

Oikeisiin virheisiin!

Virheelliset vastaukset ja niiden tulkinta automaattisesti tarkastetuissa matematiikan harjoitustehtävissä

Hannu Tiitu

Oikeisiin virheisiin!

Virheelliset vastaukset ja niiden tulkinta
automaattisesti tarkastetuissa
matematiikan harjoitustehtävissä

Hannu Tiitu

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi
diplomi-insinöörin tutkintoa varten tietotekniikan
tutkinto-ohjelmassa.

Espoo, 27.11.2017

Valvoja: professori Lauri Malmi

Ohjaaja: dosentti Antti Rasila

Tekijä

Hannu Tiitu

Työn nimi

Oikeisiin virheisiin! Virheelliset vastaukset ja niiden tulkinta automaattisesti tarkastetuissa matematiikan harjoitustehtävissä

Pääaine Mediatekniikka**Koodi** IL3011**Laitos** Tietotekniikan laitos**Professori** Ohjelmistojärjestelmät**Koodi** T-106**Valvoja** professori Lauri Malmi**Ohjaaja** dosentti Antti Rasila**Työn laji** Diplomityö**Päiväys** 27.11.2017**Sivuja** 70**Kieli** suomi**Tiivistelmä**

Oppimisympäristöllä ja sen käytötavalla on kokonaisvaltainen vaikutus opiskelijan toimimiseen oppijana. Oppimisympäristö voi parhaimmillaan suunnata opiskelijan työtapoja tehokkaasti oppimista edistävään suuntaan. Opiskelijan kuva opeteltavasta aiheesta muodostuu oppimisympäristön kautta, ja tällä voi olla jopa koko elämän kestäviä vaikutuksia suhtautumiseen kyseiseen asiaan. Arvioimalla oppimisympäristöjä saadaan lisää tietoa niiden käytön vaikutuksista oppimiseen ja oppimistuloksiin. Samalla saadaan vihjeitä siitä, miten ympäristöjä voitaisiin kehittää yhä paremmiksi.

Tässä diplomityössä perehdytään matematiikan sähköisten oppimisympäristöjen käyttökelpoisuuteen opiskelijan näkökulmasta. Tämä tehdään analysoimalla opiskelijoiden tekemiä virheitä, jotka ovat syntyneet heidän suorittaessaan tehtäviä automaattisesti tarkastavassa Stack-järjestelmässä.

Työ aloitetaan katsauksella oppimiseen ja erilaisiin oppimiskäsityksiin. Tämän jälkeen esitellään matemaattisen tiedon luonne ja rakenne oppimisen kannalta. Tietokoneavusteinen matematiikan opetus Aalto-yliopistossa ja sen edeltäjässä Teknillisessä korkeakoulussa käydään läpi 1970-luvulta tähän päivään.

Hyvä käytettävyys on tärkeää missä tahansa tietoteknisessä sovelluksessa. Sähköisissä oppimateriaaleissa tämä vielä korostuu. Vaikeakäyttöinen oppimisympäristö voi pahimmillaan estää opetustapahtuman onnistumisen. Keskeinen osa matematiikan oppimisympäristöjen käytettävyyttä on matemaattisen tiedon kirjoittaminen lineaarisen syötteen muodossa. Tämä aiheuttaa myös paljon käytettävyyshaasteita.

Työn tutkimusosassa esitellään aineisto, joka koostuu Aalto-yliopistossa järjestetyn Matematiikan peruskurssi P2:n Stack-laskuharjoituksissa annetuista vastauksista. Niissä esiintyvien virheiden luokitteluksi laaditaan luokittelujärjestelmä, jonka avulla aineisto luokitellaan. Vastauksia analysoidaan myös yleisellä tasolla tutkimalla, miten hyvin opiskelijat ylipäätään saivat suoritettua tehtäviä sekä korjattua vastaamisen eri vaiheissa syntyneitä virheitä.

Luokitellusta aineistosta tehdään johtopäätöksiä niin tehtävien käyttökelpoisuudesta kuin Stackin käyttöliittymän soveltuvuudesta automaattisesti tarkastettavien harjoitustehtävien alustaksi.

Avainsanat oppimisympäristö, pedagoginen käytettävyys, virheluokittelu, automaattinen tarkastaminen, matematiikan opetus, Stack**Säilytyspaikka** Tietotekniikan talon kirjasto (Konemiehentie 2, Espoo)**urn** <http://urn.fi/URN:NBN:fi:aalto-201712188201>

Author

Hannu Tiitu

Title

Towards proper errors! The errors and their interpretation in automatically assessed exercises in mathematics

Major Media Technology**Code** IL3011**Department** Department of Computer Science**Professorship** Software Systems**Code** T-106**Supervisor** professor Lauri Malmi**Instructor** docent Antti Rasila**Level** Master's thesis**Date** 27 Nov 2017**Pages** 70**Language** Finnish**Abstract**

A learning environment may have a huge effect on how student performs as a learner. A learning environment can focus at best the student's work habits efficiently in a direction that will aid learning. The student will form an image of the area in focus through the learning environment. By assessing the use of learning environments we get more information over the effects they have on learning. At the same time we get more information over how the environment could be further developed.

In this thesis the usefulness of mathematics learning environment is investigated. This is done by examining the errors made by the students. First the background theory of learning and teaching is discussed. Then the structure and nature of mathematical knowledge is evaluated. The history of computer-assisted teaching of mathematics at Aalto University and it's predecessor Helsinki University of Technology is presented from the 1970's to date.

After this the usability in general and of learning environments is discussed. The mathematical notations and linear input within e-learning environments is presented. Finally the data, the error classification system, and the results are discussed.

This thesis evaluated students' errors in STACK exercises. The exercises were from a basic engineering mathematics course held at Aalto University for second year engineering students. First the way the students succeeded in answering the exercises was evaluated. Then a suitable error classification system was developed. Finally the data was classified with the system. From the results the usability of the STACK user interface and the exercises were assessed.

Keywords learning environment, pedagogical usability, error classification, automated assessment, teaching mathematics, STACK

Where deposited Library of Computer Science Building (Konemiehentie 2, Espoo)

urn <http://urn.fi/URN:NBN:fi:aalto-201712188201>

Niksulle

Alkulause

Tämä diplomityö on tehty Aalto-yliopiston tietotekniikan laitokselle. Työn valvoja oli professori Lauri Malmi sekä ohjaaja dosentti Antti Rasila Aallon matematiikan ja systeemianalyysin laitokselta. Suuret kiitokset heille neuvoista ja kannustavasta asenteesta tähän projektiin. Tekijä on tehnyt tämän tutkielman työskennellessään tutkimusapulaisena Matematiikan ja systeemianalyysin laitoksella Tietokoneavusteisen matematiikan opetuksen tutkimusryhmässä.

Haluan kiittää myös tietokoneavusteisen opetuksen parissa Aalto-yliopiston matematiikan ja systeemianalyysin laitoksella työskennelleitä: Pekka Alestalo, Matti Harjula, Linda Havola, Krista Linnoinen, Helle Majander, Jarmo Malinen, Kimmo Ojala ja Jarkko Savela. Eikä unohtaa sovi loppuja kahvihuoneen jengistä: Atte Aalto, Mikko Eronen, Janne Korvenpää, Erno Niemenmaa, Tri Quach, Stratos Staboulis ja Lauri Viitasaari.

Lopuksi tässäkin lopputyössä ne tärkeimmät kiitokset rakkaille kotijoukoille: Karoliina, Lauri, Minea, Niklas ja Kati.

Otaniemessä 27. marraskuuta 2017

Hannu Tiitu

Sisältö

Tiivistelmä	ii
Abstract	iii
Alkulause	v
Sisältö	vi
1. Oppimisympäristöt matematiikan opetuksessa	1
1.1 Ulos kirjojen matematiikasta	1
1.2 Motiivina tehokkuutta kustannuksissa ja oppimisessa . . .	2
1.3 Oppimisympäristö oppimisen tunteen suuntaajana	3
1.4 Oppimisympäristöjen vaikutukset opiskeluun	4
1.5 Virheet laadun mittarina	5
1.6 Yhteenveto	5
2. Oppimisen monta tulkintaa	7
2.1 Mitä oppiminen on?	7
2.2 Behaviorismin pohjana empiirinen ajattelu	8
2.3 Humanistis-kokemuksellinen oppimiskäsitys	10
2.4 Kognitiivinen oppimiskäsitys korostaa tietoa	12
2.5 Konstruktiivinen oppimiskäsitys	15
2.6 Yhteenveto	18
3. Mitä matematiikka on?	20
3.1 Matemaattisen tiedon luonne	20
3.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto	21
3.3 Skeemat matematiikan rakennuspalikoina	22
3.4 Matematiikan kieli rakentuu symboleista ja nimistä	23
3.5 Käsitteenmuodostus ja oppimisympäristöt	24

4. Tietokoneavusteinen matematiikan opetus Aallossa	26
4.1 Sähköä opetukseen	26
4.2 Tietokoneavusteinen opetus alkaa Teknillisessä korkeakou- lussa	28
4.3 Aallon matematiikan opetus verkossa	29
4.4 Verkkotehtävät Aallon matematiikan opetuksessa	30
4.5 Yhteenveto	32
5. Hyvä käytettävyys ja oppimisympäristöt	33
5.1 Käytettävyyden yleiset osatekijät	33
5.2 Matematiikka tietoteknisillä välineillä	35
5.3 Hyödyllisyys on pedagogista käytettävyyttä	35
5.4 Virheettömyys käyttökelpoisuuden mittarina	37
6. Virheet käsitteenmuodostuksen peilaajina	38
6.1 Oppiminen virheiden minimointina	38
6.2 Virheanalyysi	39
6.3 Virheanalyysin tekeminen	40
6.4 Lineaarinen syntaksi	41
7. Tutkimusasetelma	43
7.1 Aineisto	43
7.2 Tutkimuskysymykset	44
7.3 Tutkimuksen suorittaminen	44
8. Tulokset	46
8.1 Opiskelijoiden selviytyminen eri tehtävistä	46
8.2 Virheluokkien laatiminen	46
8.3 Tehtäväkohtainen yhteenveto	48
8.4 Luokittelut tehtävittäin	49
9. Diskussio	58
9.1 Tulosten arviointi	58
9.2 Aiheita jatkotutkimukselle	59
Lähteet	60

