KANDIDAATINTYÖ
2025

Anton Saari

Aalto-yliopisto
Sähkötekniikan korkeakoulu
Elektroniikka- ja sähkötekniikka

Anton Saari

Port-Hamiltonin mallinnus oikosulkumoottorille

Kandidaatintyö

29.08.2025

Työn ohjaaja:

Prof. Marko Hinkkanen

AALTO-YLIOPISTO
SÄHKÖTEKNIIKAN KORKEAKOULU
PL 13000
00076 AALTO

TEKNIIKAN KANDIDAATINTYÖN TIIVISTELMÄ

Tekijä: Anton Saari

Työn nimi: Port-Hamiltonin mallinnus oikosulkumoottorille

Tutkinto-ohjelma: Elektroniikka- ja sähkötekniikka

Päiväys: 29.08.2025 Sivumäärä: 26

Vastuuopettaja: TkT Markus Turunen

Ohjaaja: Prof. Marko Hinkkanen

Kieli: Suomi

Tässä kandidaatintyössä mallinnetaan oikosulkumoottori port-Hamiltonin järjestelmämuodossa. Port-Hamiltonin järjestelmät tarjoavat energiaperusteisen lähestymistavan epälineaaristen fysikaalisten järjestelmien, kuten sähkömekaanisten koneiden, mallintamiseen. Keskeinen etu on järjestelmän passiivisuus ja se, että energiavirrat, häviöt ja varastot voidaan erottaa eksplisiittisesti. Työssä käytetään dynaamista Γ-sijaiskytkentää, joka mahdollistaa magneettisen kyllästymisen ja virranahdon huomioimisen. Virranahdon mallintamiseen hyödynnetään toisen asteen tikapuuverkkoa. Malliin sisällytetään lisäksi mekaaninen osajärjestelmä, ja kaikki osat yhdistetään port-Hamiltonin teorian mukaisesti tehotasapainoa säilyttäen. Tulokset osoittavat, että port-Hamilton-lähestymistapa soveltuu hyvin oikosulkumoottorien monipuoliseen ja fysikaalisesti perusteltuun mallintamiseen. Mallia simuloidaan MATLAB/Simulink-ympäristössä, ja tuloksista havaitaan erityisesti tikapuuverkon vaikutus oikosulkumoottorin käyttäytymiseen suurilla taajuuksilla.

Avainsanat: Oikosulkumoottori, port-Hamilton, port-Hamiltonin järjestelmät

Sisällysluettelo

Tiivistelmä ii
Symbolit ja lyhenteet iv
1 Johdanto 1
2 Oikosulkumoottorin teoria 3
2.1 Oikosulkumoottori 3
2.1.1 Staattori 3
2.1.2 Roottori 4
2.1.3 Toimintaperiaate 4
2.2 Avaruusvektorit 4
2.2.1 Avaruusvektorinotaatio 4
2.2.2 Koordinaatistomuunnokset 5
2.3 Sijaiskytkennät ja dynaaminen **Γ**-sijaiskytkentä 6
3 Port-Hamilton järjestelmäteoria 7
3.1 Dirac-rakenne ja porttipohjainen mallinnus 7
3.2 Port-Hamiltonin järjestelmät 8
3.3 Järjestelmien kytkentä 9
4 Port-Hamiltonin mallinnus dynaamiselle **Γ**-sijaiskytkennälle 11
4.1 Dynaamisen **Γ**-sijaiskytkennän osajärjestelmien mallit 11
4.1.1 **Γ**-sijaiskytkennän malli 11
4.1.2 Tikapuuverkon malli 12
4.1.3 Mekaniikan malli 13
4.2 Yhdistetty port-Hamiltonin mallinnus 14
5 Simulaatio 16
5.1 Rakenne 16
5.2 Parametrit 17
5.3 Aikatason simulointi 17
6 Yhteenveto 19

Symbolit ja lyhenteet

i_r = Roottorivirta

i_s = Staattorivirta

L_l = Kokonaishajainduktanssi

L_s = Staattori-induktanssi

$L_{\sigma b}$ = Urasillan hajainduktanssi

$L_{\sigma 0}$ = Roottorihäkin hajainduktanssi

R_r = Roottoriresistanssi

R_s = Staattoriresistanssi

R_{r0} = Roottorihäkin resistanssi

u_r = Roottorijännite

u_s = Staattorijännite

ϑ_m = Roottorin kulma

ω_m = Roottorin kulmanopeus

ψ_r = Roottorikäämivuo

ψ_s = Staattorikäämivuo

$\psi_{\sigma b}$ = Urasillan hajakäämivuo

τ_L = Kuormamomentti

τ_m = Sähkömagneettinen vääntömomentti

1 Johdanto

Port-Hamiltonin järjestelmät ovat osoittautuneet erittäin tehokkaiksi työkaluiksi epälineaaristen fysikaalisten järjestelmien kuten sähköisten, mekaanisten ja sähkömekaanisten koneiden mallintamiseen. Keskeinen etu port-Hamiltonin järjestelmissä on se, että häviöt, energiavarastot ja osajärjestelmien kytkennät pystytään erottelemaan toisistaan helposti. Port-Hamiltonin järjestelmäteoria tarjoaa tähän useita käsitteitä ja työkaluja, kuten energian varastojen ja häviöiden muotoilun sekä säätöjärjestelmien tulkinnan virtuaalisina järjestelmäkomponentteina [1]. Lisäksi port-Hamiltonin mallinnus takaa järjestelmän passiivisuuden. Passiivisuus tarkoittaa, että järjestelmään syötettävä teho on aina vähintään yhtä suuri kuin siitä vapautuva tai muuntuva teho. Tämä ominaisuus on erityisen hyödyllinen järjestelmän stabiilisuuden kannalta. Tässä työssä sovellettavat port-Hamilton-mallinnusmenetelmät perustuvat lähteeseen [1].

Oikosulkumoottorit muodostavat erityisen kiinnostavan kohteen port-Hamilton-mallintamiselle niiden moniporttisen rakenteen ja vahvan epälineaarisuuden takia. Port-Hamiltonin mallinnus oikosulkumoottorille ottaisi huomioon energiaperusteisen näkökulman eri osajärjestelmien välillä tapahtuvien vuorovaikutusten avulla [2]. Perinteisesti oikosulkumoottorin sähköistä dynamiikkaa mallinnetaan sijaiskytkennöillä. Yleisimpiä sijaiskytkentöjä ovat Γ-sijaiskytkentä, käänteis-Γ-sijaiskytkentä ja T-sijaiskytkentä. Sijaiskytkentöjen yhtälöt kuvaavat oikosulkumoottorin dynamiikkaa hyvin, mutta niissä ei korostu energian virtausten erittely. Port-Hamiltonin mallinnus on taas rakennettu suoranaisesti energiaperusteisesta näkökulmasta, jolloin oikosulkumoottorin jokainen termi voidaan tulkita energian varastointina, häviönä tai reitityksenä.

