma 5.16 osoittaa, että $P$ on suljettu jokaisen Lien algebran $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ esityksen alkion toiminnan alla, jolloin myös $\pi(g)p \in P$. $P$ on siis suljettu esityksen $\pi(g)$ toiminnan alla kaikilla $g \in SU(2)$. Tällöin $P$ on $V$:n aliesitys, ja koska $V$ on redusoitumaton ja $P \neq \{\vec{0}\}$, on oltava $P = V$. □

**Lause 5.20** (Maksimaalinen paino)**.** *Ryhmän $SU(2)$ äärellisulotteisilla esityksillä on kokonaislukupainot muotoa*

$$-n, -n+2, ..., n-2, n,$$

*missä jokaisen painon kertaluku on 1 ja $n$, eli redusoitumattoman esityksen ulottuvuus, on maksimaalinen paino.*

*Todistus.* Lemma 5.19 osoittaa, että jokainen äärellisulotteinen redusoitumaton $SU(2)$:n esitys voidaan virittää operoimalla laskuoperaattorilla maksimipainovektoriin $v_{k_H}$. Tällöin lemman 5.16 perusteella tiedetään, että painot ovat:

$$\sum_{j=0}^{m-1} k_H - 2j = k_H + (k_H - 2) + \cdots + (k_L + 4) + (k_L + 2) + k_L. \tag{5.7}$$

Painojen kertaluku on 1. Yhtälössä (5.7) $k_H - k_L$ on parillinen luku. Nyt, jos $V = \mathbb{C}^n$, niin on olemassa $n$ erillistä painoa, sillä jokaisen painon $n$ kertaluku on 1. Jos $n = 1$, silloin ainoa mahdollinen redusoitumaton esitys on triviaaliesitys $\pi(g) = 1$, koska vektoriavaruuden $V$ virittää tällöin vain yksi vektori. Toisin sanoen, jos $v \in V$, niin tällöin vektori $v$ on sekä maksimi- että minimipainovektori. Siis määritelmän 5.15 mukaisesti $\pi'(S_+)v = \pi'(S_-)v = 0$. Tästä seuraa myös:

$$\pi'(S_3)v = \frac{1}{2}[\pi'(S_+), \pi'(S_-)]v = \frac{1}{2}[0, 0]v = 0.$$

Ja, koska $S_+, S_-, S_3 \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ ovat Lien algebran alkioita, niin silloin lauseen 4.27 1. ominaisuuden perusteella pätee kaikille $X \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$:

$$\pi(e^X) = e^{\pi'(X)} = e^0 = 1.$$

Nyt voidaan todistaa, että mille tahansa redusoitumattomalle esitykselle $\pi : SU(2) \to GL(\mathbb{C}^n)$ pätee:

$$\det \pi(g) = 1, \quad \text{kaikilla } g \in SU(2).$$

Esimerkki 3.25 osoittaa, että determinanttikuvaus $\det : GL(V) \to \mathbb{C} = GL(\mathbb{C})$ on itsessään esitys. Lisäksi, jos muodostetaan yhdistetty funktio determinantin ja esityksen $\pi$ avulla, saadaan:

$$(\det \circ \pi) : SU(2) \xrightarrow{\pi} GL(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\det} GL(\mathbb{C}).$$

Ja, koska kaikki yksiulotteiset redusoitumattomat $SU(2)$:n esitykset ovat triviaaleja [14, Luku 13], on todistettu, että pätee $\pi(g) = 1$. Nyt, olkoon $e^{i\theta 2S_3} \in SU(2)$ alkio ryhmässä $SU(2)$ ja $\pi : SU(2) \to GL(\mathbb{C}^n)$ redusoitumaton esitys. Tällöin pätee:

$$\pi(e^{i\theta 2S_3}) = \begin{pmatrix} e^{ik_H\theta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(k_H-2)\theta} & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & e^{i(k_L+2)\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{ik_L\theta} \end{pmatrix}.$$

Ja, koska $\det \pi(e^{i\theta 2S_3}) = 1$, silloin painojen summan tulee olla 0. Painojen $k_L = -n$ ja $k_H = n$ on siis oltava:

$$-n, -n+2, ..., n-2, n.$$

□

## 5.3 Ryhmän $SU(2)$ Spin 1 -esitys

**Määritelmä 5.21** (Zeemanin kanta)**.** [14, Luku 13] Olkoon $V$ kaksiulotteinen vektoriavaruus. Tällöin lauseen 5.20 mukaan $k_H = 2$. Zeemanin kanta on muotoa:

$$Z = \operatorname{span}\left\{\sqrt{2}v_2, \pi'(S_-)v_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\pi'(S_-)^2 v_2\right\}.$$

Zeemanin kannan ominaisvektorit $z_i$ voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$z_1 = \sqrt{2}v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \pi'(S_-)v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi'(S_-)^2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Propositio 5.22.** *Alkiot $\pi'(S_3), \pi'(S_-), \pi'(S_+) \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ voidaan kirjoittaa Zeemanin kannassa:*

$$\pi'(S_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pi'(S_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi'(S_+) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Todistus.* Todistetaan ratkaisemalla matriisit $\pi'(S_3)$ ja $\pi'(S_+)$. Matriisi $\pi'(S_-)$ lasketaan samalla tavalla. Nyt, koska ryhmän $SU(2)$ ulottuvuus on 3 ja painoavaruuden

ulottuvuus on $n = 2$, saadaan $\pi'(S_3)$ muodostettua lauseen 5.20 nojalla:

$$\begin{aligned}\pi'(S_3) &= \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n-2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2-2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ratkaistaan seuraavaksi $\pi'(S_+)$. Zeemanin kannan ominaisvektorit ovat määritelmän 5.21 mukaiset $z_i, i \in \{1, 2, 3\}$. Siis jokainen $\pi'(S_+)$:n sarake voidaan laskea erikseen. Lasketaan alkuun kaksi hyödyllistä aputulosta lemman 5.16 avulla:

$$\begin{aligned}\pi'(S_+)\pi'(S_-)^1 v_2 &= \sum_{j=0}^{1-1}(2 - 2 \cdot 0)\pi'(S_-)^{1-1} v_2 = \sum_{j=0}^{0}(2)\pi'(S_-)^0 v_2 = 2 \cdot 1 v_2 = 2v_2, \\ \pi'(S_+)\pi'(S_-)^2 v_2 &= \sum_{j=0}^{2-1}(2 - 2j)\pi'(S_-)^{2-1} v_2 = ((2 - 2 \cdot 0) + (2 - 2 \cdot 1))\pi'(S_-)v_2 \\ &= 2\pi'(S_-)v_2.\end{aligned}$$