1. Oppimisympäristöt matematiikan opetuksessa

1.1 Ulos kirjojen matematiikasta

»Kieleni rajat ovat maailmani rajat.« Tämä lainaus Wittgensteinilta sopii hyvin kuvaamaan matemaattisen tiedon suhdetta erilaisiin keinoihin ja tapoihin merkitä matemaattista tietoa. Matematiikan kehittyminen on kytkeytynyt aina matemaattisen tiedon ja ajattelun esittämisen kehitykseen. Matematiikan kieli muodostuu erilaisista symboleista ja merkintätavoista, jotka vuosituhantinen kirjoittamisen perinne jatkettuna kirjapainotaidolla on muokannut tuntemiksemme. Matematiikan maailman muutokset ovat seuranneet käyttökelpoisten merkintöjen käyttöönottoa. Ei ole sattumaa, että Leonhard Euler, jolta useat yhä käytössä olevat matematiikan merkinnät ovat peräisin, oli yksi historian tuotteliaimmista matemaatikoista.

Matematiikan kehittyminen on ollut kielen ja käsitteiden kehittymisen vuoropuhelua. Samanlainen vuoropuhelu tapahtuu opiskelijan mielessä, kun matematiikan käsitteet muovautuvat työkaluiksi uuden oppimiselle.

»*Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt.*» – Wittgenstein

Tietokoneella esitetty matemaatiikka noudattelee merkinnöiltään ja ulkoasultaan kirjoihin painettua. Tietoteknisten matematiikan oppimisympäristöjen keskeisiä haasteita

on ollut matemaattisen sisällön esittäminen (esimerkiksi Bradford, Davenport & Sangwin, 2009; Bradford, Davenport & Sangwin, 2010; Sangwin & Ramsden 2007; Harjula 2008, 15). Opiskelija kohtaa hankaluuksia jouutuessaan siirtämään matemaattista ajatteluaan ympäristöön, joka ei jäsennyt perinteisen kirjan muotoon. Opiskelijan käytössä olevat uudet työkalut vaativat uudenlaisia ajatuksia siitä, miten matematiikkaa esitetään.

Edellinen vallankumous matematiikassa tapahtui Göttingenin kuuluisan yliopiston vetämänä 1800-luvun puolivälissä. Matematiikan sisällöt kehittyivät ja laajenivat, vaikka matematiikan ulkoasu ja esitystavat pysyivät melko ennallaan. Devlin (2008) ennustaa, että seuraava vallankumous ei koske niinkään matemaattista sisältöä, vaan tapoja ja välineitä sen esittämiseen. Matematiikan ulkoasu muuttuu. Samalla tulee mahdolliseksi, että matematiikaksi kutsuttu tietämys lähtee kehittymään myös sellaisiin suuntiin, joita tällä hetkellä ei edes tunneta tai mielletä matematiikan piiriin kuuluviksi.

Haasteiden ohella tietotekniikka tarjoaa edellä kaivattuja uusia mahdollisuuksia matematiikan esittämiseen. Näitä voivat olla esimerkiksi lisääntynyt interaktio ja visuaalisuus, uusien medioiden kuten äänen mukaantulo, lisätyn todellisuuden hyödyntämisen tai pelillisten ominaisuuksien liittäminen erilaisiin oppimistehtäviin (Devlin 2011, 63). Matematiikan opiskelun kannalta muutos tarkoittaa, että oppisisällöt muuttuvat ja käsitteenmuodostuksen rakentuminen tulee ajatella toisin kuin perinteisesti on totuttu. Jotta tulevaisuuden oppimisympäristöt olisivat mahdollisimman hyödyllisiä, tulee tietoteknisten välineiden tarjoamat mahdollisuudet ymmärtää ja tuoda käyttöön tavoilla, jotka edistävät oppimisen prosesseja.

1.2 Motiivina tehokkuutta kustannuksissa ja oppimisessa

Matematiikan opetukseen on tuotu viimeisen kymmenen vuoden aikana runsaasti erilaisia oppimisympäristöjä, jotka mahdollistavat etäopiskelun eri muodoissaan. Yksinkertaisimmillaan verkkoon toteutettu oppimisympäristö toimii väylänä jakaa oppimateriaaleja. Toinen verkkooppimisympäristöihin yleisesti toteutettu toiminto on erilaiset keskustelufoorumit, joita voidaan käyttää opiskelijoiden keskinäisen ja opettajan välisen vuorovaikutuksen kanavana.

Matematiikan opetuksessa oppimisympäristöjen keskeistä sisältöä ovat erilaiset harjoitustehtävät. Kun ympäristö mahdollistaa tehtävien julkaisemisen lisäksi myös niiden suorittamisen, voidaan ympäristön avulla järjestää monimuoto-opetusta. Silloin opetus jakaantuu lähiopetukseen sekä verkon kautta tapahtuvaan opetukseen.

Oppimisympäristön käytön vaikutukset eivät rajoitu vain materiaalin ja vuorovaikutuksen uudenlaisiin mahdollisuuksiin. Opiskelua voidaan tarkastella kokonaisvaltaisesti opiskelijan työnä, joka tapahtuu oppimisympä-

päristön tarjoamissa puitteissa. Tällöin oppimisympäristön ominaisuudet, helppokäyttöisyys, ympäristöön laaditut tehtävät ja erilaiset toiminnot muodostavat kokonaisuuden, jossa opiskelulle voi tarjoutua täysin uudenlaisia muotoja perinteiseen lähiopetukseen verrattuna. Oppimisympäristöllä ja sen erilaisten ominaisuuksien hyödyntämisellä voidaan ohjata opiskelijaa myös kohti oppimista edistäviä työtapoja.

Erilaisten oppimisteorioiden ja opetusmenetelmien tutkimusta voidaan perustella pragmaattisesti mahdollisimman suuren hyödyn tavoitteluna. Mitä tehokkaammin opetus on saatu järjestettyä, sitä suurempi määrä opiskelijoita saadaan opetettua paremmin oppimistuloksin.

Tätä tehokkuutta ei aina ole ollut helppoa havaita. Etenkin vaiheessa, jossa perinteisen luento-opetuksen sisältöjä siirrettiin verkkoon, ei tehokkuuden lisääntyminen toteutunut (Multisilta 1996, 13). Opetuksen valmisteluun ja verkkomateriaalin tuottamiseen kului paljon resursseja, joita ei perinteisessä opetuksessa tarvittu. Myöhemmin tekniikan kehittyessä verkossa olevien oppimisympäristöjen avulla on annettu esimerkiksi monimuoto-opetusta, joka ei perinteisin välinein olisi ollut mahdollista.

Oppimisympäristön vaikutusta opiskeluun prosessina voidaan tarkastella myös modernin informaatioyhteiskunnan näkökulmasta. Filosofi Pekka Himanen (2001, 46) määrittelee *Hakkerietiikka*-kirjassaan nykypäivän tietotyöläisen, hakkerin työetiikan perinteisen akateemisen etiikan korvaajana. Siinä työn tuottavuuden mittaaminen ulkoisilla tekijöillä, kuten työaika ja -paikka, korvautuu modernin työn tärkeimmällä tuottavuuden mittarilla, luovuudella (Himanen 2001, 38–39). Matematiikan avulla työskenneltäessä luovuudella on keskeinen asema (Pehkonen 2013, 50). Matematiikka on työkalu, jolla opiskelija hahmottaa uuden ja vanhan tiedon suhteita ja jäsenteleetietorakenteitaan. Oppimisympäristön valinnoilla on mahdollista saada luotua opiskelijalle työskentely-ympäristö, jossa hänen täysi potentiaalinsa suuntautuu tehokkaasti oppimiseen.

1.3 Oppimisympäristö oppimisen tunteen suuntaajana

Oppimisympäristö opetuksen välineenä voi olla keskeisessä asemassa siinä, millaisen käsityksen opiskelija muodostaa opetettavasta asiasta. Tietyn aineen opiskelusta saadut kokemukset esimerkiksi alakoulussa voivat leimata henkilön suhtautumista kyseiseen aiheeseen koko elinajan. Jos suhtautuminen on negatiivista, se voi olla esteenä henkilön todellis-

ten kykyjen esiintulolle. Onnistuessaan pyrkimyksissään henkilö kokee mielihyvän tunnetta. Oppimistilanteessa tämä onnistuminen voi tarkoittaa esimerkiksi uuden asian ymmärtämistä. Pelon tunne taas on tästä vastakkainen. Se on signaali siitä, että henkilö loittonee päämäärästään (Skemp 1987, 191–192). Matematiikka on aine, joka herättää opiskelijoissa voimakkaita tunteita. Edellisen valossa ei ole sattumaa, että kasvatustieteet tuntevat matematiikkapelon käsitteen (esimerkiksi Huhtala & Laine 2004, 330; Vaahtoranta 2014).