Tässä opinnäytteessä käsitellään dynaamista oikosulkumoottorin Γ-sijaiskytkentää [3] port-Hamiltonin mallinnusmuodossa. Dynaaminen Γ-sijaiskytkentä ottaa huomioon magneettisen kyllästyksen suljetuilla roottorin urilla ja syvillä roottorin sauvoilla. Lisäksi malli ottaa huomioon roottorin virran taajuudesta riippuvan roottorin hajainduktanssin ja roottoriresistanssin. Tätä ilmiötä kutsutaan virranahdoksi, ja sitä mallinnetaan tutkimuksessa resistanssi-induktanssi tikapuuverkon avulla. Port-Hamiltonin mallinnuksen avulla dynaaminen Γ-sijaiskytkentä voidaan jakaa osajärjestelmiin, joita voidaan tarkastella erikseen ja kytkeä takaisin yhdeksi kokonaisuudeksi. Tämä sallii fysikaalisesti tarkan tulkinnan oikosulkumoottorin käyttäytymisestä säilyttäen samalla järjestelmän tehotasapainon.

Luvun 2 alussa esitellään oikosulkumoottorin rakenne ja toiminta. Tämän jälkeen esitellään avaruusvektorit ja niiden notaatiot, ja luvun lopussa käydään läpi sijaiskytkennät ja työssä sovellettava dynaaminen Γ-sijaiskytkentä. Luvussa 3 esitellään työssä käytettävät port-Hamiltonin järjestelmät ja niihin liittyvä taustateoria.

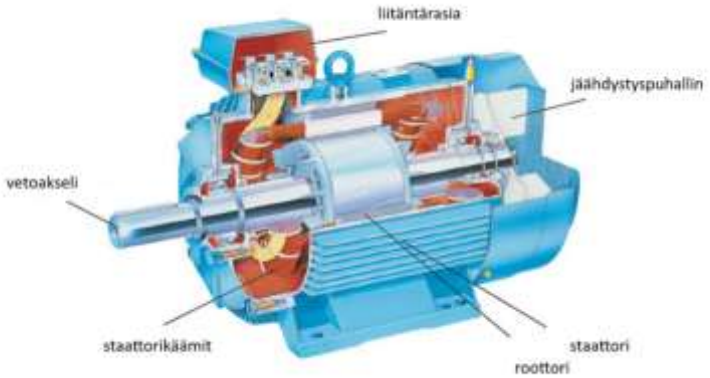
Luvussa 4 esitellään dynaamisen Γ-sijaiskytkennän osajärjestelmien dynamiikat ja mallinnetaan niiden port-Hamiltonin järjestelmät. Luvun lopussa osajärjestelmien port-Hamiltonin mallinnukset kytketään yhdeksi kokonaisuudeksi. Luvussa 5 simuloidaan dynaamisen Γ-sijaiskytkennän port-Hamiltonin mallinnus, jossa korostuu tikapuuverkon vaikutus oikosulkumoottorin toimintaan.

2 Oikosulkumoottorin teoria

Tässä luvussa esitellään oikosulkumoottorin keskeinen rakenne ja toiminta, jonka jälkeen käydään läpi työssä käytettävät oikosulkumoottorin avaruusvektorit ja sijaiskytkennät.

2.1 Oikosulkumoottori

Oikosulkumoottori on tyypillinen moottori monilla eri teollisuuden aloilla sen vahvan toimintakyvyn ja kustannustehokkuuden takia. Tärkeä etu oikosulkumoottorissa on, että sen valmistamiseen ei käytetä harvinaisia maametalleja [4]. Kuvassa 1 on oikosulkumoottorin rakenne. Keskeisimmät osat ovat kiinteä paikallaan oleva staattori ja pyörivä roottori. Staattorin ja roottorin välissä on ilmaväli, jonka kautta kulkee niitä yhdistävä magneettikenttä.



Kuva 1: Oikosulkumoottori [4]. Kuva muokattu.

2.1.1 Staattori

Staattori koostuu teräslevyistä valmistetuista laminaateista [5], jotka ovat puristettu yhteen sylinterin muodoksi [6]. Staattorissa on symmetrinen kolmivaiheinen häkkikäämitys, joka on sijoitettu siten, että voidaan olettaa magnetomotorisen voiman (mmv) jakautuvan tilassa sinimuotoisesti ilmavälin ympäri [7]. Kun staattoriin syötetään kolmivaiheista vaihtovirtaa, käämit alkavat käyttäytymään sähkömagneetteina, luoden pyörivän magneettikentän, joka käynnistää ja ajaa moottoria [8].

2.1.2 Roottori

Roottorin rautasydän koostuu ohuista pinoon asetetuista teräslevyistä [9]. Rautasydämen ulkokehälle sijoitetaan roottorin uriin sauvoja. Nämä sauvat ovat usein suurissa moottoreissa valmistettu kuparista, kun taas pienemmissä moottoreissa ne koostuvat joko alumiinista tai kuparista. Sauvat oikosuljetaan roottorin molemmissa päissä sijaitsevilla rengasmaisilla päädyillä. Roottorilla ei ole ulkoista sähköistä yhteyttä oikosulkumoottorin kanssa, sillä roottorivirrat indusoituvat staattorin ja roottorin välisestä ilmavälistä. [6]

2.1.3 Toimintaperiaate

Oikosulkumoottorin toiminta perustuu sähkömagneettiseen induktioon. Kun staattoriin syötetään kolmivaiheista vaihtovirtaa, se luo ilmaväliin vakiosuuruisen pyörivän magneettikentän, joka indusoi virran roottoriin. Tämä indusoitu roottorivirta vuorovaikuttaa ilmavälin magneettikentän kanssa luodakseen sähkömagneettisen momentin, joka saa roottorin pyörimään. Roottori pyörii Lenzin lain mukaisesti pyörivän magneettikentän suuntaan niin, että suhteellinen nopeus magneettikentän ja roottorin välillä pienenee. Roottori saavuttaa lopulta vakiintuneen pyörimisnopeuden, joka on pienempi kuin tahtinopeus, jolla staattorin pyörivä magneettikenttä pyörii ilmavälissä. [5] Tämän takia oikosulkumoottoreita kutsutaan epätahtikoneiksi, sillä roottori ja staattorin magneettikenttä eivät pyöri samassa tahdissa.

2.2 Avaruusvektorit

Avaruusvektori kuvaa avaruudessa olevan sinimuotoisen jakautuman hetkellistä suuruutta ja kulmaa, jotka voivat muuttua ajan kuluessa. Niiden käyttö yksinkertaistaa sähköisten koneiden esitystapaa huomattavasti esimerkiksi verrattuna siihen, että jokaiselle käämille johdetaan ja ratkaistaan erikseen yhtälöt koneen kaikkien muutosilmiöiden kuvaamiseksi. [10] Avaruusvektoreita voidaan käyttää kaikenlaisten epäsymmetristen tai yliaaltoja sisältävien kolmivaihevirtojen esittämiseen kompleksilukuina tai vektoreina. Oikosulkumoottorin virrat, vuot ja jännitteet voidaan esittää avaruusvektoreina.