Ratkaistaan sitten $\pi'(S_+)$:n sarakkeet muistaen määritelmä 5.15:

$$\begin{aligned}\pi'(S_+)z_1 &= \pi'(S_+)\sqrt{2}v_2 = \sqrt{2}\pi'(S_+)v_2 = 0, \\ \pi'(S_+)z_2 &= \pi'(S_+)\pi'(S_-)v_2 = 2v_2 = \sqrt{2}w_1, \\ \pi'(S_+)z_3 &= \pi'(S_+)\frac{1}{\sqrt{2}}\pi'(S_-)^2 v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi'(S_+)\pi'(S_-)^2 v_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}2\pi'(S_-)^2 v_2 = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}w_2 = \sqrt{2}w_2.\end{aligned}$$

Siis,

$$\pi'(S_+) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

**Propositio 5.23.** *Ryhmän $SU(2)$ Spin 1 -esitykselle voidaan kirjoittaa Lien algebran esitys $\pi'$ siten, että*

$$\pi'(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi'(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi'(S_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Todistus.* Todistetaan samoin kuin edellä. Ratkaistaan siis matriisi $\pi'(S_1) \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^3)$ sarake kerrallaan. Lineaarikuvaus $S_1 \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ voidaan kirjoittaa nosto- ja laskuoperaattorien avulla seuraavasti:

$$S_1 = \frac{1}{2}(S_+ + S_-).$$

Ryhmähomomorfismin määritelmää 3.18, maksimipainovektorin määritelmää 5.15 ja Zeemanin kantaa 5.21 hyödyntäen voidaan ratkaista alkion $\pi'(S_1)$ sarakkeet:

$$\begin{aligned}
\pi'(S_1)z_1 &= \pi'(\frac{1}{2}(S_+ + S_-))z_1 = \pi'(\frac{1}{2}(S_+ + S_-))\sqrt{2}v_2 \\
&= \frac{1}{2}(\pi'(S_+) + \pi'(S_-))\sqrt{2}v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pi'(S_+)v_2 + \pi'(S_-)v_2) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi'(S_-)v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2, \\
\pi'(S_1)z_2 &= \pi'(\frac{1}{2}(S_+ + S_-))z_2 = \pi'(\frac{1}{2}(S_+ + S_-))\pi'(S_-)v_2 \\
&= \frac{1}{2}(\pi'(S_+) + \pi'(S_-))\pi'(S_-)v_2 = \frac{1}{2}(\pi'(S_+)\pi'(S_-)v_2 + \pi'(S_-)^2v_2) \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{2}z_1 + \sqrt{2}z_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi'(S_1)z_3 &= \pi'(\frac{1}{2}(S_+ + S_-))z_3 = \pi'(\frac{1}{2}(S_+ + S_-))\frac{1}{\sqrt{2}}\pi'(S_-)^2v_2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\pi'(S_+) + \pi'(S_-))\pi'(S_-)^2v_2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\pi'(S_+)\pi'(S_-)^2v_2 + \pi'(S_-)^3v_2).
\end{aligned}$$

Huomataan, että viimeisen termin potenssi ylittää painoavaruuden ulottuvuuden $n = 2 < 3$, jolloin $\pi'(S_-)^3v_2 = 0$. Hyödynnetään vielä propositiossa 5.22 ratkaistua ensimmäistä aputulosta, jolloin saadaan:

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}2\pi'(S_-)v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi'(S_-)v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}z_2.$$

Siis,

$$\pi'(S_1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

# 6 Kvanttimekaaninen spin

Tämä kappale on hieman erilainen aiempiin verrattuna. Lähestymme johtopäätöstä kvanttimekaanisesta spinistä konseptuaalisesti, sillä täsmällinen todistus vaatisi algebrallisen topologian työkalujen käyttöä [10]. Kappaleen todistukset ovat inspiroituneet viitteistä [14, Kappale 15] ja [9, Kappale 1].

## 6.1 Ryhmien $SO(3)$ ja $SU(2)$ yhteys

**Lemma 6.1.** *Olkoon $\pi : SU(2) \to SO(3)$ kuvaus, joka on määritelty siten, että*

$$\pi(e^{\vec{\theta}\cdot\vec{X}}) = e^{\vec{\theta}\cdot\pi'(\vec{X})} = e^{\vec{\theta}\cdot\vec{L}},$$

*missä $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$ ja $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ määritelmästä 4.18. Tämä kuvaus $\pi$ on homomorfismi.*

*Todistus.* Näytetään, että kuvaus $\pi$ toteuttaa homomorfismin ominaisuuden. Olkoot $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^3$ ja $X_1, X_2 \in \mathfrak{su}(2)$. Hyödynnetään Baker-Cambell-Hausdorff-kaavaa [2], sillä matriisit $X_1, X_2$ eivät kommutoi. Nyt saadaan:

$$\pi(e^{\theta_1\cdot X_1}e^{\theta_2\cdot X_2}) = \pi(e^{\theta_1\cdot X_1+\theta_2\cdot X_2+\frac{1}{2}[\theta_1\cdot X_1,\theta_2\cdot X_2]+\frac{1}{12}[\theta_1\cdot X_1,[\theta_1\cdot X_1,\theta_2\cdot X_2]]+\frac{1}{12}[\theta_2\cdot X_2,[\theta_2\cdot X_2,\theta_1\cdot X_1]]+\cdots}).$$

Muistetaan nyt lause 4.25, jolloin voidaan hyödyntää $\mathfrak{so}(3)$:n mielenkiintoista ominaisuutta. On olemassa kertoimet $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, jolloin $\mathfrak{so}(3)$:n Baker-Cambell-Hausdorff-sarjasta tulee äärellinen [5, Lause 2.1]. Nyt saadaan:

$$= \pi(e^{\alpha(\theta_1\cdot X_1)+\beta(\theta_2\cdot X_2)+\gamma[\theta_1\cdot X_1,\theta_2\cdot X_2]}).$$