Voisiko näitä opiskelijan kokemia tunteita oppimisprosessin yhteydessä ohjata oppimisympäristön ratkaisujen avulla? Jos tietokoneella toteutettu oppimisympäristö on suunniteltu käytettävyydeltään hyväksi, se huomioi opiskelijan oppimisesta saamaa kokemusta laajemmin kuin pelkästään tiedon siirtäjänä. Opittavan aiheen konteksti, oppimisprosessissa tarvittavat luovat elementit, mielikuviutus ja rationaalinen eri vaihtoehtojen puntarointi luovat kokonaisuuden, joka tuntuu miellyttävältä oppijan tunnemaailmassa; matematiikkapelko muuttuisi matematiikkanautinnoksi.

1.4 Oppimisympäristöjen vaikutukset opiskeluun

Sähköisten oppimisympäristöjen käyttöä on arvioitu teknisistä ja pedagogisista näkökulmista. Varsinkin ympäristön käyttöönottoaiheessa ei aina ole selvää, millaisia muutoksia opetuksen ja opiskelun käytäntöihin ja vaikutuksiin on tulossa. Hyvänä lähtövoitteena voitaneen pitää, että uusi oppimisympäristö ei ainakaan heikennä oppimistuloksia tai aiheuta kohtuutonta lisätyötä opiskelijoille tai opettajalle perinteiseen opetukseen verrattuna.

Nieminen (2008, 118) on tutkinut väitöskirjassaan Ilmavoimien kadeteille suunnatun matematiikan oppimisympäristön käyttöönottoa ja vaikutuksia oppimistuloksiin. Hänen ja muiden (esimerkiksi Rasila, Harjula & Zenger 2007, 75) vastaavien tutkimusten mukaan verkko-oppimisympäristöllä voidaan saavuttaa ainakin samoja oppimistuloksia kuin perinteisellä opetuksella. Näiden tulosten perusteella opetuksen kehittäminen sähköisten oppimisympäristöjen kautta tuntuu järkevältä tutkimuksen kohteelta.

Oppimistulosten lisäksi oppimisympäristön käyttöönotolla pyritään yleisesti myös opiskelijoiden motivoimiseen. Uudenlainen tapa suorittaa opintoja itsenäisesti ja ilman rajoitteita ajasta ja paikasta saattaa olla opiskelijoista innostavaa. Opetushenkilökunnan kannalta opiskelun siirtyminen verkkoon voi merkitä työmäärän vähenemistä ainakin pitkällä tähtäimel-

lä. (Malmi, Karavirta, Korhonen & Nikander 2005; Majander & Rasila 2011, 211–212)

Nykyisten yleisessä käytössä olevien oppimisympäristöjen laatu on vähintäänkin siedettävällä tasolla tekniikan ja yleisen käytettävyyden suhteen. Tästä huolimatta sähköisen oppimisympäristön käyttöönottoon liittyy aina aloitusvaihe, jolloin käytänteet ja tekniikka hakevat muotoaan. Käytön vakiintuessa ja edelleen kehittyessä voidaan huomiota kiinnittää erilaisiin hyötyihin ja mahdollisuuksiin normaaliopetukseen verrattuna.

1.5 Virheet laadun mittarina

Kuten tässä luvussa on esitetty, sähköisten oppimisympäristöjen käyttöönotto on monella tavoin perusteltua. Opetuksen järjestäminen sähköisesti on hyödyllistä niin opetuksen tarjoajan kuin opiskelijan kannalta. Tässä diplomityössä keskitytään kuitenkin opiskelijaan ja siihen, millaisin edellytyksin matematiikan sähköinen oppimisympäristö on käyttökelpoinen hänen kannaltaan.

Käyttökelpoisuutta tarkastellaan erityisesti tehtävissä tehtyjen virheiden kannalta. Sähköisen matematiikan oppimisympäristön käytössä keskeistä on matematiikan ilmaiseminen oppimisympäristön käyttöliittymässä järjestelmän ymmärtämällä tavalla. Monipuoliset matemaattiset merkinnät on suunniteltu kynällä ja paperilla käytettäväksi, eikä niiden siirtäminen tietokoneen näppäimistön tai muun päätelaitteen kautta kommunikoidaviksi ole yksinkertaista. Niinpä mielenkiintoiseksi seikaksi muodostuu, millaisia virheitä opiskelija tekee ratkaistessaan matematiikan tehtäviä sähköisessä oppimisympäristössä, ja eroavatko nämä virheet perinteisessä opiskelussa syntyneistä. Keskeistä on myös tunnistaa, ohjaako sähköinen oppimisympäristö tietynlaisiin virheisiin, jotka mahdollisesti eroavat perinteisin menetelmin syntyvistä.

1.6 Yhteenveto

Oppimisympäristöllä ja sen erilaisilla käyttötavoilla on kokonaisvaltainen vaikutus opiskelijan toimimiseen oppijana. Oppimisympäristö voi parhaimmillaan suunnata opiskelijan työtapoja tehokkaasti oppimista edistävään suuntaan. Opiskelijalle muodostuva kuva opeteltavasta aiheesta muodostuu oppimisympäristön kautta, ja tällä voi olla jopa koko elämän kestäviä

vaikutuksia suhtautumiseen kyseiseen asiaan.

Arvioimalla oppimisympäristöjen käyttöä saadaan lisää tietoa siitä, millaisia vaikutuksia ympäristöjen käytöllä on oppimiseen ja oppimistuloksiin. Samalla saadaan tietoa siitä, miten ympäristöä voitaisiin kehittää, jotta se soveltuisi paremmin käyttötarkoitukseensa.

Verkossa olevien oppimisympäristöjen käyttöä voidaan perustella sillä, että niiden avulla on mahdollista saavuttaa ainakin samoja tuloksia kuin perinteisin opetusmenetelmin. Vaikka tietoteknisen oppimisympäristön käyttöönotto vaatii usein suuriakin alkupanostuksia, on järjestelmien käytön perusmotivaatioita kustannusten säästäminen. Oppimisympäristöillä voidaan vaikuttaa paljon myös opiskelijoiden motivaation tuntemuksiin.

Tässä diplomityössä perehdytään matematiikan oppimisympäristöjen käyttökelpoisuuteen opiskelijan kannalta. Tätä voidaan tarkastella ympäristön avulla tehdyissä harjoituksissa syntyneistä virheistä. Työ aloitetaan katsauksella oppimiseen ja erilaisiin oppimiskäsityksiin. Tämän jälkeen esitellään matemaattisen tiedon luonne ja rakennetta oppimisen kannalta. Tietokoneavusteinen matematiikan opetus Aalto-yliopistossa ja sen edeltäjässä Teknillisessä korkeakoulussa käydään läpi 1970-luvulta tähän päivään. Tämän jälkeen käydään läpi hyvä käytettävyys yleisesti sekä oppimisympäristöissä. Matematiikan esittäminen sähköisissä oppimisympäristöissä erityisesti lineaarisen syötteen muodossa esitellään ennen tutkimusasetelman läpikäyntiä. Lopuksi esitellään aineisto, siihen tehdyt virheluokittelut sekä tuloksista tehdyt johtopäätökset ja niiden analysointi.

2. Oppimisen monta tulkintaa

2.1 Mitä oppiminen on?

Ennen sukeltamista oppimisympäristöjen kehittämiseen ja niiden ominaisuuksien arvioimiseen on syytä pysähtyä hetkeksi miettimään, mitä oppiminen on ja miten se tapahtuu. Tuntuisi kohtuulliselta, että tämä pystyttäisiin määrittelemään tarkasti, jotta opetuksen avuksi voitaisiin suunnitella käyttökelpoisia tietojärjestelmiä.

Pedagogian ja oppimispsykologian kirjallisuutta luettaessa selviää kuitenkin nopeasti, että kysymys on vaikea. Yhtä määritelmää tai selitystä oppimiselle ei ole voitu antaa, vaikka asiaa on luonnollisesti tutkittu paljon. Esimerkiksi Säljö (1979, 19) kysyi 90 ruotsalaiselta aikuisikäiseltä opiskelijalta heidän käsityksiään oppimisesta, ja sai vastauksiksi, että oppiminen on

1. tiedon lisäämistä,
2. muistiin painamista ja uudelleen muistamista,
3. soveltamista,
4. ymmärtämistä ja
5. ajattelun muuttamista eli asian uudella tavalla näkemistä.

Van Rossum ja Taylor (1987, 19) selvittivät omassa tutkimuksessaan 69 hollantilaisen psykologian opiskelijan suhtautumista oppimiseen. Heidän saamansa vastaukset noudattelivat pääosin Säljön luokittelua. Osan vastauksista he joutuivat kuitenkin luokittelemaan uuteen luokkaan, joka voidaan laajasti ottaen suomentaa

6. muuttuminen ihmisenä.

Näistä luokitteluista nähdään, että ihmiset kokevat oppimisen hyvin erilaisilla tavoilla. Oppiminen on yhdistelmä erilaisia ihmisen kognitiivisia ja kokemusperäisiä prosesseja sekä tiedon käsittelyä, joten sen selittäminen yhdellä tyhjentävällä määritelmällä ei onnistu. Yllä olevat oppimisen luonnehdinnat osoittautuvat kuitenkin käyttökelpoisiksi, ja luokitteluun palataan myöhemmin luvussa 3, kun tarkastellaan matemaattisen tiedon luonnetta. Sitä ennen kuitenkin luodaan katsaus oppimisen käyttäytymistieteellisiin malleihin.