2.2.1 Avaruusvektorinotaatio

Kolmen vaiheen virrat voidaan esittää yksinkertaisempana kaksivaiheisena avaruusvektorina

$$i_s^s = \frac{2}{3}\left(i_a + i_b e^{-j2\pi/3} + i_c e^{-j4\pi/3}\right) = i_\alpha + j i_\beta, \tag{1a}$$

missä i_a, i_b, i_c ovat mielivaltaisesti muuttuvia hetkellisiä vaihemuuttujia ja yläindeksi s merkitsee staattorikoordinaatistoa. i_α on virran avaruusvektorin reaaliosa ja $j i_\beta$ kompleksiosa. Kompleksinen avaruusvektori voidaan esittää reaalimuodossa vektorina

$$i_s^s = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}, \tag{1b}$$

joka on tässä kandidaatintyössä käytettävä notaatio avaruusvektoreille. Tämä sama notaatio pätee myös jännitteille ja käämivoille.

2.2.2 **Koordinaatistomuunnokset**

Koordinaatistomuunnokset ovat monissa tilanteissa tarpeellisia, sillä staattorin ja roottorin koordinaatistot liikkuvat eri nopeuksilla. Koordinaatistomuunnos saattaa helpottaa säädön logiikkaa tai ottaa huomioon magneettiset epäsymmetrisyydet [10]. Staattorikoordinaatistossa ($\alpha\beta$) avaruusvektorit kuvataan staattorin näkökulmasta, kun taas roottorikoordinaatistossa (dq) ne kuvataan roottorin näkökulmasta, jolloin staattori ikään kuin pyörii korkealla nopeudella näkökulman ympäri [10]. Yleinen muunnos staattorikoordinaatistosta roottorikoordinaatistoon on

$$i_s = e^{-J\vartheta_m} i_s^s = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}, \tag{2a}$$

missä rotaatiomatriisi $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ vastaa kompleksilukua ja roottorin kulma on $\vartheta_m = \int \omega_m dt$. Roottorikoordinaatiston avaruusvektoreissa ei ole yläindeksiä. Vastaavasti koordinaatistomuunnos roottorikoordinaatistosta staattorikoordinaatistoon on

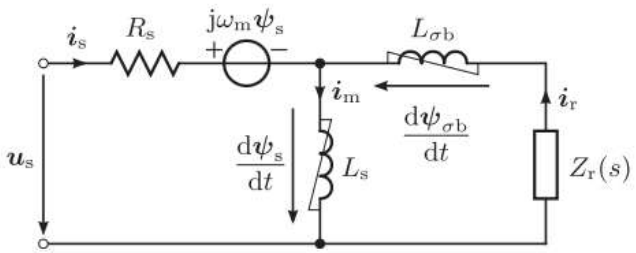
$$i_s^s = e^{J\vartheta_m} i_s = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}. \tag{2b}$$

Tässä opinnäytetyössä oikosulkumoottorin dynamiikkaa tarkastellaan roottorikoordinaatistossa.

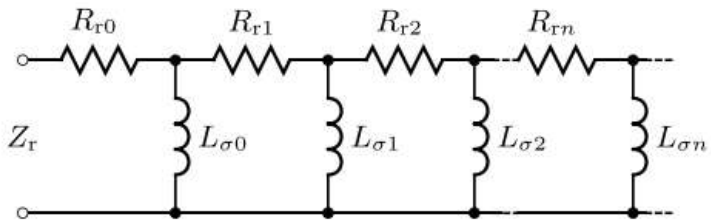
2.3 Sijaiskytkennät ja dynaaminen Γ-sijaiskytkentä

Oikosulkumoottorien sähköistä dynamiikkaa voidaan kuvata erilaisilla sijaiskytkennöillä, joista yleisimpiä ovat Γ-sijaiskytkentä, käänteis-Γ-sijaiskytkentä ja T-sijaiskytkentä. T-sijaiskytkentä soveltuu hyvin perusmallinnukseen, mutta sen rakenne on liian monimutkainen kuvaamaan magneettista kyllästystä tarkasti [7]. T-sijaiskytkentä voidaan muuntaa yksinkertaisemmiksi Γ- ja käänteis-Γ-malleiksi ilman tiedon menetystä. Γ-sijaiskytkennässä staattorivuo on suoraan verrannollinen staattori-induktanssin virtaan. Käänteis-Γ-sijaiskytkentä eroaa Γ-sijaiskytkennästä siten, että kokonaishajainduktanssi on staattorin puolella. Lineaarisessa tapauksessa, jossa magneettista kyllästystä ei huomioida, nämä sijaiskytkennät ovat matemaattisesti identtiset [7].

Tässä kandidaatintyössä sovellettava dynaaminen malli perustuu lähteessä [3] esitettyyn laajennettuun Γ-sijaiskytkennän malliin, joka ottaa huomioon sekä roottorin urasiltojen kyllästymisen että virranahdon. Virranahto tarkoittaa, että roottorin hajainduktanssi ja roottoriresistanssi riippuvat roottorivirran taajuudesta. Urasiltojen kyllästymisen mallintamiseksi vuotovirta jakautuu kahteen osaan, joista toinen kulkee roottorisauvojen kautta ja toinen urasillan kautta. Kuvassa 2 on esitetty dynaamisen Γ-sijaiskytkennän rakenne, jossa $L_{\sigma b}$ kuvaa urasillan hajainduktanssia ja L_s staattori-induktanssia. $Z_r(s)$ on roottorihäkin impedanssi. Malli huomioi virranahdon kuvassa 3 näkyvän resistanssi-induktanssi tikapuuverkon avulla, jossa $L_{\sigma 0}$ on roottorihäkin hajainduktanssi ja R_{r0} on roottorihäkin resistanssi. Tikapuuverkko mahdollistaa virranahdon tarkastelun suurilla taajuuksilla.



Kuva 2: dynaaminen Γ-sijaiskytkentä [3].



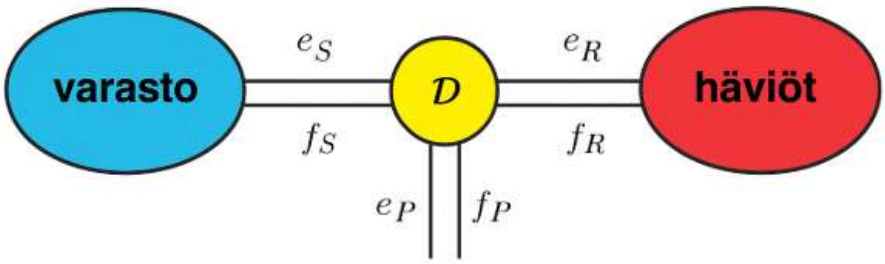
Kuva 3: Roottorihäkin impedanssi [3].