Hyödynnetään seuraavaksi lauseen 4.27 1., 3. ja 4. ominaisuutta, mikä johtaa välituloksiin:

$$\begin{aligned}
&= e^{\pi'(\alpha(\theta_1\cdot X_1))+\pi'(\beta(\theta_2\cdot X_2))+\pi'(\gamma[\theta_1\cdot X_1,\theta_2\cdot X_2])} \\
&= e^{\alpha\theta_1\cdot\pi'(X_1)+\beta\theta_2\cdot\pi'(X_2)+\gamma[\theta_1\cdot\pi'(X_1),\theta_2\cdot\pi'(X_2)]}.
\end{aligned}$$

Lopuksi hyödynnetään käänteisesti lausetta 4.25 ja palataan takaisin äärettömään Baker-Cambell-Hausdorff-sarjaan [2]. Ja, jos vielä kerran käytetään lauseen 4.27 1. ominaisuutta, saadaan:

$$\begin{aligned}
&= e^{\theta_1\cdot\pi'(X_1)+\theta_2\cdot\pi'(X_2)+[\theta_1\cdot\pi'(X_1),\theta_2\cdot\pi'(X_2)]+\cdots} \\
&= e^{\theta_1\cdot\pi'(X_1)}e^{\theta_2\cdot\pi'(X_2)} \\
&= \pi(e^{\theta_1\cdot X_1})\pi(e^{\theta_2\cdot X_2}).
\end{aligned}$$

□

*Huomautus* 6.2. Lemman 6.1 kuvaus $\pi$ ei ole injektio, vaan ainoastaan homomorfismi.

**Lemma 6.3.** *Olkoon $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ vektori, joka sisältää komponentit $x, y, z$. Olkoon $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ vektori, joka sisältää kaikki määritelmän 2.25 Paulin matriisit. Homomorfismi $\pi : SU(2) \to SO(3)$ voidaan esittää myös muodossa:*

$$(\pi(g)\vec{x}) \cdot \vec{\sigma} = g(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})g^{-1}, \quad \textit{kaikilla } g \in SU(2).$$

*Todistus.* Näytetään, että konjugoimalla matriisia $(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})$ tuloksena on $SO(3)$:n matriisi. Tehdään konjugointi matriisin $g = e^{i2\theta S_3} \in SU(2)$ suhteen, sillä periaate on sama $S_1$:lle ja $S_2$:lle. Mainitaan, että $S_1, S_2 \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ eivät ole diagonaalimatriiseja, joten

niitä ei voi suoraan eksponentioida. Ne tulee siis diagonalisoida ennen konjugointia. Aloitetaan $SO(3)$:n alkion ratkaiseminen laskemalla pistetulo:

$$\begin{aligned}\vec{x}\cdot\vec{\sigma} &= x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 \\ &= x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Koska $SU(2)$:n matriisit ovat unitaarisia, voidaan hyödyntää määritelmää 2.28, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned}g(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})g^{-1} &= \begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}^{\dagger} \\ &= \begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & x-iy\\ x+iy & -z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\theta} & 0\\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}e^{i\theta}z & e^{i\theta}(x-iy)\\ e^{-i\theta}(x+iy) & e^{-i\theta}(-z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}e^{i\theta}e^{-i\theta}z & e^{i\theta}e^{i\theta}(x-iy)\\ e^{-i\theta}e^{-i\theta}(x+iy) & e^{-i\theta}e^{i\theta}(-z)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}z & e^{2i\theta}(x-iy)\\ e^{-2i\theta}(x+iy) & -z\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ja Eulerin lause [3] sanoo:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

jolloin saatu matriisi voidaan kirjoittaa muodossa:

$$= \begin{pmatrix}z & a\\ b & -z\end{pmatrix},$$

missä

$$\begin{aligned}a &= (x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta)) - i(-x\sin(2\theta) + y\cos(2\theta)), \\ b &= (x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta)) + i(-x\sin(2\theta) + y\cos(2\theta)).\end{aligned}$$

Pilkotaan saatu lineaarikuvaus Paulin matriiseihin 2.25:

$$\begin{aligned}&= z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + (-x\sin(2\theta) + y\cos(2\theta))\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + (x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta))\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= z\sigma_3 + (-x\sin(2\theta) + y\cos(2\theta))\sigma_2 + (x\cos(2\theta) + y\sin(2\theta))\sigma_1 \\ &= \left(\begin{pmatrix}\cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0\\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right)\cdot\vec{\sigma}.\end{aligned}$$

Ja, jos muistetaan lemma 4.20 ja huomautus 4.21, voidaan saatu tulos ilmaista muodossa:

$$= (e^{2\theta L_3}\vec{x}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Ja hyödynnetään sitten lemmaa 6.1, jolloin saadaan:

$$\begin{aligned} &= (\pi(e^{i2\theta S_3})\vec{x}) \cdot \vec{\sigma} \\ &= (\pi(g)\vec{x}) \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned}$$

□

**Seurauslause 6.4.** *Lemman 6.1 homomorfismille $\pi$ pätee:*

$$\pi(-g) = \pi(g), \quad g \in SU(2).$$

*Todistus.* Olkoon $\pi(-g) \in SO(3)$ alkio ryhmässä $SO(3)$. Konjugoidaan tätä alkiota lemman 6.3 mukaisesti, jolloin siitä seuraa:

$$\begin{aligned} \pi(-g)\vec{x} &= (-g)(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})(-g)^{-1} \\ &= (-1)g(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})(-1)g^{-1} \\ &= (-1)^2 g(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})g^{-1} \\ &= g(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})g^{-1} \\ &= \pi(g)\vec{x}. \end{aligned}$$

□

*Huomautus* 6.5. Seurauslause 6.4 osoittaa, että homomorfismi $\pi : SU(2) \to SO(3)$ on kahdesta yhteen kuvaus.

## 6.2 Ryhmä $SO(3)$ topologisena avaruutena

Hahmotellaan nyt topologisesti ja visuaalisesti, millainen avaruus $SO(3)$ on.

**Määritelmä 6.6** (Kuvausten homotopia)**.** [19, Määritelmä 21.1] Olkoot $(X, \mathcal{J})$ ja $(Y, \mathcal{J}')$ topologisia avaruuksia. Olkoot $f, h : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Sanotaan, että $f$ on homotooppinen $h$:n kanssa, jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $p : X \times I \to Y$, että $p(x, 0) = f(x)$ ja $p(x, 1) = h(x)$ kaikilla $x \in X$. Tällöin merkitään $f \simeq h$ ja myös $p : f \simeq h$. Kuvausta $p$ kutsutaan homotopiaksi, joka yhdistää funktion $f$ funktioon $h$.