2.2 Behaviorismin pohjana empirinen ajattelu

Opetuksen ja oppimisen tarkastelu perustetaan usein erilaisille oppimiskäsityksille. Niiden avulla selitetään oppimisen tapahtuminen perustuen epistemologisiin eli tietoteoreettisiin perusoletuksiin sekä pedagogisiin näkemyksiin (Tynjälä 2002, 28). Oppimiskäsitys antaa mallin, joka määrittelee ihmisen käytöksen ja toiminnan oppimistilanteessa. Kun tiedostettu ja tiedostamaton toiminta on mallin mukaista, on seurauksena oppimista. Opetus on siis oppimista tuottavien puitteiden luomista. Kun opiskelija tuodaan tilanteeseen, hän ryhtyy toimimaan tilanteen ohjaamana, ja oppimista tapahtuu.

Oppimiskäsityksistä perinteisimpänä pidetään *behaviorismia*, jonka perusajatukset esitettiin John B. Watsonin kirjoituksessa *Psychology as a Behaviorist Views It* vuonna 1913. Watson puolsi voimakkaasti eläinkokeita käyttäytymisen tutkimisessa, ja hän sai työlleen innoitusta Ivan Pavlovin koirilla tekemistä ehdollistumiskokeista. Niissä osoitettiin toimintaan liitetyn ärsykkeen ja refleksinomaisen reaktion yhteys, jota kutsuttiin klassiseksi ehdollistumiseksi. (Kauppila 2007, 17–18)

Behaviorismi hylkää ihmisen oman introspektion eli itsetutkiskelun kautta saadun tiedon. Se esittää, että psykologisen ihmistutkimuksen tulee perustua tieteellisesti kestävään tutkimukseen, jossa todelliseksi havainnoksi lasketaan vain luonnontieteiden menetelmin mitattavat asiat. Ilmiöiden tulee olla yksiselitteisesti havaittavissa, dokumentoitavissa ja tilastoitavissa. Keskeiseen asemaan nostetaan käyttäytyminen eli reaktio, joka on seurausta ulkoisesti havaittavasta tapahtumasta, ärsykkeestä. (Kauppila 2007, 17)

Behaviorismiin kehittyi 1940-luvulla *uusbehaviorismin* kausi, jolloin ehdollistumisen pohjalle pyrittiin rakentamaan matemaattinen ja yleisen

käyttäytymisen teoria. Tässä yhteydessä tutkittiin myös oppimisen sovelluksia, joiden yhteydessä nousi esiin instrumentaalisen ehdollistumisen käsite. Tehtiin havainto, että opiskelija toistaa reaktioita, joista hän saa myönteistä palautetta, ja käänteisesti välttää toimintoja, joista tulee kielteistä palautetta. (Kauppila 2007, 18)

Behavioristisessa opetuksessa opettajalla on merkittävä rooli tiedonjakajana. Hän annostelee tiedon sopivan kokoisina palasina. Opiskelijan osana on olla passiivinen tiedon vastaanottaja, johon opettajan tieto siirtyy. Opiskelijaa pidetään *tabula rasana*, tyhjänä tauluna, joka täytetään tiedolla ulkopuolisten prosessien seurauksena.

Behaviorismia kohtaan esitetty kritiikki

Koska behavioristisen oppimisprosessin päämäärä on tuottaa suoritus, joka voidaan mitata arvioinnissa, ohjaa se luonnollisesti opiskelijan toimintaa kohti tällaisen suorituksen tekemistä. Tästä on vaarana, että opiskelija motivoituu vain suoritteiden tekemiseen palkkioiden toivossa, eikä opettavan asian syvälliseen ymmärtämiseen. Kun arviointi kohdistuu vain konkreettisiin seikkoihin, tulee suoritteiden määrästä hallitseva tekijä laadun sijaan. (Kauppila 2007, 22)

Behaviorismissa älyllinen vastuu on lähes kokonaan opettajalla. Myös vastuu oppimisesta on opettajalla, ei opiskelijalla. Opiskelija ei havaitse tiedon tai taidon kriteerejä, vaan ne ovat hänen ulottumattomissaan opettajan hallussa. Behaviorismi ei ota huomioon käsitteellistä oppimista ja monitahoista ajattelua. Jos oppiminen tapahtuisi kokonaan behavioristisen oppimiskäsityksen mukaisesti, olisi uuden tiedon syntyminen mahdotonta.

Behaviorismin puutteet oppimisen selittäjänä ovat ilmeisiä. Sen havainnot oppimisesta ovat kuitenkin perusluonteisia. Behaviorismissa on oivallettu ihmisen käyttäytymisen lainalaisuuksia ja oppimisen peruspiirteitä. Edelleenkin opetuksessa todetaan behavioristisia ideoita tarpeellisiksi, ja ne ovatkin jokapäiväisessä käytössä. Behaviorismin pohjalta on kehitetty monia yhteiskunnan kannalta toimivia järjestelmiä. (Kauppila 2007, 25)

Behaviorismi, matematiikka ja oppimisympäristöt

Jokaisella matematiikkaa koulussa opiskelleella on varmasti kokemuksia behavioristisesta opetuksesta. Jo teoriana behaviorismi rakentuu samaan tyyliin kuin matematiikka, pienistä erillisistä osista, joita yhdistämällä

päästään laajempiin kokonaisuuksiin. Matematiikka on helppo pilkkoa osiin, joita käydään läpi yksi kerrallaan opettajan kontrolloidessa läpikäynnin etenemistä. Voidaan sanoa, että jo nykyiset matematiikan opetus suunnitelmat opeteltavien asioiden listoineen on laadittu behavioristisessa hengessä (esimerkiksi OPH 2003). Tällainen opetus on helppo suunnitella ja aikatauluttaa. Arviointia varten matematiikassa on helppo laatia tehtäviä, joissa osaaminen voidaan testata. Matematiikan eksakti luonne sopii hyvin vahvistavan palautteen antamisen lähtökohdaksi.

Tynjälä (2002, 30) määrittelee behavioristisen opetuksen ulkoa säädellyksi käyttäytymisen muokkaamiseksi, ulkoa säädeltyjen ärsyke–reaktiokytkentöjen luomiseksi. Behavioristinen opetus järjestyy seuraavien vaiheiden mukaisesti.

1. Asetetaan käyttäytymistavoitteet.
2. Jaetaan oppimateriaali osakomponentteihin.
3. Määritetään sopivat käyttäytymisen vahvistajat.
4. Toteutetaan opetus edeten vaihe vaiheelta.
5. Arvioidaan tulokset.

Pisimmälle behavioristisen oppimiskäsityksen mukainen opetus vietiin 1970-luvulla *ohjelmoidussa opetuksessa*. Siinä asiakokonaisuudet pilkottiin hyvin pieniin osiin, esimerkiksi lyhyiksi kappaleiksi, joihin liittyi opiskelijalle esitetty kysymys (ärsyke). Opiskelijan vastaus (reaktio) sai välittömän palautteen, joko positiivisen tai negatiivisen (vahvistaminen). Positiivisen palautteen saatuaan opiskelijan tuli jatkaa seuraavaan aiheeseen, kun taas negatiivinen palaute ohjasi kertaamaan asioita (Tynjälä 2002, 30–31). Ensimmäiset tietokoneella toteutetut oppimisympäristöt noudattivat juuri tätä paradigmaa, ja se on havaittavissa täydellisenä tai osittaisena monissa nykyisinkin käytössä olevissa oppimissovelluksissa.

2.3 Humanistis-kokemuksellinen oppimiskäsitys

Behaviorismin kritiikki osuneo oikeaan siinä, että oppimista ei voida selittää ottamatta huomioon opiskelijaa. Tuntuu oudolta, jos opiskelijassa tapahtuvaa muutosta, oppimista, voitaisiin käsitellä jotenkin hänen itsensä ulkopuolisena asiana.

Kun halutaan korostaa ihmisen omaa vastuullisuutta, ollaan humanismin keskeisten teemojen äärellä (Kauppila 2007, 27). Humanismin idea

uskoo ihmisen kehitykseen, kasvuun ja luovuuteen. Laajasti tunnetun Maslowin (1943, 372–385) tarvehierarkian huipulla on itsensä toteuttamisen tarve tai motiivi (Kauppila 2007, 30). Tästä lähtökohdasta oppimisen intention suunta on täysin päinvastainen kuin behaviorismissa.

Humanistisen oppimiskäsityksen keskeinen oppimismalli on kokemuksellinen oppiminen (Kauppila 2007, 30). Usein puhutaankin *humanistis-kokemuksellisesta* oppimiskäsityksestä. Siinä opettajan rooli käsitetään enemmän ohjaavana. Hänen tehtävänsä on helpottaa ja tukea opiskelijan kasvua ja itseohjautuvuutta. Oppimisen katsotaan perustuvan opiskelijan kokemuksiin ja itsereflektioon (Rauste-von Wright 1997, 17). Opetustoiminnan tavoitteena on opiskelijan näkökulmasta itsensä toteuttaminen ja *minän* kasvu. Ryhmissä tapahtuvaa opiskelua korostetaan. Niissä jaetaan opiskelusta saatuja kokemuksia, jolloin kunkin oppilaan henkilökohtainen tieto ja käsitykset kehittyvät.

Humanistis-kokemuksellisen oppimiskäsityksen tunnettuja tutkijoita on David Kolb. Hänen hahmottelemassaan kokemuksellisen oppimisen mallissa on neljä tasoa (Kolb 1984, 42).

1. Omakohtainen kokemus
2. Reflektiivinen havainnointi
3. Abstrakti käsitteellistäminen
4. Aktiivinen kokeilu

Kolbin mukaan kokemuksellinen oppiminen tapahtuu syklisesti, jolloin opiskelijan tieto ja ymmärrys syvenee, kun hän etenee tasolta toiselle palaten välillä alkuun. Tämä tiedon rakentumisen malli sopii hyvin käsitteeseen matemaattisen tiedon luonteesta ja oppimisesta, jota käsitellään seuraavassa luvussa.