3 Port-Hamilton järjestelmäteoria

Port-Hamiltonin järjestelmät ovat järjestelmäteoreettinen laajennus perinteisestä hamiltonilaisesta mekaniikasta, jonka kehitykseen ovat keskeisesti vaikuttaneet Arjan van der Schaft ja Bernard Maschke [1]. Tämän mallinnusmenetelmän avulla voidaan kuvata moniulotteisia ja kompleksisia fysikaalisia järjestelmiä rakentamalla ne erillisten osajärjestelmien kytkennöistä. Suuri etu port-Hamiltonin järjestelmissä on energian varastoinnin ja häviöiden erottelu, jonka takia ne ovat olleet viime vuosina suurena mielenkiinnonkohteena monilla eri aloilla, etenkin säätötekniikan sovelluksissa, joissa otetaan huomioon sekä sähköiset että mekaaniset osajärjestelmät. Lisäksi port-Hamiltonin järjestelmien merkittävä ominaisuus on passiivisuus. Passiivisuus tarkoittaa, että järjestelmään syötettävä teho on aina vähintään yhtä suuri kuin siitä vapautuva tai muuntuva teho. Tämä ominaisuus on erityisen hyödyllinen järjestelmän stabiilisuuden kannalta.

3.1 Dirac-rakenne ja porttipohjainen mallinnus

Port-Hamiltonin järjestelmät perustuvat Dirac-rakenteeseen, joka tarjoaa yleisen ja koordinaattivapaan tavan kuvata tehotasapainollisia vuorovaikutuksia. Dirac-rakenteiden matemaattiset määritelmät ja ominaisuudet on käsitelty tarkemmin lähteessä [11]. Dirac-rakenteiden keskeinen ominaisuus on, että niiden koostaminen tuottaa uuden Dirac-rakenteen. [1] Tällä on oleellinen seuraus, sillä port-Hamiltonin järjestelmien kytkeminen porttien avulla tuottaa uuden port-Hamiltonin järjestelmän. Portti on määritelty parina (f, e) jossa f merkitsee virtausmuuttujaa (engl. flow) ja e voimamuuttujaa (engl. effort) [12].



Kuva 4: port-Hamiltonin järjestelmä [1]. Kuva muokattu.

Yleisesti ottaen port-Hamiltonin järjestelmät voidaan jakaa kuvan 4 mukaisesti kolmeen osaan:

- Energiaa varastoivat osat (S)
- Häviölliset osat (R)
- Energiaa reitittävät osat (D)

Esimerkkejä energiaa varastoivista osista ovat kondensaattorit ja induktanssit. Esimerkkejä häviöllisistä osista ovat vastukset ja vaimentimet, kun taas esimerkkejä energian reititysosista ovat muuntajat ja gyraattorit. [1] Kuvassa 4 näkyvät portit (e_S, f_S) ja (e_R, f_R) ovat energiaa varastoivien ja häviöllisten osien porttiparit vastaavasti. Portti (e_P, f_P) kuvaa järjestelmän vuorovaikutusta ympäristönsä kanssa. Dirac-rakenne sallii järjestelmän tehotasapainon

$$e^T f = 0, \tag{3}$$

missä yläindeksi T merkitsee transpoosia. Yhtälö (3) ilmaisee Dirac-rakenteeseen tulevan tai lähtevän kokonaistehon olevan aina nolla. Tämän perusteella voi todeta, että port-Hamiltonin järjestelmissä porttien välillä tapahtuva vuorovaikutus on tehotasapainossa.

3.2 Port-Hamiltonin järjestelmät

Dirac-rakenteet sallivat matriisimuotoisen tilaesityksen port-Hamiltonin järjestelmille. Oikosulkumoottorille tämä on erittäin havainnollistava tapa mallintaa sen dynamiikkaa. Seuraavaksi esitellään kaksi matriisimuotoista tilaesitystä.

Tulo-tila-lähtö (engl. input-state-output) port-Hamiltonin järjestelmä:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [S(x) - R(x)]\nabla H(x) + G(x)u\,, \\ y &= G^T(x)\nabla H(x), \end{aligned} \tag{4}$$

missä $x \in \mathbb{R}^n$ kuvaa tilamuuttujia, $S(x) = -S^T(x) \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ on vinosymmetrinen kytkentämatriisi, $R(x) = R^T(x) \geq 0 \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ on symmetrinen häviöitä kuvaava matriisi, $H(x)$ on Hamiltonin funktio, eli järjestelmän kokonaisenergia, $G(x) \in \mathbb{R}^{n\,x\,m}$ on tulomatriisi, u on tulo ja y on lähtö. ∇ merkitsee gradienttia.

Tämän port-Hamiltonin esitystavan suuri hyöty on siinä, että se kuvaa suoraan järjestelmän sisäisiä kytkentöjä matriisin S avulla, ja miten energiaa vaimenee järjestelmässä matriisin R avulla. Tämän vuoksi port-Hamiltonin mallit soveltuvat

erityisen hyvin sähköisten, mekaanisten tai sähkömekaanisten järjestelmien analysointiin, koska niiden avulla voidaan hyödyntää fysikaalista ymmärrystä järjestelmien käyttäytymisen tulkitsemisessa. [13]

Tulo-tila-lähtö port-Hamiltonin järjestelmä läpivientitermillä:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [S - R]Qx + [G - P]\,u, \\ y &= [G + \mathrm{P}]^{\mathrm{T}}\mathrm{Qx} + [M + D]\,y, \end{aligned} \tag{5a}$$

missä $Q = Q^T \epsilon\, \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ on energiamatriisi, jossa Qx vastaa Hamiltonin funktion gradienttia $\nabla H(x)$, $M = -M^T \epsilon\, \mathbb{R}^{m\,x\,m}$ on rakenteellinen matriisi, $D = D^T \epsilon\, \mathbb{R}^{m\,x\,m}$ on häviöllinen matriisi ja $P\, \epsilon\, \mathbb{R}^{n\,x\,m}$.

Matriisit täyttävät positiivisemidefiniitin ehdon

$$\begin{bmatrix} R & P \\ P^T & D \end{bmatrix} \geq 0. \tag{5b}$$

Esitys $(5a)$ on samankaltainen esityksen (4) kanssa, mutta tässä otetaan huomioon tulon välitön vaikutus lähtöön. Järjestelmä on passiivinen, jos energiamatriisi Q on positiivisemidefiniitti eli

$$Q \geq 0. \tag{5c}$$

3.3 Järjestelmien kytkentä

Osajärjestelmien välisten kytkentöjen avulla voidaan rakentaa monimutkaisia ja laajamittaisia järjestelmiä yksinkertaisemmista osista [1]. Lisäksi tiettyjä kokonaisjärjestelmän ominaisuuksia voidaan tarkastella sen osien ja niiden välisen kytkennän perusteella. Port-Hamiltonin järjestelmien tehotasapaino sallii helpon kytkennän osajärjestelmien välillä.

Esimerkiksi kaksi Dirac-rakenteista port-Hamiltonin osajärjestelmää $\mathcal{D}_A\ ja\ \mathcal{D}_B$, joilla on osittain jaettuja (f, e) muuttujia voidaan kytkeä toisiinsa. Molemmilla osajärjestelmillä on sama tehon virtauksen suunta, mutta kytkennässä täytyy ottaa huomioon, että teho virtaa toisesta osajärjestelmästä sisään ja toisesta ulos. Täten virtojen täytyy olla erimerkkiset, jolloin ehto kytkennälle on

$$f_A = -f_B, \tag{6a}$$

$$e_A = e_B. \tag{6b}$$

Osajärjestelmien kytkennän hamiltonilainen on yksinkertaisesti niiden summa

$$H(x) = H_A(x) + H_B(x). \tag{6c}$$

Osajärjestelmien häviölliset osat R_A, R_B voidaan yhdistää suorana tulona. Nämä ehdot takaavat monimutkaistenkin järjestelmien rakentamisen yksinkertaisemmista osajärjestelmistä.