**Määritelmä 6.7** (Polkuhomotopia)**.** [19, Määritelmä 22.1] Tarkastellaan polkujen $s : I \to Y$ homotopioita. Pidetään päätepisteet homotopian aikana paikoillaan, toisin sanoen tarkastellaan homotopioita joukon $\{0, 1\}$ suhteen. Tätä voidaan merkitä rel $\{0, 1\}$. Sanotaan, että polku $s$ on polkuhomotooppinen polun $l$ kanssa, jos $s \simeq l$ rel $\{0, 1\}$. Tällöin merkitään $s \sim l$. Jos $K : s \simeq l$ rel $\{0, 1\}$, merkitään lyhyesti $K : s \sim l$.

Polkuhomotopia $K : s \sim l$ merkitsee siis sitä, että $K : I \times I \to X$ on jatkuva kuvaus, jolla on seuraavat ominaisuudet kaikilla $a, t \in I$:

1. $K(a,0) = s(a)$,
2. $K(a,1) = l(a)$,
3. $K(0,t) = s(0) = l(0)$,
4. $K(1,t) = s(1) = l(1)$.

Tässä on merkitty $a$:lla polkuparametria ja $t$:llä homotopiaparametria. Siis $K$ kuvaa neliön $I \times I$ pystysivut pisteisiin $s(0)$ ja $s(1)$. Neliön alasivulla $K = s$ ja yläsivulla $K = l$, kun ajatellaan yksikkövälin $I$ viedyksi näille sivuille. Kysymys siitä, onko $s \sim l$, johtaa vielä jatko-ongelmaan: Neliön reunalla annettu kuvaus on laajennattava koko neliön $I \times I$ jatkuvaksi kuvaukseksi.

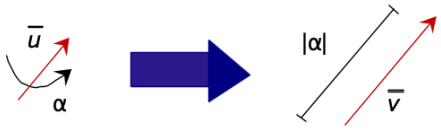
**Määritelmä 6.8** (Nollahomotooppinen)**.** [19, Määritelmä 21.1] Jos $f : X \to Y$ on homotooppinen vakiokuvauksen $\iota_X$ kanssa, sanotaan, että $f$ on nollahomotooppinen. Voidaan myös sanoa, että kuvaus $f$ on kutistuva ja merkitä $f \sim 0$.

*Huomautus* 6.9. Jatkossa käytetään nollahomotooppisesta polkuhomotopiasta kuvailempaa termiä kutistuva polku visuaalisen hahmottamisen vuoksi.

**Määritelmä 6.10** (Kantapiste ja kantapisteavaruus)**.** [19, Määritelmä 21.7] Jos $x_0 \in X$, paria $(X, x_0)$ sanotaan kantapisteavaruudeksi. Pistettä $x_0$ sanotaan $(X, x_0)$:n kantapisteeksi. Siis kantapisteavaruus on avaruus, jossa yksi piste on erikoisasemassa.

**Määritelmä 6.11** (Joukko $\Omega(X, x_0)$)**.** [19, Määritelmä 23.1] Tarkastellaan kantapisteavaruutta $(X, x_0)$. Joukon $\Omega(X, x_0)$ alkiot ovat silmukoita $s : I \to X$, joilla $s(0)$=$s(1) = x_0$. Jos $s, l \in \Omega(X, x_0)$, niin kompositio $sl$ on aina määritelty.

**Määritelmä 6.12** (Kierto)**.** [14, Luku 15] Olkoon $\mathcal{H}_3$ 3-ulotteinen Hilbertin avaruus. Tässä $\mathcal{H}_3$ on $\mathbb{R}^3$:n yksikköpallo $S^2$. Jokainen kierto on määritelty kiertokulman $\alpha \in [0, \pi]$ ja yksikkövektorin $\vec{u} \in \mathcal{H}_3$ avulla. Sen vuoksi on mahdollista määritellä kierto vektorina $\alpha\vec{u}$. Kuvassa 1 tätä on visuaalisesti havainnollistettu.




Kuva 1: Jokainen kierto voidaan määrittää kulman $\alpha$ ja yksikkövektorin $\vec{u}$ avulla tai vastaavasti vektorin $\vec{v}$ ja sen pituuden $|\alpha|$ avulla.

*Huomautus* 6.13. [14, Luku 15] Vektori $\vec{v}$, joiden pituus on $\pi$, eivät ole yksikäsitteisiä. Kierto $\pi$:n verran yksikkövektorin $\vec{u}$ ympäri on sama kierto kuin $\pi$:n verran yksikkövektorin $-\vec{u}$ ympäri. Kierrot $\pi\vec{u}$ ja $-\pi\vec{u}$ vastaavat siis samaa kiertoa.

**Määritelmä 6.14** (Antipodipiste)**.** [14, Luku 15] Olkoon $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ yksikköpallo ja $x, y \in S^2$ kaksi pistettä tällä pallolla. Sanotaan, että $x$ ja $y$ ovat antipodipisteitä, jos ne ovat pallon halkaisijan $d$ päätepisteitä.

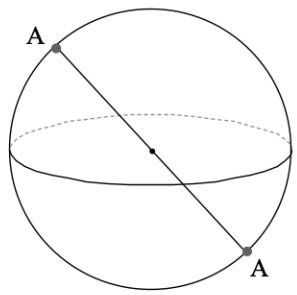
**Määritelmä 6.15** (Reaalinen projektiivinen $n$-avaruus)**.** [10, Esimerkki 0.4] Olkoon $\mathbb{R}^{n+1}$ euklidinen avaruus. Sanotaan, että avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ reaalinen projektiivinen $n$-avaruus on kaikkien origon läpi kulkevien suorien joukko. Jokaiselle tällaiselle suoralle voidaan valita virittäjä $v \neq \vec{0}$ avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. Tämä vektori $v \neq \vec{0}$ on yksikäsitteinen skalaarilla kertomiseen saakka. Reaalista projektiivista $n$-avaruutta merkitään $\mathbb{R}P^n$. Toisinaan sanotaan lyhyesti projektiviinen avaruus, jos ulottuvuus ja avaruuden laatu on tuttu asiayhteydestä.