Oppimisympäristö kokemustenvaihdon mahdollistajana

Erilaiset kommunikointityökalut ja -mahdollisuudet ovat useimpien nykyisten tietoteknisten oppimisympäristöjen perustyökaluja. Humanistis-kokemuksellisen oppimisen perusedellytys, kokemusten jakaminen, onnistuu siis helposti monilla oppimisympäristöillä. Myös opettajan ohjaava rooli on mahdollista toteuttaa samaan tyyliin kuin oppilaiden välinen keskustelu. Oppimisympäristöjen lisäksi tähän voidaan käyttää erilaisia sosiaalisen median työkaluja ja sovelluksia.

Opiskelijan oma oppimistyyli on ratkaiseva, kun mietitään verkon välinein toteutetun humanistis-kokemuksellisen opetuksen toimivuutta käytännössä. Vahvan kirjoittavan ilmaisun omaavat opiskelijat saattavat hyötyä kokemusten aukikirjoittamisesta, mikäli oppimisympäristö tukee kirjoittavaa ilmaisua. Samoin hyötyvät kuvallisessa ilmaisussa lahjakkaat opiskelijat, jos vuorovaikutus on järjestetty kuvakerronnan tai videoiden avulla.

Kokemusten jakaminen sopii hyvin aktiivisten oppijoiden oppimistyyliin, sillä heille oppiminen tapahtuu parhaiten silloin, kun he saavat keskustella ja soveltaa tietoa. Aktiivisen oppijan vastakohtana pidetään reflektiivistä oppijaa, jonka oppimista edistävät yksin työskentely ja mahdollisuus miettiä käsiteltävää asiaa syvällisesti (Havola 2011, 120). Humanistis-kokemuksellisen opetuksen mallin voidaan ajatella sopivan paremmin aktiivisten oppijoiden oppimistyyliin.

Humanistis-kokemuksellisen oppimisen tulisi tapahtua vapauden ilmapiirissä ja elävässä vuorovaikutuksessa (Kauppila 2007, 29). Tämä asettaa suuria vaatimuksia käytetyille oppimisympäristölle käytettävyyden näkökulmasta. Huonon käytettävyyden vaikutusten voi helposti uskoa estävän tällaista vuorovaikutusta. Tämä tavoite ei kuitenkaan ole poissuljettu vaihtoehto, vaan verkossa toimiva oppimisympäristö hyvin toteutettuna saattaa mahdollistaa opiskelijalle suurenkin vapauden esimerkiksi paikkaan tai ajankohtaan sidotusta opiskelusta. Opiskelijan tulee tuntea oppimisympäristön avulla tapahtuva työskentely luonnolliseksi.

2.4 Kognitiivinen oppimiskäsitys korostaa tietoa

Kognitiivisessa oppimiskäsityksessä oppimista lähestytään tiedon prosessoinnin näkökulmasta. Opiskelijan katsotaan olevan itsenäinen toimija, joka asettaa itselleen oppimisen tavoitteet ja ohjautuu itsenäisesti niiden saavuttamiseksi. Oppimisen tai opiskelun tyyliin ei oteta kantaa vaan hyväksytään, että nämä ovat eri ihmisillä erilaisia.

Oppimiskäsityksen mukaan tieto muodostuu, kun opiskelija valikoi, tulkitsee, havainnoi ja konstruoi tietoa käyttämistään oppimateriaaleista. Opiskelijan motivaatio ja aikaisemmat tiedot ovat keskeisessä asemassa, kun opiskelija käsittelee uutta tietoa ja sen suhdetta aikaisempaan tie-

toonsa. Tähän liittyy tärkeä *skeeman*¹ käsite. Se on eräänlainen sisäinen malli tai tietorakenne informaatiosta ja asioista, miten ne ovat tai miten ne toimivat ja etenevät. Piaget liitti skeemaan *assimilaation* ja *akkomodaation*. Edellinen tarkoittaa sulautumisprosessia, jossa uusi informaatio, havainto tai kokemus liitetään olemassaolevaan skeemaan eli opiskelijan aikaisempaan tietoon. Jälkimmäinen on uuden tietorakenteen muodostuminen tilanteessa, jossa uusi informaatio ei sovellu aikaisempaan skeemaan (Kauppila 2007, 41). Skemp (1987, 29) määrittelee jonkin asian *ymmärtämisen* tarkoittavan, että asia assimiloituu oikeaan skeemaan.

Esimerkiksi skeemasta voidaan ottaa Tynjälän (2002, 42) asiointi uudessa tavaratalossa. Tavaratalo ymmärretään kahdella tasolla (Skemp 1987, 22). Sitä ei nähdä pelkästään *kyseisenä* tavarataloa, vaan liikkeenä, joka kuuluu tavaratalojen luokkaan. Aikaisemman kokemuksen perusteella siellä osataan kuitenkin asioida oikein: mennä kauppaan, valita ostokset hyllyistä, siirtyä kassalle ja maksaa. Ostosten teko sujuu jouhevasti, vaikka kyseessä olisi ensimmäinen vierailu juuri kyseisessä liikkeessä. Tilanteessa tapahtui assimilaatio, eli uuteen tavarataloon liittyvä informaatio, esimerkiksi tavaroiden järjestys hyllyissä, sulautuu aikaisemman kokemuksen muodostamaan tavaratalo-skeemaan.

Jos taas kyseessä olisi ollut neuvostoliittolainen магазин, ei asiointi olisi sujunut kuvatulla tavalla. Sen sijaan, että ostaminen olisi aloitettu keräämällä tavarat itse, olisi alussa pitänyt kertoa myyjälle, mitä halutaan ostaa, ja suorittaa maksu. Seuraavaksi oltaisiin siirrytty toiselle myyjälle, joka antaa tavarat kuittia vastaan. Tämä kaupassakäynti tuottaisi akkomodaation, koska koettu toiminta ei soviikaan aikaisempaan tavaratalo-skeemaan. Syntyy ehkä uusi neuvostoliittolainen tavaratalo-skeema, ja vanha tavaratalo-skeema muuttuu siten, että asiointi ei tapahdukaan välttämättä aina samalla tavalla.

Mielekästä oppimista syntyy uuden tiedon törmäämisestä ja sulautumisesta opiskelijan toimintaan ja aikaisempaan tietoon. Mitä heikommaksi tällainen yhteys jää, sitä vähemmän opittavalla tiedolla on mieltä opiskelijan kannalta ja sitä helpommin se unohtuu. Skeemojen muotoutuminen ilmentää opiskelijan tietoisia tai tiedostamattomia käsityksiä siitä, mikä on tärkeää ja mikä ei. (Engeström 1982, 19)

¹Skeema on peräisin neurologi Henry Headiltä (*Studies in neurology*, 1920), ja sitä jalostivat edelleen Frederic Bartlett muistitutkimuksissaan (*Remembering. A study in experimental and social psychology*, 1932) ja Jean Piaget (*The child's conception of the world*, 1929).

Heikkolaatuinen, pinnallinen tieto ilmenee yksinkertaisina assosiaatioina ja mieleenpalauttamisena, ilmiöiden nimeämisenä, kuvailemisena, vertailuna ja luokitteluna. Korkealaatuinen tieto ilmenee kokonaisuuk-sien hahmottamisena, analyysinä eli kokonaisuuden sisäisten suhteiden ja oleellisten tekijöiden erottamisena, mallien muodostamisena, soveltami-sena ja uusien oivallusten tuottamisena. (Engeström 1982, 20)

Kognitiivisen oppimisen tutkimuksessa ollaan kiinnostuneita prosesseis-ta, joiden kautta opiskelijoiden skeemat muuttuvat ajan, opetuksen ja oppimisen tuloksena (Tynjälä 2002, 43).

Oppimisympäristön rooli kognitiivisessa oppimisessa

Jotta oppimisympäristö mahdollistaa oppimisen kognitiivisen oppimiskäsi-tyksen mukaan, tulee sen tukea monenlaisia oppimistyyplejä. Käytännössä tämä voi tarkoittaa esimerkiksi opiskelijalle annettua vapautta valita me-dia, jolla opiskelua suoritetaan. Oppimateriaalien tulee olla sellaisia, että ne herättävät opiskelijan motivaation ja suuntaavat hänen kiinnostustaan kohti opiskeltavaa asiaa.

Olenmaisessa asemassa on skeemojen muokkautuminen ja muodostumi-nen. Oppimisympäristön käytön tulee luoda opiskelijalle sellaisia koke-muksia, jotka tuottavat oppimista edistäviä assimilaatioita ja akkomodaa-tioita. Skeemojen tulee kehittyä oikeaan suuntaan, sillä väärin rakentunut skeema on myöhemmän oppimisen kannalta haitallinen, eikä korjaudu helposti. Huhtala ja Laine (2004, 326–327) kutsuvat väärin rakentuneita konsepteja ja skeemoja *miniteorioiksi*, jotka syntyvät nimenomaan opetuksen tuloksena. Opiskelija voi esimerkiksi tehdä väärä tulkintoja yleistämällä liikaa erikoistapauksista tekemiään havaintoja. Jos opetus antaa tämän tapahtua, opiskelijan skeema ei enää vastaa todellisuutta.

Oppimisympäristön yleinen käytettävyyys voi nousta merkittävään rooliin, kun opiskelija tekee akkomodaation. Prosessi saattaa olla epämieluisa kokemus, jota oppimisympäristön tulisi kaikin tavoin lieventää (Skemp 1987, 28). Esimerkiksi erilaisten virhetilanteiden käsittely ja näyttäminen opiskelijalle voi tällöin olla avainasemassa.