4 Port-Hamiltonin mallinnus dynaamiselle Γ-sijaiskytkennälle

Tässä kappaleessa esitetään dynaamisen Γ-sijaiskytkennän port-Hamiltonin mallinnus paloittain. Aluksi tarkastellaan lineaarisen Γ-sijaiskytkennän dynamiikkaa ja mallinnetaan port-Hamiltonin esitys sille. Tämän jälkeen mallinetaan dynaamisen Γ-sijaiskytkennän tikapuuverkon vastaava port-Hamiltonin esitys, jonka jälkeen esitellään järjestelmän mekaniikan malli. Lopuksi hyödynnetään port-Hamilton-lähestymistavan keskeistä ominaisuutta, eli järjestelmien kytkemistä, kun nämä kolme mallia yhdistetään yhdeksi kokonaisuudeksi.

4.1 Dynaamisen Γ-sijaiskytkennän osajärjestelmien mallit

4.1.1 Γ-sijaiskytkennän malli

Lineaarinen Γ-sijaiskytkentä on kuvan 2 mukainen. Tässä mallinnuksessa ei oteta kyllästystä tai virranahtoa huomioon, jolloin mallin dynamiikka on

$$\frac{d\psi_s}{dt} = u_s - R_s i_s - J\omega_m \psi_s, \tag{7a}$$

$$\frac{d\psi_r}{dt} = -R_r i_r, \tag{7b}$$

$$\tau_m = i_s^T J \psi_s, \tag{7c}$$

missä ψ_s on staattorikäämivuo, ψ_r on roottorikäämivuo, u_s on staattorijännite, i_s on staattorivirta, i_r on roottorivirta, R_r on roottoriresistanssi, R_s on staattoriresistanssi ja ω_m on roottorin kulmanopeus. τ_m on sähkömagneettinen vääntömomentti, jolle oletetaan suhteellisarvot, eli napaparien lukumäärää ei huomioida. Yhtälöt $(7a)$ ja $(7b)$ ovat luonnolliset valinnat tilamuuttujille. Hamiltonin funktio on muotoa

$$H = H(\psi_s, \psi_r) = \frac{1}{2L_l} \parallel \psi_r - \psi_s \parallel^2 + \frac{1}{2L_s} \parallel \psi_s \parallel^2, \tag{8a}$$

missä L_l on kokonaishajainduktanssi. Hamiltonin funktio saadaan staattorin ja roottorin käämien magneettikenttien energiasta. Osittaisderivoimalla hamiltonilaisen käämivoiden suhteen tuottaa virrat

$$\frac{dH}{d\psi_s} = \frac{\psi_s}{L_s} + \frac{\psi_s - \psi_r}{L_l} = i_s, \tag{8b}$$

$$\frac{dH}{d\psi_r} = \frac{\psi_r - \psi_s}{L_l} = i_r. \tag{8c}$$

Lopullinen tulo-tila-lähtö-port-Hamiltonin esitys lineaariselle Γ-sijaiskytkennälle on

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix}\psi_s \\ \psi_r\end{bmatrix}}_{\dot{x}} &= -\underbrace{\begin{bmatrix}R_s I & 0 \\ 0 & R_r I\end{bmatrix}}_{S(x)-R(x)}\underbrace{\begin{bmatrix}dH/d\psi_s \\ (dH/d\psi_r)^T\end{bmatrix}}_{\nabla H} + \underbrace{\begin{bmatrix}I & -J\psi_s \\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{G(x)}\underbrace{\begin{bmatrix}u_s \\ \omega_m\end{bmatrix}}_{u}, \\ \underbrace{\begin{bmatrix}i_s \\ -\tau_m\end{bmatrix}}_{y} &= \underbrace{\begin{bmatrix}I & 0 \\ -(J\psi_s)^T & 0\end{bmatrix}}_{G^T(x)}\underbrace{\begin{bmatrix}dH/d\psi_s \\ (dH/d\psi_r)^T\end{bmatrix}}_{\nabla H}, \end{aligned} \tag{9}$$

missä I on 2×2 identiteettimatriisi.

4.1.2 Tikapuuverkon malli

Roottorihäkin impedanssi on kuvan 3 mukainen. Tikapuuverkko mallinnetaan toisen asteen järjestelmänä, jolloin virranahtoa voidaan kuvata tarkasti matalilla taajuuksilla. Käyttämällä Kirchoffin 2. lakia saadaan toisen asteen lineaarisen tikapuuverkon dynamiikka

$$\frac{d\psi_{\sigma 0}}{dt} = (R_{r1} + R_{r2})i - R_{r1}i_0 - R_{r2}(i_0 + i_1), \tag{10a}$$

$$\frac{d\psi_{\sigma 1}}{dt} = R_{r2}i - R_{r2}(i_0 + i_1), \tag{10b}$$

$$u = (R_{r0} + R_{r1} + R_{r2})i - R_{r1}i_0 - R_{r2}(i_0 + i_1), \tag{10c}$$

missä impedanssin virta i on tulo ja impedanssin jännite u on lähtö. i_0, i_1 kuvaavat tikapuuverkon haaravirtoja ja $\psi_{\sigma 0}$, $\psi_{\sigma 1}$ ovat hajakäämivuot hajainduktanssien ylitse. $(10a)$ ja $(10b)$ ovat järjestelmän tilamuuttujat. Port-Hamilton on tässä tapauksessa muotoa tulo-tila-lähtö läpivientitermillä, sillä tulojännite vaikuttaa saman tien lähtövirtaan. Hamiltonin funktio on

$$H = H(\psi_{\sigma 0}, \psi_{\sigma 1}) = \frac{\| \psi_{\sigma 0} \|^2}{2L_{\sigma 0}} + \frac{\| \psi_{\sigma 1} \|^2}{2L_{\sigma 1}}. \tag{11a}$$

Osittaisderivoimalla Hamiltonin funktion käämivoiden suhteen tuottaa virrat

$$\frac{dH}{d\psi_{\sigma 0}} = \frac{\psi_{\sigma 0}}{L_{\sigma 0}} = i_0, \tag{11b}$$

$$\frac{dH}{d\psi_{\sigma 1}} = \frac{\psi_{\sigma 1}}{L_{\sigma 1}} = i_1. \tag{11c}$$

Matriisi Q on muotoa

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{\sigma 0}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{\sigma 1}} \end{bmatrix} \tag{11d}$$

Lopullinen tulo-tila-lähtö läpivientitermillä esitys toisen asteen tikapuuverkolle on

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \psi_{\sigma 0} \\ \psi_{\sigma 1} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{-\begin{bmatrix} (R_{r1} + R_{r2})\, I & R_{r2}\, I \\ R_{r2}\, I & R_{r2}\, I \end{bmatrix}}_{[S-R]} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\psi_{\sigma 0}}{L_{\sigma 0}} \\ \frac{\psi_{\sigma 1}}{L_{\sigma 1}} \end{bmatrix}}_{Qx} + \underbrace{\begin{bmatrix} (R_{r1} + R_{r2})I \\ R_{r2}I \end{bmatrix}}_{[G-P]} \underbrace{[i]}_{u}, \tag{12a}$$

$$\underbrace{[u]}_{y} = -\underbrace{[(R_{r1} + R_{r2})I \quad R_{r2}I]}_{[G+P]^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\psi_{\sigma 0}}{L_{\sigma 0}} \\ \frac{\psi_{\sigma 1}}{L_{\sigma 1}} \end{bmatrix}}_{Qx} + \underbrace{[(R_{r0} + R_{r1} + R_{r2})I]}_{[M+D]} \underbrace{[i]}_{u}, \tag{12b}$$

missä $J = G = M = 0$.