**Määritelmä 6.16** (Tekijäavaruus)**.** [10, Esimerkki 0.4] Olkoon $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ euklidinen avaruus, josta on poistettu origo. Olkoon $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ vektori tässä avaruudessa. Määritellään ekvivalenssirelaatio $v \sim \lambda v$, jos $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vektorien $v$ pituus voidaan määrätä olemaan 1, jolloin sanotaan, että $\mathbb{R}P^n$ on tekijäavaruus. Tällöin merkitään:

$$S^n/(v \sim -v),$$

missä pallon antipodipisteet määritetään olemaan sama piste. Tekijäavaruus $S^n/\sim$ on homeomorfinen projektiivisen $n$-avaruuden $\mathbb{R}P^n$:n kanssa, jolloin merkitään $\mathbb{R}P^n \approx S^n/\sim$.

**Esimerkki 6.17.** Rotaatioryhmä $SO(3)$ on homeomorfinen tekijäavaruuden $\mathbb{R}P^3$ kanssa. Toisin sanoen $SO(3) \approx \mathbb{R}P^3$. Kuvassa 2 tämä homeomorfismi on kuvattu visuaalisesti. $SO(3)$ on siis 3-kiekko, jonka antipodipisteet on liimattu yhteen. Tällöin nämä antipodipisteet ovat sama piste, jolloin niiden etäisyys suljetulla kuulalla on 0.




Kuva 2: Jokainen $SO(3)$:n alkio voidaan kuvata yksikäsitteisesti $\pi$-säteisellä suljetulla kuulalla huomioiden antipodipisteet. Kuvassa piste $A$ merkitsee siis samaa pistettä.

**Määritelmä 6.18** (Perusryhmä)**.** [19, Määritelmä 23.3] Polkuhomotopia $\sim$ on ekvivalenssirelaatio joukossa $\Omega(X, x_0)$. Merkitään vastaavaa tekijäjoukkoa

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/\sim .$$

Joukon $\pi_1(X, x_0)$ alkiot ovat polkuhomotopialuokkia $\bar{s}$, missä $s \in \Omega(X, x_0)$. Luokkien $\bar{s}$ ja $\bar{l}$ komposition $\bar{s}\bar{l}$ muodostaminen on laskututoimitus joukossa $\pi_1(X, x_0)$. Sanotaan, että ryhmä $\pi_1(X, x_0)$ on kantapisteavaruuden $(X, x_0)$ perusryhmä eli ensimmäinen homotopiaryhmä.

*Huomautus* 6.19. [19, Esimerkki 25.5] Perusryhmä $\pi_1(X, x_0)$ ei aina ole vaihdannainen ryhmä, toisin sanoen, jos $s, l \in \Omega(X, x_0)$, on mahdollista, että polkuhomotopialuokkien $\bar{s}, \bar{l}$ kompositio ei ole vaihdannainen $\bar{s}\bar{l} \neq \bar{l}\bar{s}$.

*Huomautus* 6.20. [19, Seuraus 23.7] Jos avaruus $X$ on polkuyhtenäinen, sen perusryhmä $\pi_1(X, x_0)$ on isomorfiaa vaille riippumaton kantapisteen $x_0$ valinnasta. Merkitään siis tästä lähtien perusryhmää vain $\pi_1(X)$.

**Esimerkki 6.21** ($SO(3) \approx \mathbb{R}P^3$:n perusryhmä)**.** Rotaatioryhmän $SO(3)$:n perusryhmä $\pi_1(SO(3))$ on $\{\iota, a\}$. Kirjoitetaan ryhmälle $(\{\iota, a\}, +)$ laskutoimitustaulu:

| $+$ | $\iota$ | $a$ |
|---|---|---|
| $\iota$ | $\iota$ | $a$ |
| $a$ | $a$ | $\iota$ |

(6.1)

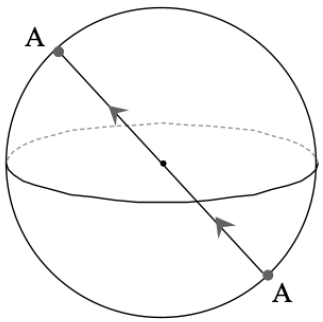
Taulusta (6.1) voidaan tunnistaa, että se vastaa ryhmän ($\mathbb{Z}_2$,+) laskutoimitustaulua, joka on:

| $+$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

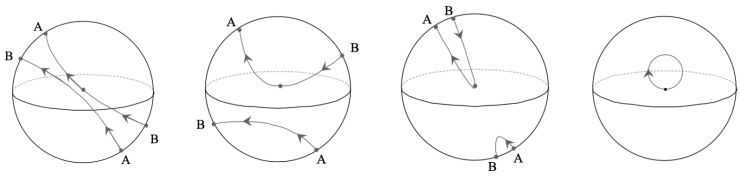
Rotaatioryhmän $SO(3)$ perusryhmä on siis $\mathbb{Z}_2$ eli $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(SO(3)) = \pi_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$.

*Huomautus* 6.22. Ryhmän $SU(2)$ perusryhmä on triviaaliryhmä, toisin sanoen $\pi_1(SU(2)) = \{0\}$. Lien ryhmien isomorfismit ovat sileitä bijektiivisiä kuvauksia eli erityisesti jatkuvia bijektioita. Määritelmän 2.14 mukaisesti ne ovat homeomorfismeja. Perusryhmä säilyy homeomorfisissa kuvauksissa, joten $SU(2)$ ja $SO(3)$ eivät ole homeomorfisia, eivätkä siten isomorfisia.

**Esimerkki 6.23** (Ryhmän $SO(3)$ kutistumaton ja kutistuva polku)**.** Ryhmän $SO(3)$ perusryhmä $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$ on jäännösluokkien modulo 2 ryhmä, kuten esimerkissä 6.21 huomattiin. Sen seurauksena, jos kuljetaan kutistumatonta $2\pi$-pituista polkua kerran, huomataan, että tätä polkua ei voida jatkuvasti kutistaa yhteen pisteeseen. Tilannetta on hahmoteltu kuvassa 3. Jos taas $2\pi$-pituinen polku kuljetaan läpi kaksi kertaa, tämä $4\pi$-pituinen polku on mahdollista kutistaa jatkuvasti yhteen pisteeseen. Tilanne on kuvattuna kuvassa 4.