Opittavan asian mekaaninen kertaus ei ole tehokkain tapa tallentaa asioita pitkäkestoisen muistiin. Mielekäästä oppimista syntyy, jos oppimis-ympäristö tukee tiedon erilaisten soveltamismahdollisuuksien tai tiedon henkilökohtaisten merkitysten pohdiskelua. Informaatiota voidaan osittaa sopiviin yksiköihin, joita käydään läpi eri tavoilla kerraten. Oppimisymp-

päristössä esitetty materiaali tulee siis rytmittää siten, että se linkittää tietoa jo aikaisemmin esillä olleisiin näkökulmiin kyseiseen asiaan. Parhaaseen tulokseen päästään, jos opittava aines on esitetty usealla eri tavalla erilaisissa yhteyksissä, esimerkiksi kirjallisin ja kuvallisin keinoin. Mieleenpainamista auttaa myös erilaisten muistiapuneuvojen käyttäminen ja mielikuvien liittäminen verbaaliseen materiaaliin. (Tynjälä 2002, 33)

Kognitiivisen oppimisen mukaisen oppimisympäristön monipuolisuus voi helposti johtaa vaikeaselkoiseen käyttöliittymään. Myös tällöin hyvä käytettävyyys on tärkeässä asemassa. Opiskelijan kognitiivinen kuorma ei saisi kasvaa oppimisympäristön käytöstä, vaan mahdollisimman paljon hänen kapasiteetistaan tulisi suuntautua opetettavaan asiaan.

2.5 Konstruktiivinen oppimiskäsitys

Konstruktivismi on tiedon olemusta käsittelevä paradigma, joka ei ole mitenkään yhtenäinen teoria. Moni tietoon liittyvä teoria voidaan lukea konstruktivismin piiriin. Yhteistä näille kaikille teorioille on, että tiedon ei katsota koskaan olevan tietäjästään riippumatonta, vaan aina yksilön tai yhteisön itsensä rakentamaa. Konstruktivismi ei hyväksy empiiristä epistemologiaa, jonka mukaan objektiivista tietoa saadaan yksilön havaintojen ja kokemusten kautta. (Tynjälä 2002, 37)

Konstruktiivinen oppimiskäsitys on konstruktivismin ilmenemismuoto pedagogiikan alueella. Konstruktiivinen oppimiskäsitys on hyvin saman luonteinen kuin edellä esitellyt humanistis-kokemuksellinen ja kognitiivinen oppimiskäsitys. Konstruktivismi eroaa humanistis-kokemuksellisesta oppimiskäsityksestä siten, että konstruktivististen näkemysten mukaan opiskelijan aktiivisuudella ei ole pedagogista itsetarkoitusta. Konstruktivismissa on tärkeää määritellä toiminnan tavoitteet, ja suunnitella miten toiminta soveltuu osaksi opetuksen ja oppimisen kokonaisprosessia. Opiskelun järjestelyissä on olennaista, että opettajan luomassa oppimisympäristössä nousee esille tarkoituksenmukaisia kysymyksiä, joihin haetaan vastauksia opettajan ohjauksessa opiskelijan oman kokeilun, ymmärtämisen ja ajattelun varassa. (Rauste-von Wright 1997, 20)

Edellä mainitut kysymykset heräävät, kun oppimateriaali on kontekstuaalista, eli opiskelija pystyy liittämään sen jollain tavalla aikaisempaan kokemusmaailmaansa. Kun opiskelija kokee tiedon näin mielekkääksi, hän voi motivoitua ja hänen mielenkiintonsa suuntautuu opittavaan asiaan.

Konstrukttiivisen oppimiskäsityksen keskeisimpänä ajatuksena onkin tiedon rakentelu aikaisempien tietojen ja kokemusten pohjalta. Opiskelija on aktiivinen toimija, joka tiedon passiivisen vastaanottamisen sijaan kehittää uutta tietoa. Konstrukttiivinen oppimiskäsitys nähdään usein behaviorismin vastakohtana, koska sen mukaan opiskelija *ei* ole tyhjä astia, jota täytettäisiin tiedolla, vaan aktiivisesti merkityksiä etsivä ja niitä rakentava toimija.

»Sopiiko opettaminen konstruktivismiin?»

– Haapasalo

Erityisesti konstruktivismissa, mutta myös muissa opiskelijälähtöisissä oppimiskäsityksissä, tulee opettajan rooli uudelleenlaiseen tarkasteluun. Haapasalon (2001, 105) tapaan voidaan kysyä, »sopiiko opettaminen konstruktivismiin?»

Behaviorismista juontavissa oppimiskäsityksissä opettaminen on tarkoittanut jo hankittujen tietojen välittämistä opiskelijoille. Tähän toimintaan on kehitetty pedagogisia keinoja kuten arvosanat, palkitsemiset ja palkitsematta jättämiset, jotka ovat behaviorismille keskeisiä. Koulu on niin vahvasti omaksunut nämä toimintatavat, että voidaan jopa sanoa, että opettajat ja opiskelijat haluavat, että opettajan tehtävä on opettaa ja oppilaan kuunnella (Haapasalo 2001, 105). Konstruktivistinen opettamisen käsite tulee määritellä laajemmin, esimerkiksi Yrjön suuren (1991, 431) tavoin opettajan ja oppilaan väliseksi intentionaaliseksi ja vuorovaikutteiseksi toiminnaksi: »Opetus on kahden henkilön yhteistä, intentionaalista toimintaa, jossa toisen intentiona on saada toinen oppimaan tietty sisältö ja toisen intentiona on oppia tämä sisältö.»

Konstruktivismi matematiikan opetuksessa

Aiemmin behaviorismin yhteydessä tuli ilmi, että sen lähestymiskulma sopii hyvin matematiikan tiedon täsmälliseen rakenteeseen. Koska behaviorismi tarkastelee oppimista lähtökohtanaan tieto, on sen soveltaminen mahdollista kirjoittaa auki konkreettisesti. Tämä tehdään opetustapah- tumaa suunniteltaessa, kun käsiteltävä aihe tai tieto on täsmällisesti tiedossa.

Konstruktivistisista lähestymistapaa on vaikeampi kirjoittaa tällä tavoin auki, koska lähtökohtana oleva opiskelija on epäselvemmin määriteltävissä. Jokaisella opiskelijalla on omat lähtökohtansa opiskeluun, joten konstrukttiivisen opetuksen suuntaviivat pitää antaa yleisemmällä tasolla.

Matemaattiseen tietoon ja sen muodostamiseen saadaan konstruktivistisi-

nen näkökulma esimerkiksi *systemaattisen* konstruktivismiin avulla (Haapasalo 2001, 200–202). Siinä matemaattinen tieto asetetaan matematiikan tietorakenteiden ja opiskelijan kehityksen kannalta loogisella tavalla oikeaan järjestykseen. Verrattuna behaviorismiin tässä siis ei lähestytä asiaa pelkästään tiedon itsensä, vaan myös opiskelijan näkökulmasta.

Konstruktiivisessa käsitteenmuodostuksessa kiinnitetään erityistä huomiota tiedon eri esitystapojen väliseen tasapainoon ja käytännön tilanteisiin liittyviin tulkintoihin. Oppimiseen ja sen arviointiin liittyvät osavaiheet erotetaan toisistaan. Systemaattisessa konstruktivismissa opiskelijalle tarjotaan systemaattisesti mahdollisuuksia

- tulkita tarkasteltavia tilanteita omilla mentaalimalleillaan,
- selvittää syntyvät loogis-kognitiiviset ristiriitatilanteet,
- täydentää ja korjata mentaalimallejaan,
- konstruoida käsitteeseen liittyvät attribuutit ja niistä johdetut proseduurit itse, ja
- soveltaa konseptuaalista ja proseduraalista tietoaan ongelmatilanteissa ja orientoituessaan uusiin käsitteisiin.

Haapasalon (2001, 200–201) mukaan systemaattinen konstruktivismi jaetaan kolmeen komponenttiin. Ensimmäinen kokonaisuus muodostuu matemaattisista vaatimuksista, jotka muodostuvat käsitteistä, algoritmisistä proseduureista ja lauseista. Toinen kokonaisuus muodostuu ongelmanratkaisuprosessista, joka tapahtuu viiden vaiheen kautta. Kolmantena on konstruktivistinen tieto- ja oppimiskäsitys, joka luo yleiset puitteet sille, miten opiskelijan käsitys matemaattisen tiedon konstruktioista rakentuu opiskelun edetessä.

Sosiokonstruktivismi korostaa vuorovaikutusta

Systemaattinen konstruktivismi synnyttää sosiaalisesti elinvoimaista tietoa, ja sitä voidaankin pitää yhtenä esimerkkinä konstruktivismiin suuntauksesta, jossa korostetaan vuorovaikutuksen asemaa oppimisprosessissa (Haapasalo 2001, 202). *Sosiokonstrukttiivisen* oppimiskäsityksen mukaan tiedollisten skeemojen rakentaminen tapahtuu sosiaalisella tasolla kognitiivisten prosessien aktivoituessa ihmisten välisissä sosiaalisissa tilanteissa (Kauppila 2007, 42).

Käytännössä sosiokonstrukttiivinen oppiminen koostuu opiskelijoiden välisistä kommunikaatiosta, jossa tarkastellaan oppimiseen liittyviä koke-

muksia ja ongelmia. Tiedon jalostuminen on sosiaalinen prosessi opiskelijoiden keskustellessa, miten uusi tieto on muuttanut heidän käsitystään maailmasta. Näin ollaan päästy jälleen tiedon luonteen äärelle. Sen tarkastelusta lähdettiin liikkeelle tutkimaan behaviorismia, ja siihen kaikki erilaiset oppimiskäsitykset pohjimmiltaan perustuvat.