4.1.3 **Mekaniikan malli**

Newtonin toisen lain avulla saadaan pyörimisliikkeen yhtälö

$$\frac{dp_M}{dt} = J_M \frac{d\omega_m}{dt} = \tau_m - \tau_L, \tag{13}$$

missä J_M on järjestelmän kokonaishitausmomentti ja τ_L on järjestelmän kuormamomentti. Pyörimisliikkeen yhtälön mukaan sähkömagneettinen momentti kiihdyttää roottoria, ja kuormamomentti pyrkii vastustamaan sitä. Yhtälö (13) pätee vain, jos kokonaishitausmomentti J_M on vakio.

Mekaniikan mallissa on lisäksi kuorman kulmanopeus ω_L, joka on lisätty malliin porttiparien oikean esitystavan vuoksi. kulmanopeus ω_L on jäykkä kappale

$$\omega_L = \omega_m. \tag{14}$$

Mekaniikan mallin kokonaisenergia ja hamiltonilainen on

$$H(p_M) = \frac{1}{2J_M} p_M^2, \tag{15}$$

jonka osittaisderivaatta pyörimisliikkeen suhteen tuottaa kulmanopeuden.

4.2 Yhdistetty port-Hamiltonin mallinnus

Olemme esitelleet kolme osajärjestelmää dynaamisesta Γ-sijaiskytkennästä. Tässä alaluvussa siirrytään keskeiseen Port-Hamilton järjestelmäteorian aihealueeseen; järjestelmien kytkentään. Tikapuuverkon ja oikosulkumoottorin port-Hamiltonin tehotasapaino sallii helpon kytkennän toisiinsa. Osajärjestelmät voidaan kytkeä toisiinsa ehdoilla

$$u_r = -u, \tag{16a}$$

$$i_r = i. \tag{16b}$$

Samoin järjestelmien häviölliset osat voidaan helposti esittää osajärjestelmien yhdistelmänä. Mekaaninen osajärjestelmä voidaan kytkeä kytkentämatriisin S(x) avulla.

Hamiltonilainen on yhtälön $(6c)$ mukaisesti osajärjestelmien Hamiltonin funktioiden summa

$$H = H(\psi_s, \psi_r, \psi_{\sigma 0}, \psi_{\sigma 1}, p_M) = \frac{\| \psi_r - \psi_s \|^2}{2L_l} + \frac{\| \psi_s \|^2}{2L_s} + \frac{\| \psi_{\sigma 0} \|^2}{2L_{\sigma 0}} + \frac{\| \psi_{\sigma 1} \|^2}{2L_{\sigma 1}} + \frac{1}{2J_M} p_M^2. \tag{17}$$

Lopullinen lineaarisen Γ-sijaiskytkennän, toisen asteen tikapuuverkon ja mekaanisen osajärjestelmän yhdistetty mallinnus on rakenteeltaan yhtälön (4) mukainen. Mallinnuksen matriisit ja vektorit ovat

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_s \\ \psi_r \\ \psi_{\sigma 0} \\ \psi_{\sigma 1} \\ p_M \end{bmatrix}}_{\dot{x}}, \tag{18a}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -J\,\psi_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (J\psi_s)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S(x)}, \tag{18b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_s I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (R_{r0}+R_{r1}+R_{r2})I & -(R_{r1}+R_{r2})\,I & -R_{r2}\,I & 0 \\ 0 & -(R_{r1}+R_{r2})\,I & (R_{r1}+R_{r2})I & R_{r2}I & 0 \\ 0 & -R_{r2}\,I & R_{r2}I & R_{r2}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R(x)}, \tag{18c}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} dH/d\psi_s \\ (dH/d\psi_r)^T \\ (dH/d\psi_{\sigma 0})^T \\ (dH/d\psi_{\sigma 1})^T \\ dH/dp_M \end{bmatrix}}_{\nabla H}, \tag{18d}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_s \\ -\tau_L \end{bmatrix}}_{u}, \tag{18e}$$

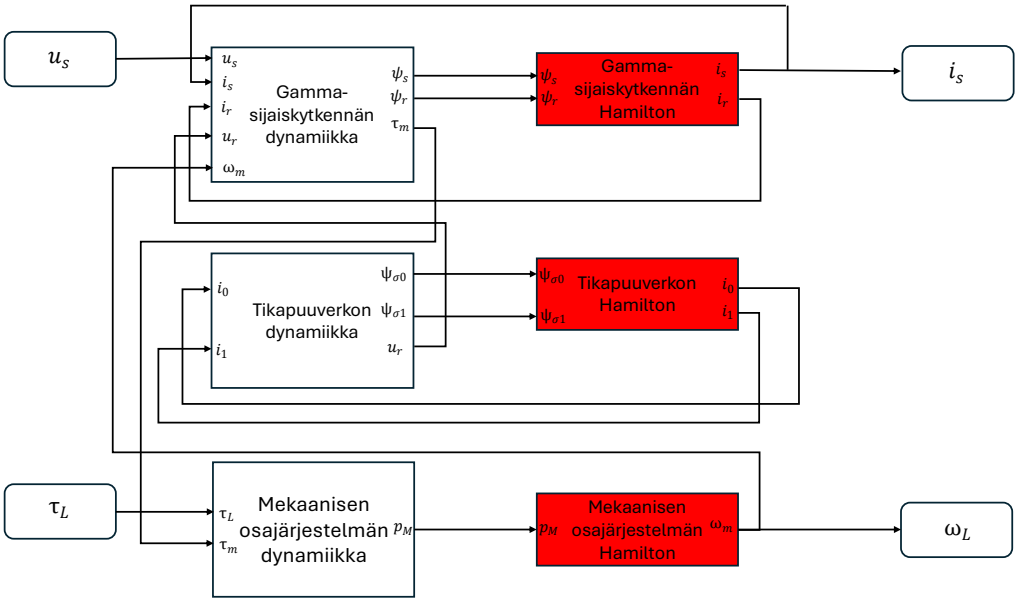
$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_s \\ \omega_L \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{G^T(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} dH/d\psi_s \\ (dH/d\psi_r)^T \\ (dH/d\psi_{\sigma 0})^T \\ (dH/d\psi_{\sigma 1})^T \\ dH/dp_M \end{bmatrix}}_{\nabla H}, \tag{18f}$$

missä $\dot{x}$ sisältää tilamuuttujat, $S(x)$ on vinosymmetrinen kytkentämatriisi, $R(x)$ on symmetrinen häviöllinen matriisi, ∇H on Hamiltonin funktion gradientti ja $G(x)$ on tulomatriisi. Mallissa on korvattu lineaarisen Γ-sijaiskytkennän yhtälö $(7b)$ yhtälöllä $(16a)$. Lisäksi ω_m on sisällytetty Hamiltonin funktioon, ja τ_m kytkentämatriisiin, jolloin luonnolliset porttiparit ovat (u_s, i_s) ja (τ_L, ω_L).