Kuva 3: Ryhmän $SO(3)$ suoraa $2\pi$-pituista origon läpi kulkevaa polkua ei voidaa jatkuvasti kutistaa yhteen pisteeseen. Polun lähtöpiste on origossa, ja se jatkaa kulkuaan pisteeseen $A$ päätyen pallon toiselle puolelle, jolloin se palaa takaisin lähtöpisteeseensä.




Kuva 4: Luetaan kuvaa vasemmalta oikealle. Jos $4\pi$-pituinen polku hajotetaan kahteen osaan, saadaan kaksi antipodipistettä $A$ ja $B$. Seuraavaksi pistettä $B$ tuodaan lähemmäksi pistettä $A$. Piste $B$ kuljetetaan infinitesimaalisen lähelle pistettä $A$, jolloin päädytään kaikista oikeimman puoleisen kuvan tilanteeseen.

## 6.3 Ryhmä $SU(2)$ on $SO(3)$:n universaali peite

**Määritelmä 6.24** (Yhdesti yhtenäinen avaruus)**.** [19, Määritelmä 23.9] Olkoon $X$ topologinen avaruus. Sanotaan, että $X$ on yhdesti yhtenäinen, jos $X$ on polkuyhtenäinen ja, jos sen perusryhmä on $\pi_1(X) = \{0\}$.

**Esimerkki 6.25.** Rotaatioryhmä $SO(3)$ on polkuyhtenäinen, mutta se ei ole yhdesti yhtenäinen avaruus. Kun taas ryhmä $SU(2)$ on yhdesti yhtenäinen, koska se on polkuyhtenäinen ja sen perusryhmä on triviaali, kuten huomautuksessa 6.22 todettiin. Lisäksi $SU(2)$ on homeomorfinen yksikköpallon $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ kanssa [13, Lause 2.72].

**Määritelmä 6.26** (Peitekuvaus ja peiteympäristö)**.** [19, Määritelmä 24.1] Kuvaus $p : \tilde{X} \to X$ on peitekuvaus, jos

1. $p$ on surjektio,

2. jokaisella $x \in X$ on sellainen ympäristö $U$, että $p^{-1}U$ voidaan lausua muodossa $p^{-1}U = \bigcup\{V_j : j \in J\}$, jossa joukot $V_j$ ovat erillisiä ja avoimia, ja $p$ kuvaa jokaisen $V_j$:n homeomorfisesti $U$:lle. Sanotaan, että $U$ on $x$:n peiteympäristö $p$:n suhteen.

**Määritelmä 6.27** (Universaali peite)**.** [10, Luku 1.3] Jos $x$:n peiteympäristö $U$ $p$:n suhteen on yhdesti yhtenäinen, sanotaan, että $U$ on $x$:n universaali peite.

**Esimerkki 6.28.** Lemman 6.1 homomorfismi $\pi : SU(2) \to SO(3)$ toteuttaa peitekuvauksen määritelmän 6.26, ja koska $SU(2)$ on yhdesti yhtenäinen, $SU(2)$ on $SO(3)$:n universaali peite. Lisäksi, seurauslause 6.4 osoitti, että kuvaus $\pi$ on kahdesta yhteen kuvaus. Tällöin myös sanotaan, että $SU(2)$ on $SO(3)$:n kaksoispeite.

**Propositio 6.29.** *Ryhmän $SO(3)$ unitaaristen redusoitumattomien esitysten ulottuvuus $n$ on pariton.*

*Todistus.* Lauseen 5.20 perusteella tiedetään, että ryhmällä $SU(2)$ on tasan yksi redusoitumaton esitys yhtä ulottuvuutta $n$ kohti. Koska $SU(2)$ on $SO(3)$:n kaksoispeite, todistetaan, että $SO(3)$:lla on redusoitumattomia esityksiä vain parittomissa ulottuvuuksissa. Taulukossa 1 on kirjattu ryhmän $SU(2)$ eri ulottuvuuksien $n$ spin.

Taulukko 1: Eri ulottuvuuksien spin

| Ulottuvuus | Spin |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ |
| 3 | 1 |
| 4 | $\frac{3}{2}$ |
| 5 | 2 |

Olkoon $\pi : SO(3) \to GL(V)$ esitys. Muistetaan, että esitys $\pi$ kuvaa identiteettielementin $n \times n$-identiteettimatriisille. Määritelmän 3.24 mukaisesti voidaan siis kirjoittaa:

$$\pi(A) = \pi(A \circ \mathbb{I}) = \pi(A)\pi(\mathbb{I}).$$

Olkoon $\varphi : SU(2) \to SO(3)$ peitekuvaus, jolle pätee:

$$\varphi(\pm\mathbb{I}_{2\times 2}) = \mathbb{I}_{3\times 3}.$$

Jos ryhmän $SO(3)$ redusoitumaton esitys on $\pi$ ja, jos muodostetaan yhdistetty funktio $\Omega$, voidaan määritellä:

$$\begin{aligned} &\Omega : SU(2) \to SO(3) \to GL(V), \\ &\Omega = \pi \circ \varphi. \end{aligned}$$

Tämä uusi funktio $\Omega$ on itse asiassa redusoitumaton esitys, jolle pätee:

$$\Omega(\pm\mathbb{I}_{2\times 2}) = \pi_{n\times n} \circ \varphi(\pm\mathbb{I}_{2\times 2}) = \mathbb{I}_{n\times n}. \tag{6.2}$$

Ja proposition 5.8 perusteella esityksen $\Omega_{4\times 4} : SU(2) \to GL(\mathbb{C}^4)$ alkio voidaan kirjoittaa muodossa:

$$\Omega_{4\times 4}\begin{pmatrix} e^{+i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+i\frac{3}{2}\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+i\frac{1}{2}\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{1}{2}\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\frac{3}{2}\theta} \end{pmatrix}$$

ja samalla tavalla, kun $\Omega_{5\times 5} : SU(2) \to GL(\mathbb{C}^5)$:

$$\Omega_{5\times 5}\begin{pmatrix} e^{+i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+i2\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{+i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i2\theta} \end{pmatrix}.$$