Konstruktiivinen oppimisympäristö

Konstruktivismi sopii hyvin tietoverkkojen luonteeseen vapaana tiedon lähteenä. Koska opetus lähtee rakentumaan opiskelijan aikaisemman tiedon päälle, tulee oppimateriaalin olla helposti muovautuvaa viime kädessä jokaisen opiskelijan henkilökohtaisia tarpeita vastaavaksi. Oppimisympäristöjen sisältöjä mietittäessä konstruktiivinen lähestymistapa on kuitenkin haastava. Koska oppimisympäristöt ovat usein suljettuja järjestelmiä, vaatii paljon resursseja muokata materiaalista sellainen, että se olisi helposti muokattavissa eri opiskelijoiden tarpeisiin.

Erilaiset konstruktivistiset painotukset ovat tarjolla monissa nykyisissä oppimisympäristöissä. Mahdollisuus vuorovaikutukseen opiskelijoiden kesken ja opettajan välillä on mahdollista useilla eri tavoilla. Tämä mahdollistaa sosiokonstruktiivisen oppimisen.

Käytettävyyden kannalta esimerkiksi käyttöliittymän selkeys korostuu konstruktiivinen oppimista tukevissa oppimisympäristöissä. Koska sisällöt ovat vaihtelevia ja jopa opiskelijakohtaisia, tulee käyttöliittymän sallia joustavuus erilaisten materiaalien esittämisessä. Toisaalta oppimisympäristön rakenteen tulee olla selkeä, jotta oppimista edistävä tiedonrakentelu etenee kohti oppimistavoitteita. Opettajan ohjaava rooli siirtyy oppimisympäristölle, kun opiskelu siirtyy sen avulla tehtäväksi. Tällöin myös opiskelijan intentioiden suuntautuminen ja motivointi pitää hallita käyttöliittymän tarjoamin keinoin. Konstruktiivinen oppimisympäristö joutuu voittamaan myös ennakkoluuloihin liittyviä haasteita, joita kohdistuu tietoteknisen oppimisympäristön käyttämisen lisäksi myös itse konstruktiiviseen opetukseen.

2.6 Yhteenveto

Oppimisprosessia voidaan tarkastella monen erilaisen oppimiskäsityksen avulla. Näistä jokainen luo oman näkökulmansa oppimiseen, eikä mitään niistä voida pitää kaiken selittävänä mallina. Oppimiskäsitysten

kehitykseen on heijastunut yleinen tiedon käsittämisen teoria. Suurena linjana oppimisteorioiden kehityksessä voidaan nähdä, että kun aiemmin oppiminen nähtiin opiskelijan ulkopuolisena prosessina, käsitetään oppiminen nykyisin opiskelijassa tapahtuvana muutoksena, joka on hänelle henkilökohtainen. Tämä luo haasteita opetuksen järjestämiselle, sillä erilaisten oppijoiden tarpeet tulee ottaa huomioon esimerkiksi oppimisympäristöjen suunnittelussa. Käytännössä opetus on usein yhdistelmä monen oppimiskäsityksen mukaisesta toiminnasta.

Tietoteknisten oppimisympäristöjen avulla on mahdollista tuottaa puitteita minkä tahansa oppimiskäsityksen mukaiselle opetukselle. Nykyisissä ympäristöissä on nähtävissä paljon behavioristisia elementtejä, koska tiedon pilkkominen tarkasti ennalta määriteltyihin osiin sopii hyvin nykyisin käytössä olevilla tekniikoilla esitettäväksi. Erilaiset monivalintatehtävät ja helposti oikein tai väärin arvosteltavat kysymykset ovat tuttuja tietoteknisistä oppimismateriaaleista.

Teknologioiden kehitys on jo nähtävissä siinä, että oppimisympäristöihin on mahdollista rakentaa ominaisuuksia, jotka tekevät oppisisällöistä yhä monipuolisempia, jolloin myös ei-behavioristiset opetusmenetelmät tulevat mahdollisiksi. Tämä tuo haasteita materiaalin toteutukselle tiedon jäsentämisen ja esittämisen kannalta. Materiaalin hyvä käytettävyys on usein avainasemassa siihen, miten käyttökelpoinen tietokoneella toteutettu oppimisympäristö on.

3. Mitä matematiikka on?

3.1 Matemaattisen tiedon luonne

Kun tarkoituksena on miettiä matematiikan opetukseen soveltuvan tietokonesovelluksen ominaisuuksia, on hyvä aloittaa tarkastelemalla matemaattisen tiedon luonnetta. Oppimisympäristön tapa esittää matemaattista tietoa vaikuttaa suuresti siihen, millainen kuva opiskelijalle matematiikasta syntyy. Jotta oppimisympäristö onnistuisi tässä mahdollisimman hyvin, tulee matemaattisen tiedon luonne olla selvillä. Millaista tietoa se, jota matematiikaksi kutsutaan, oikein on?

»Matematiikka on sitä, mitä matemaatikot tekevät.»

Vieressä olevan lainauksen tavoin kuului eräs vastaus, kun matemaatikkojen konferenssissa kysyttiin osallistujilta *mitä matematiikka on?* Tämän heiton taustalla on se tosiasia, että jos edellisessä luvussa todettiin oppimisen

täsmällisen määrittelemisen olevan vaikeaa, niin sama pätee myös matematiikalle. Yksi lähestymistapa matematiikan luonteeseen on tietoteoria. Tällöin muodostetaan ensin käsitys tiedon luonteesta, jonka jälkeen tätä käsitystä sovelletaan matemaattiseen tietoon. Haapasalo (2001, 131) luettelee seuraavat määritelmät matematiikalle perustuen erilaisiin tietokäsityksiin.

Realistinen Matematiikka on olemassa todellisuudessa, ja me vain keksimme sen uudestaan.

Idealistinen Me keksimme matematiikan ja se sopii sovellettavaksi reaalia maailman tilanteisiin.

Mekaaninen Ihminen on verrattavissa tietokoneeseen, joka voidaan oh-

jelmoida harjoittelulla käyttämään operaatioita ja ratkomaan ongelmia. Behavioristinen traditio on äärimmilleen vietyä tätä suuntaa.

Empiristinen Ajattelu ja siten myös matematiikka koostuu todellisuudesta ja havainnoista peräisin olevista yksiköistä, jotka sitten assosioituvat toisiinsa ja luovat lopulta järjestelmän.

Strukturaalinen Matematiikka on täydellisesti organisoitu järjestelmä, jonka välittäminen tuleville sukupolville on tärkeää.

Konstruktivistinen Matematiikka on ihmisen oma konstruktio, jonka varassa hän rakentaa oman kuvansa todellisuudesta.

3.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Matemaattinen tieto on perinteisesti jaoteltu myös käsitteelliseen eli *konseptuaaliseen* ja toiminnalliseen eli *proseduraaliseen* tietoon (Haapasalo 2004, 50–51; Rasila, Malinen & Tiitu 2015). Näistä edellinen liittyy asian ymmärtämiseen, kysymykseen *miksi*, ja jälkimmäinen tiedon dynaamiseen muokkaamiseen ja tuottamiseen, kysymykseen *miten*. Tällaisessa vastakkainasettelussa matematiikan konseptuaalisen tiedon käsitteleminen voidaan yhdistää konstruktivistiseen ja proseduraalisen tiedon behavioristiseen oppimiskäsitykseen. Konstruktivistisessa tiedon käsitteilyssä erilaisten käsitteiden ymmärtäminen ja uudelleen järjestäminen on keskeistä. Kysymys *miten* on helposti yhdistettävissä behavioristiseen opetukseen, jossa pyritään vahvistamaan niin sanottua oikeanlaista toimintaa.

Matemaattisten tehtävien luokitteluun konseptuaalisiin ja proseduraalisiin ei ole kuitenkaan yksinkertaista (Haapasalo 2004, 54). Tehtävät joudutaan aina tulkitsemaan siinä viitekehyksessä, jollainen niihin liittyvä opetustapahtuma on. Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välillä voidaan nähdä olevan vuorotteleva yhteys. Jotta käsitteellinen uuden tiedon luominen voisi tapahtua, pitää opiskelijalla olla aiheeseen liittyvää proseduraalista tietoa. Uudet konseptit kuitenkin tuovat mukanaan tarpeen uudentyyppiselle proseduraaliselle tiedolle.

3.3 Skeemat matematiikan rakennuspalikoina

Suurin osa ihmisen oppimisesta tapahtuu suoraan jokapäiväisessä elämässä ympäröiviä ilmiöitä tarkkailemalla. Käsitteet ympärillämme eivät useinkaan ole kovin monimutkaisia. Matemaattisen tiedon luonne on kuitenkin erilainen. Sen erityispiirre on käsitteiden suuressa yleistettävyydessä. Matematiikan tietorakenne on muotoutunut tuhansien vuosien kehityksen tuloksena. Niinpä matemaattisen tiedon oppiminen ei useinkaan ole mahdollista pelkästään ympäristöä tarkkailemalla. Matematiikan oppimisessa on tärkeässä asemassa vuorovaikutus matemaattisen tiedon, opetusmateriaalien ja matematiikan asiantuntijoiden, kuten opettajien ja matemaatikkojen, kanssa. (Skemp 1987, 18)

Vaikka matemaattiset käsitteet eroavat monimutkaisuudellaan monista arkikäsitteistä, on matematiikan oppiminen pienille lapsille yleensä mieluisaa ja helppoa. Tämän näennäisen ristiriidan ydin on, että matematiikassa ei opeteta abstraktioita, vaan lapsille tarjotaan käsitteistä konkreettiset mallit, joilla he voivat opiskella matematiikkaa (Yrjönsuuri 1996, 21). Tässä tullaan edellisessä luvussa esillä olleeseen skeeman käsitteeseen. Skemp (1987, 22) liitti sen matemaattisen tiedon yhteyteen, jolloin saatiin voimakas työkalu kuvaamaan matemaattisen tiedon rakentumista erilaisiksi malleiksi.