5 Simulaatio

5.1 Rakenne

Mallin simulointiin käytetään luvun 4 mukaisia dynaamisia yhtälöitä eri osajärjestelmille. Tämän lisäksi mallinnetaan yhtälöitä vastaavat Hamiltonin funktion lohkot. Rakenne on kuvan 5 mukainen. Simulaatio on suoritettu MATLAB-ohjelmointiympäristöllä ja Simulink-ohjelmalla.



Kuva 5: Port-Hamiltonin järjestelmän lohkokaavio

Kuva 5 havainnollistaa miten järjestelmän virrat saadaan energiasta Hamiltonin funktion avulla. Virrat ovat takaisinkytketty osajärjestelmien dynaamisten yhtälöiden lohkoihin. Lisäksi kuvassa tulee ilmi osajärjestelmien välinen kytkentä, kun tikapuuverkosta ja mekaanisen osajärjestelmän Hamiltonista kytketään Γ-sijaiskytkentään u_r ja ω_m vastaavasti. Lohkokaaviossa tulee ilmi osajärjestelmien erottelu toisistaan ja niiden yhdistäminen yhdeksi kokonaisuudeksi.

5.2 Parametrit

Simulointi suoritetaan 2,2 kW:n oikosulkumoottorille. Γ-sijaiskytkennän parametrit ovat taulukon 1 mukaiset.

Taulukko 1: Γ-sijaiskytkennän parametrit

Staattoriresistanssi R_s	3.7 Ω
Roottoriresistanssi R_r	2.5 Ω
Kokonaishajainduktanssi L_l	23 mH
Urasillan hajainduktanssi $L_{\sigma b}$	12 mH
Staattori-induktanssi L_s	245 mH
Kokonaishitausmomentti J_M	0.015 kgm^2

Tikapuuverkon parametrit voidaan saada roottoriresistanssin ja kokonaishajainduktanssin avulla. Roottorihäkin resistanssit ja hajainduktanssit ovat

$$R_{r0} = R_r, \tag{19a}$$

$$R_{r1} = 5R_{r0}, \tag{19b}$$

$$R_{r2} = 9R_{r1}, \tag{19c}$$

$$L_{\sigma 0} = \frac{1}{2} L_l, \tag{20a}$$

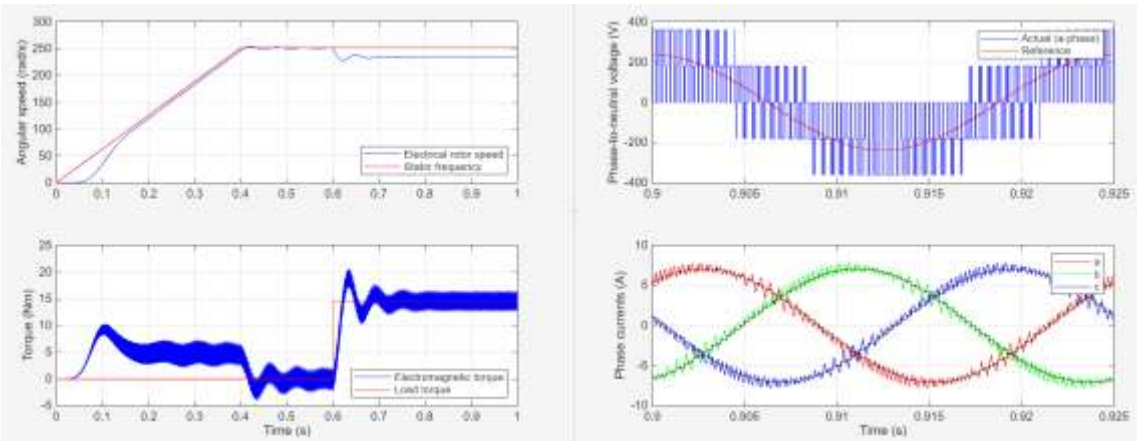
$$L_{\sigma 1} = \frac{3}{7} L_{\sigma 0}. \tag{20b}$$

5.3 Aikatason simulointi

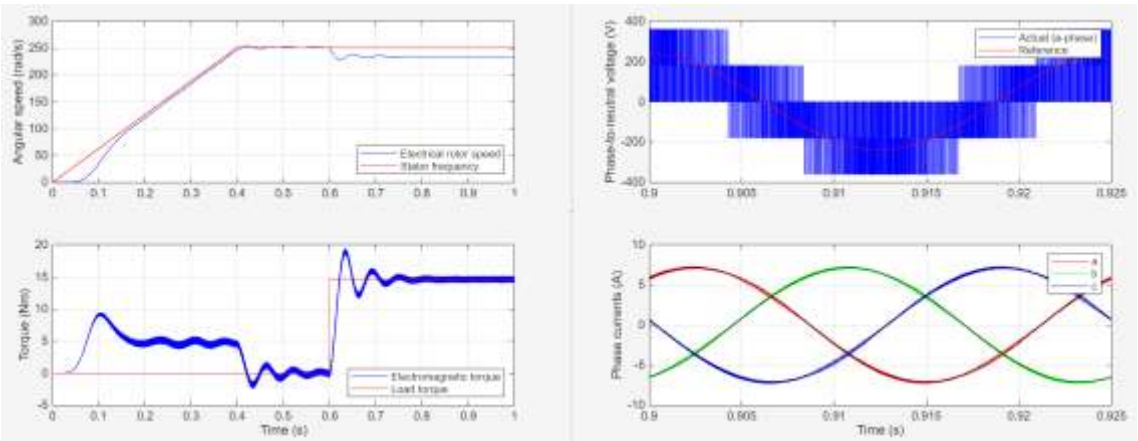
Mallin nopeuden säätötapa on syöttötaajuuden ohjaaminen taajuusmuuttajan avulla [14]. Tämä taajuusmuuttajatyyppi on pulssinleveysmodulointi (PWM), joka on yleisin taajuusmuuttajatyyppi. Toisen asteen tikapuuverkko mahdollistaa tarkan mallinnuksen 50Hz:n syöttötaajuudella [3], joka vastaa staattorin magneettivuon pyörimisnopeutta. Lisäksi taajuusmuuttajaa ohjataan skalaariohjauksella simulaation yksinkertaisuuden säilyttämisen vuoksi.

Skalaariohjaukseksi kutsutaan ohjaustapaa, jossa yksinkertaisesti ohjataan staattorijännitteen tehollisarvoa ja taajuutta eikä käytetä hyväksi moottorin dynaamista mallia [14].