Jos asetetaan $\theta = 2\pi$, niin Eulerin lauseen [3] nojalla saadaan tuloksena matriisit:

$$\Omega_{4\times 4}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

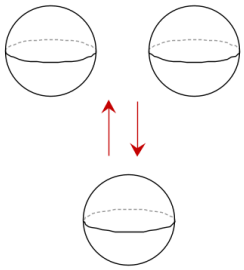
$$\Omega_{5\times 5}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Havaitaan, että parillisessa ulottuvuudessa esitys $\Omega$ kuvaa negatiivisen identiteetin negatiiviseksi identiteetiksi. Tämä on ristiriidassa yhtälön (6.2) kanssa. Parittomassa ulottuvuudessa esitys $\Omega$ kuvaa negatiivisen identiteetin $-\mathbb{I}_{2\times 2}$ positiiviseksi, joten ryhmällä $SO(3)$ voi olla redusoitumattomia esityksiä ainoastaan parittomissa ulottuvuuksissa. □

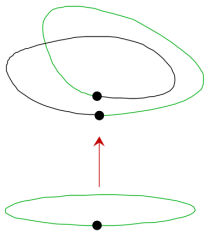
*Huomautus* 6.30. Vaikka propositio 6.29 pitääkin paikkaansa, se ei ole koko totuus. Ryhmällä $SO(3)$ voi olla redusoitumattomia esityksiä vain parittomissa ulottuvuuksissa $n$, mutta sillä on jokaisessa ulottuvuudessa projektiivisia unitaarisia esityksiä.

Kuvassa 5 on kuvattuna $SO(3)$:n peiteavaruus $SU(2)$ kahtena kolmiulotteisena yksikkökuulana. Huomioitavaa on, että kuvassa 5 esiintyvät punaiset nuolet eivät viittaa varsinaisiin kuvauksiin, vaan nuolet toimivat sen havainnollistamisena, että voidaksemme tarkastella $SO(3)$:n unitaarisia redusoitumattomia esityksiä täytyy meidän tehdä tarkastelu $SO(3)$:n peiteavaruudessa $SU(2)$.

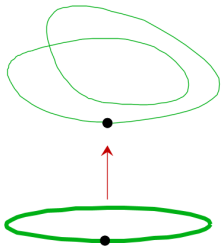
Kuvassa 6 taas on kuvattuna ei-kutistuva polku eli origon läpi kulkeva $2\pi$-pituinen suora polku sekä $SO(3)$:ssa sekä sen kaksoispeitteessä $SU(2)$. Kun polku on $2\pi$-mittainen, peiteavaruudessa $SU(2)$ lähtö- ja päätepiste eivät vastaa toisiaan. Kuvassa 7 on havainnollistettu origon läpi kulkevaa $4\pi$-pituista polkua ryhmässä $SO(3)$ ja sen peiteavaruudessa $SU(2)$.



Kuva 5: $SU(2)$ on $SO(3)$:n universaali kaksoispeite. $SU(2)$ on topologisesti kaksi kolmiulotteista yksikkökuulaa liimattuna toisiinsa niiden reunoista. Se vastaa topologisesti yksikköpalloa $S^3 \subset \mathbb{R}^4$.



Kuva 6: Vihreällä on kuvattuna origon läpi kulkeva $2\pi$-pituinen suora polku ryhmässä $SO(3)$ ja $SO(3)$:n yläpuolella ryhmässä $SU(2)$. Havaitaan, että piste ei palaa lähtöpaikkaansa ryhmän $SO(3)$ peiteavaruudessa.



Kuva 7: Vahvennetulla vihreällä on kuvattuna origon läpi kulkeva $4\pi$-pituinen polku ryhmässä $SO(3)$ ja vihreällä peiteavaruudessa $SU(2)$. Nyt havaitaan, että piste palaa lähtöpaikkaansa $SU(2)$:ssa.

## 6.4 $SO(3)$:n projektiiviset unitaariset esitykset

**Määritelmä 6.31** (Kuvauksen nosto)**.** [19, Määritelmä 24.4] Tarkastellaan topologisia avaruuksia $X, Y, Z$. Olkoot $g : X \to Y$ ja $f : Z \to Y$ jatkuvia kuvauksia. Sanotaan, että jatkuva kuvaus $\tilde{f} : Z \to X$ on $f$:n nosto, jos $g \circ \tilde{f} = f$ eli kaavio (6.3) kommutoi:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "g"] & \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd} \tag{6.3}$$

Nimitys nosto tulee siitä, että kaaviossa (6.3) on käytäntönä sijoittaa avaruus $X$ avaruuden $Y$ yläpuolelle.

**Määritelmä 6.32** (Projektiivinen unitaarinen esitys)**.** [8, Luku 3.1.1] Tarkastellaan ryhmää $G$. Olkoon $c : G \times G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funktio, jolle pätee $|c| = 1$ kaikilla $g, h \in G$. Sanotaan, että kuvaus $P : G \to U(V)$ on projektiivinen esitys, jos se toteuttaa kaikilla $g, h \in G$:

$$P(g)P(h) = c(g, h)P(gh).$$

*Huomautus* 6.33. Jatkossa merkitään $P : G \to PU(V)$. Siten korostetaan, että kyseessä on projektiivinen unitaarinen esitys.

*Huomautus* 6.34. Projektiivinen esitys $P$ on tavallinen esitys, jos kaikilla $g, h \in G$ pätee $c(g, h) = 1$.

Projektiivinen esitys ei siis ole varsinainen esitys. Jos halutaan luokitella kaikki $SO(3)$:n projektiiviset unitaariset esitykset, voidaan hyödyntää esimerkin 6.28 tietoa, että ryhmä $SU(2)$ on ryhmän $SO(3)$ universaali peite. Olkoon $g \in SU(2)$. Olkoot $\tilde{\pi} : SO(3) \to PU(n)$ projektiivinen esitys ja $\pi : SU(2) \to SO(3)$ peitekuvaus. Muodostetaan yhdistetty funktio $\tau(g)$ siten, että:

$$SU(2) \xrightarrow{\pi} SO(3) \xrightarrow{\tilde{\pi}} PU(n),$$

jolle pätee:

$$\tau(g) = (\tilde{\pi} \circ \pi)(g) = \tilde{\pi}(\pi(g)), \quad \text{kaikilla } g \in SU(2). \tag{6.4}$$

Tämä yhdistetty funktio $\tau(g)$ on siis $SU(2)$:n projektiivinen, unitaarinen esitys. Kuitenkin, edelleen tarkastelussa olevat esitykset ovat projektiivisia. Olisi toivottavaa, että voitaisiin tarkastella tavanomaisia unitaarisia esityksiä, sillä niiden ominaisuudet ovat paremmin tunnettuja. Tähän ratkaisuna on matemaatikko Valentine Bargmannin (1908–1989) lause vuodelta 1964. [16]

**Määritelmä 6.35** (Bargmannin lause)**.** [16] Olkoon $G$ polkuyhtenäinen ja yhdesti yhtenäinen äärellisulotteinen Lien ryhmä ja siten, että sen toinen kohomologiaryhmä on triviaali, tarkoittaen $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \{0\}$. Silloin jokaisella projektiivisella unitaarisella esityksellä $\tilde{U} : G \to PU(V)$ on olemassa nosto unitaariselle esitykselle $U : G \to U(V)$.