Tikapuuverkko vaikuttaa pulssinleveysmoduloidun jännitteen aiheuttamaan virtarippelin suuruuteen. Pienellä kytkentätaajuudella virtarippeli on suurempi kuin suurella kytkentätaajuudella. Kuvat 6 ja 7 demonstroivat eri kytkentätaajuuksien vaikutusta virtarippeliin ja täten myös sähkömagneettiseen momentin rippeliin. Vasemmanpuoleinen kuvaaja vastaa roottorin nopeutta, staattorin taajuutta, sähkömagneettista momenttia ja kuormamomenttia. Oikeanpuoleinen kuvaaja näyttää vaihejännitteen ja vaihevirrat. Kuvista 6 ja 7 selkeästi näkyy kuinka rippeli on suurempaa 2kHz:n kytkentätaajuudella. Suurilla kytkentätaajuuksilla moottorin impedanssi on tikapuuverkon kanssa vähemmän induktiivinen ja enemmän resistiivinen. Kun taajuus kasvaa kohti ääretöntä, tikapuuverkon resistanssi lähestyy sen reaktanssia. Todellisen moottorin käyttäytyminen on samankaltaista. Dynaaminen Γ-sijaiskytkentä toimii siis suurella taajuusalueella aikatasossa tikapuuverkon takia.



Kuva 6: Aikatason simulaatio 2kHz:n kytkentätaajuudella



Kuva 7: Aikatason simulaatio 8kHz:n kytkentätaajuudella

6 Yhteenveto

Kandidaatintyön tavoitteena oli mallintaa oikosulkumoottorin dynaaminen Γ-sijaiskytkentä port-Hamiltonin järjestelmämuodossa. Lisäksi työn tavoitteena oli toteuttaa mallinnuksen simulointi, jonka avulla havainnollistettiin dynaamisen sijaiskytkennän kykyä kuvata moottorin toimintaa erityisesti suurilla taajuuksilla.

Mallinnus suoritettiin port-Hamilton-teorian periaatteiden mukaisesti hyödyntämällä dynaamisen Γ-sijaiskytkennän yhtälöitä. Menetelmässä jokainen osajärjestelmä, kuten sähköinen sijaiskytkentä, virranahtoa kuvaava tikapuuverkko sekä mekaaninen osajärjestelmä mallinnettiin ensin erikseen ja tämän jälkeen yhdistettiin yhdeksi kokonaisuudeksi port-Hamiltonin tehotasapainon säilyttämisen avulla. Tämä lähestymistapa mahdollisti järjestelmän energian varastojen, häviöiden ja virtausten erottelun selkeällä ja fysikaalisesti johdonmukaisella tavalla.

Simulointi toteutettiin MATLAB-ohjelmointiympäristöllä ja Simulink-ohjelmalla. Simulinkissa rakennetut lohkokaaviot seurasivat suoraan port-Hamilton-mallin rakennetta, mikä teki järjestelmän osien välisistä kytkennöistä havainnollisia. Simuloinnit suoritettiin skalaariohjauksella, ja tuloksista pystyttiin havaitsemaan erityisesti tikapuuverkon vaikutus korkeataajuiseen käyttäytymiseen; kytkentätaajuuden kasvaessa virtarippeli pieneni ja moottorin impedanssi muuttui vähemmän induktiiviseksi, mikä vastaa todellisen moottorin toimintaa.

Lopullinen mallinnus osoitti, että port-Hamiltonin järjestelmämuoto tarjoaa systemaattisen tavan analysoida oikosulkumoottorin toimintaa energiavirtojen näkökulmasta. Menetelmä tekee näkyväksi energian jakautumisen varastoihin ja häviöihin sekä takaa järjestelmän passiivisuuden. Passiivisuus puolestaan tarjoaa luotettavan pohjan erilaisten ohjausmenetelmien kehittämiselle [13]. Jatkokehityksessä mallia voidaan laajentaa esimerkiksi magneettisen kyllästymisen tarkemmalla huomioimisella tai yhdistämällä se edistyneisiin ohjausstrategioihin, mikä parantaisi mallin sovellettavuutta käytännön sähkökonetekniikan tutkimuksessa ja suunnittelussa.

Viitteet

[1] A. van der Schaft and D. Jeltsema. Port-Hamiltonian Systems Theory: An Introductory Overview. Foundations and Trends R in Systems and Control, vol. 1, no. 2-3, pp. 173–378, 2014.

[2] L. M. Esquivel-Sancho, R. Pereira-Arroyo and M. Muñoz-Arias, "An energy-based modeling approach to the induction machine," *2021 European Control Conference (ECC)*, Delft, Netherlands, 2021, pp. 2543-2548, doi: 10.23919/ECC54610.2021.9654842.

[3] E. Mölsa, S. E. Saarakkala, M. Hinkkanen, A. Arkkio, and M. Routimo, "A Dynamic Model for Saturated Induction Machines With Closed Rotor Slots and Deep Bars," *IEEE Transactions on Energy Conversion,* vol. 35, no. 1, pp. 157-165, 2020, doi: 10.1109/tec.2019.2950810.

[4] M. Hinkkanen, ELEC-E8402 Control of Electric Drives and Power Converters, Luentodioja, Luento 1, Aalto-yliopisto, 2025.

[5] P. C. Sen, *Principles of Electric Machines and Power Electronics*, 3rd ed., Wiley, 2013.

[6] A. Hughes and B. Drury, Electric Motors and Drives: Fundamentals, Types, and Applications, 4th ed.

[7] G. R. Slemon, "Modelling of induction machines for electric drives," in *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 25, no. 6, pp. 1126-1131, Nov.-Dec. 1989, doi: 10.1109/28.44251.

[8] S. Nadel, R. N. Elliott, M. Shepard, S. Greenberg, G. Katz, and A. d. Almeida, *Energy-efficient motor systems: A handbook on technology, programs, and policy opportunities, 2nd edition* (no. NONE; ISBN 0-918249-40-6). United States: American Council for an Energy-Efficient Economy, Washington, DC (US) (in English), 2000.

[9] G. R. Slemon, Electric Machines and Drives.

[10] J. Pyrhönen, V. Hrabovcová, and S. R Semken, "Electrical Machine Drives Control: An Introduction," 2016, doi: 10.1002/9781119260479.

[11] T. J. Courant, "Dirac manifolds," *Transactions of the American Mathematical Society,* vol. 319, no. 2, pp. 631-661, 1990, doi: 10.1090/s0002-9947-1990-0998124-1.

[12] R. Rashad, F. Califano, A. J. Van Der Schaft, and S. Stramigioli, "Twenty years of distributed port-Hamiltonian systems: a literature review," *IMA Journal of Mathematical Control and Information,* vol. 37, no. 4, pp. 1400-1422, 2020, doi: 10.1093/imamci/dnaa018.

[13] González, H., Duarte-Mermoud, M.A., Pelissier, I. *et al.* A novel induction motor control scheme using IDA-PBC. *J. Control Theory Appl.* **6**, 59–68 (2008). https://doi.org/10.1007/s11768-008-7193-9

[14] J. Luomi, A. Niemenmaa, Sähkömekaniikka ja sähkökäytöt, Luentomoniste, Aalto-yliopisto, 2020.