*Huomautus* 6.36. Tässä työssä ei määritellä kohomologiaryhmää $H$ tarkemmin, koska tässä tapauksessa voidaan löytää funktio $\lambda : SU(2) \to \mathbb{C}$ siten, että $g \mapsto \lambda(g)P(g)$ on unitaarinen esitys. Olkoot $g, h \in SU(2)$. Nyt pätee:

$$c(g, h)\frac{\lambda(gh)}{\lambda(g)\lambda(h)} = 1, \quad \text{kaikilla } g, h \in SU(2).$$

Tarkastellaan nyt teoreettisena fyysikkonakin tunnetun Bargmannin lausetta lähemmin. Olkoon $\tau : SU(2) \to PU(V) \subset GL(V)$ projektiivinen unitaarinen esitys. Esitys $\tau$ on määritelty kuten yhtälössä (6.4).

Bargmannin lause 6.35 sanoo, että tällä esityksellä $\tau$ on olemassa nosto unitaariselle esitykselle $\omega : SU(2) \to U(V) \subset GL(V)$. Voidaksemme siis tarkastella kvanttimekaanista spiniä täytyy meidän suorittaa Bargmannin lauseen nosto. Hahmotellaan tilannetta seuraavan kaavion avulla:

$$\begin{tikzcd} SU(2) \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, "\tau"'] & U(V) \arrow[d, "b"] \\ & PU(V) \end{tikzcd} \tag{6.5}$$

Kaavio (6.5) on Bargmannin lauseen 6.35 mukainen. Noston avulla päästään tarkastelmaan $SU(2)$:n projektiivisten unitaaristen esitysten sijasta $SU(2)$:n unitaarisia esityksiä. On myös mahdollista määritellä projektiivinen esitys $b : U(V) \to PU(V)$, jolla päästään takaisin projektiiviseen unitaariseen ryhmään.

Elektroni siis palaa alkutilaansa $4\pi$-kierron jälkeen, koska rotaatioryhmän $SO(3)$ kaksoispeite on $SU(2)$. Kvanttimekaaninen spin rakentuu ryhmän $SO(3)$ projektiivisista unitaarisista esityksistä, mutta voidaksemme tutkia niitä, meidän on tarkasteltava kaksoispeitteen $SU(2)$ unitaarisia redusoitumattomia esityksiä. Näiden esitysten spin on $n + \frac{1}{2}$, missä $n$ on tarkasteltavan esityksen lähtöjoukon ulottuvuus.

# Viitteet


[1] J. Baez, J. P. Munian. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, Singapore, 1994. ISBN 981-02-1729-3.

[2] Y.A. Bakhturin. Campbell-Hausdorff formula. *Encyclopedia of Mathematics*. Päivitetty 4.5.2017. Viitattu 25.7.2025. Saatavissa: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Campbell-Hausdorff_formula&oldid=41237.

[3] A. F. Beardon. *Algebra and Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. ISBN 1-107-13332-7.

[4] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics: Lie Groups And Lie Algebras, Part 1*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1975. ISBN 2-7056-5826-2.

[5] K. Engø-Monsen. On the BCH-formula in so(3). *ResearchGate*. Päivitetty 6.6.2014. Viitattu 14.7.2025. Saatavissa: https://www.researchgate.net/publication/233591614_On_the_BCH-formula_in_so3.

[6] B. Friedrich, D. Herschbach. *Stern and Gerlach: How a Bad Cigar Helped Reorient Atomic Physics*. Physics Today, Volume 56, Issue 12, 2003, pp. 53-59.

[7] W. Fulton, J. Harris. *Representation theory : A First Course*. Springer, New York, 1991. ISBN 0-387-97495-4.

[8] T. Gannon.*Moonshine Beyond The Monster: The Bridge Connecting Algebra, Modular Forms and Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. ISBN 1-107-16121-5.

[9] B. C. Hall.*Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer, New York, 2015, 2.painos. ISBN 978-3-319-13467-3.

[10] A. Hatcher.*Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. ISBN 0-521-79540-0.

[11] J. Häsä, J. Rämö.*Johdatus abstraktiin algebraan*. Gaudeamus, Helsinki, 2012. ISBN 978-952-495-234-7.

[12] T. W. Judson.*Abstract Algebra: Theory and Applications*. Orthogonal Publishing L3C, Michigan, 2016. ISBN 978-194-432-502-2.

[13] K. Kytölä.*An Introduction To Lie Groups And Lie Algebras And Representation Theory*. Aalto-yliopisto, Lecture Notes, 2022. Viitattu 20.7.2025. Saatavissa: https://github.com/kkytola/Lie-course-materials/blob/main/Lie_course.pdf.

[14] N. Miller.*Representation Theory And Quantum Mechanics*. Lecture Notes, 2018. Viitattu 14.7.2025. Saatavissa: https://scholar.harvard.edu/files/noahmiller/files/representation-theory-quantum.pdf.

[15] H. H. Schaefer.*Topological Vector Spaces*. Macmillan, New York, 1966. ISBN 13 978-0387987262.

[16] D. J. Simms.*A short proof of Bargmann's criterion for the lifting of projective representations of Lie groups*. Reports on Mathematical Physics, Volume 2, Issue 4, 1971, pp. 283-287.

[17] G. Strang.*Introduction to Linear Algebra*. Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, 2009. ISBN 978-0-9802327-1-4.

[18] J. Väisälä.*Topologia I*. Limes, Helsinki 2007, 4.painos. ISBN 978-951-745-216-8.

[19] J. Väisälä.*Topologia II*. Limes, Helsinki 1999, 1.painos. ISBN 951-745-185-7.

[20] F. W. Warner.*Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Glenview IL,London, 1971. ISBN 978-0387908946.

[21] P. Woit.*Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction*. Springer Cham, New York, 2017. ISBN 978-3-319-64610-7.