Konkreettisen mallin esittämisen ja käsittelyn periaatteet ovat keskeisiä opiskelusta saatavien kokemusten ja oppimisen tulosten kannalta. Matemaattisten mallien käyttö on monien alojen sovelluksissa lisääntynyt. Esimerkiksi kaavioita ja kuvioita käytetään malleina, kun ratkaistaan erilaisia tehtäviä.

Käyttökelpoisella mallilla on piirteitä, jotka erottavat ne vähemmän tarkoituksenmukaisista malleista: mallin ja käsitteen looginen vastaavuus, mallin opetuksellinen selkeys, mallitapahtuman yleisyys käytännössä sekä mallin kiinnostavuus.

Mallin ja käsitteen looginen vastaavuus Mallilla tulee olla ominaisuuksia, jotka mahdollisimman loogisesti vastaavat opittavan käsitteen ominaisuuksia. Voidaan sanoa, että erillisten joukkojen yhdistämisen ominaisuudet vastaavat hyvin yhteenlaskun ominaisuuksia.

Mallin opetuksellinen selkeys Malli on opetuksellisesti selkeä, jos ne ominaisuudet ovat helposti havaittavia, jotka vastaavat myös käsitteen ominaisuuksia, ja kuinka helposti mallin voi opiskelijalle esittää.

Esimerkiksi yhtä monen alkion joukkojen yhdistämisen voi esittää selkeämmin kuin tulojoukon.

Mallitapahtuman yleisyys käytännössä Sovellusten kannalta on erittäin tarpeellista, että valittu malli nousee lähiympäristöstä, ja että sen voi yhdistää käytännön tapahtumiin. Yhtä monen alkion joukkojen yhdistäminen on käytännössä yleisempi tapahtuma kuin tulojoukon muodostaminen.

Mallin kiinnostavuus Mallin tulee olla niin kiinnostava, että se houkuttelee tarkastelemaan asiaa. Tähän vaikuttavat tapahtumaan liittyvien ongelmien laatu ja myös niiden välineiden ulkonaiset ominaisuudet, joilla tapahtuma esitetään.

3.4 Matematiikan kieli rakentuu symboleista ja nimistä

Matematiikan luonteen tarkastelussa välittömin yhteys tietoon saadaan erilaisten matemaattisten merkkien ja symbolien kautta. Näin muodostuu matematiikan kieli, jonka avulla tietoa kommunikoidaan.

Opettaminen on opettajan ja opiskelijan välistä vuorovaikutusta, johon tietotekniset oppimisympäristöt tarjoavat uudenlaisia välineitä. Tietotekniikan käyttö ei muuta opettajan roolia aikaisempaa vähäisemmäksi, sillä tietotekniset oppimisympäristötkin ovat opetuksen välineitä siinä missä perinteisetkin, ja niitä käytetään opettajan ohjauksessa. Modernit oppimisympäristöt tarjoavat mahdollisuuden rikastaa matematiikan kieltä, joka on kehittynyt vuosisatojen saatossa nykyisen kaltaiseksi. Tämä kehitys on tapahtunut kulloinkin käytössä olleiden matematiikan esittämisen keinojen asettamissa rajoissa.

Kieli on tärkeässä asemassa matematiikan oppimisessa. Matematiikan käsitteet hahmottuvat sen avulla. Kieli ja kommunikaatio ovat myös keskeisessä asemassa oppimisprosessissa. Konseptien muotoutuminen ja skeemojen rakentuminen ovat riippuvaista siitä, miten matemaattinen sisältö esitetään opiskelijalle, sekä miten opiskelija tämän tiedon ymmärtää.

Symbolit ovat matematiikan kielen keskeisessä asemassa. Seuraavassa on lueteltu symbolien kymmenen keskeistä merkitystä matemaattisen sisällön esittämisessä Skempin (1979, 152) mukaan.

1. kommunikointi
2. tiedon pysyvä tallennus
3. yhteyksien ja uusien käsitteiden esittäminen
4. luokittelujen yksinkertaistaminen
5. selittäminen
6. refleктоivan ajattelun mahdollistaminen
7. matemaattisten rakenteiden ja ominaisuuksien osoittaminen
8. ajattelun automatisointi
9. tietämyksen ja ymmärryksen löytäminen
10. luovan ja pohtivan henkisen toiminnan mahdollistaminen

3.5 Käsitteenmuodostus ja oppimisympäristöt

Sähköisten oppimisympäristön avulla on mahdollista järjestää opetusta, jossa matemaattisia skeemoja havainnollistetaan erilaisten analogioiden avulla. Tynjälän (2002, 92) mukaan analogioiden käyttö luonnontieteiden ja matematiikan opetuksessa auttaa tiedon oikeanlaista rakentumista, ja estää erilaisten virheellisten arkikäsitteiden jäämistä osaksi opiskelijan tiedonmuodostusta.

Verkkoon viedyllä laskuharjoituksilla on mahdollista luoda ympäristö, jossa opiskelija saa automaattisesti palautetta tekemistään tehtävistä. Näin tuetaan sekä proseduraalisen että konseptuaalisen tiedon muodostumista.

Sähköisillä oppimisympäristöillä on myös mahdollista luoda mielekkäitä oppimateriaaleja. Opiskelu kokemuksena sisältää usein voimakkaan arvotauksen. Opiskelijan tulee kokea työnsä mielekkääksi ja järkeväksi, älyllisesti aktiiviseksi ja tärkeäksi.

Matemaattisen tiedon esittämiseen sähköiset oppimisympäristöt tarjoavat monenlaisia mahdollisuuksia. Perinteisten matemaattisten merkintöjen esittäminen päätelaitteen ruudulla on jo arkipäivää. Lisäksi tietotekniikka tarjoaa mahdollisuuksia kehittää matemaattista kieltä sellaisiin suuntiin, jotka perinteisillä esitystavoilla ovat olleet saavuttamattomissa.

Tietoteknisten oppimateriaalien avulla on mahdollista saavuttaa Brunerin (1986) esittämät kolme oppimisen vaihetta, jotka voivat esiintyä samanaikaisestikin ja yli pitkien ajanjaksojen, jopa läpi koko elämän. Ne ovat

havaitsemalla ja tekemällä eli toimimalla ympäristön mukaan; *käsittelemällä* eli ottamalla askeleen konkreettisesta todellisuudesta älyllisten mielikuvien maailmaan sekä *esittämällä symbolien avulla* eli avaamalla ovet abstraktin ajattelun käsitteellisiin mahdollisuuksiin.

4. Tietokoneavusteinen matematiikan opetus Aallossa

4.1 Sähköä opetukseen

Opetuksen välineet ovat aina olleet tapetilla, kun uusien teknologioiden käyttökohteita on ryhdytty miettimään. Etenkin erilaisten mediateknikoiden käytössä opetusteknologia mainitaan usein ensimmäisten sovelluskohteiden joukossa. Thomas Edisonin sitaatti sadan vuoden takaa kertoo, miten erityisesti kirja on yleensä ollut sähköisten medioiden tulilinjalla. Elokuvan opetuskäyttöön liittynyt ennuste ei toteutunut sellaisenaan omalla aikanaan, mutta tuntuu edelleen johdonmukaiselta visiolta nykyisten digitaalisten laitteiden ja sisältöjen kehittyessä.

»Books will soon be obsolete in the public schools. Scholars will be instructed through the eye.» – Edison

Tietokoneiden lyhyessä historiassa opetus­käyttö on ollut mukana lähes alusta asti. Kylmä sota ja Спутник kirjaimellisesti sähköistivät Yhdysvaltojen koulujärjestelmän 1950-luvun lopulla. Amerikkalaista koulua ryhdyttiin kehittämään monin eri tavoin rakenteita, sisältöjä ja menetelmiä muuttamalla. Laadukasta koulutusta haluttiin ryhtyä viemään

kaikkien saataville. Tunnustettiin, että yhteiskunnan kehitystä on yhä hankalampi ennustaa, jolloin koulutuksen tehtävä valmentaa lapsia loppuelämänsä varten on yhä haasteellisempaa. Ajatuksella elinikäisestä oppimisesta valmistauduttiin siihen, että työurat eivät välttämättä enää kestä läpi elämän, vaan ihmisen elinikään tulee mahtumaan montakin uranvaihtoa. Sähköisten viestimien massiivinen tuleminen loi informaatiotulvan, jonka kanssa koulutus joutui kilpailemaan. Ratkaisuja näihin haasteisiin haettiin muun muassa opetusteknologian avulla. Se nähtiin välineenä, jolla pystytään toteuttamaan uudenlaisia opetuksen paradigmoja

ja lisäämään opetuksen määrää ja tehokkuutta.

Aineena matematiikka on aina ollut hyvin edustettuna, kun tietotekniikan avulla on toteutettu oppimisympäristöjä. Tietokone tehokkaana laskime-
na ja loogisen ajattelun koneena soveltuu luonnollisesti matemaattisten
ongelmien käsittelemiseen. Lisäksi ohjelmoinnin järjestelmällisyys tuo
tietokoneilla työskentelyn lähelle matematiikan täsmällistä ja huolelli-
suutta korostavaa luonnetta. Tietotekniikan kehittäjillä on myös usein
ollut vahva matemaattinen tausta, joten sovellusalue on ollut tekijöille jo
valmiiksi tuttu.

Yksi ensimmäisistä tietoteknisistä opetusjärjestelmistä, joiden sisältönä
oli tietokoneavusteiset harjoitukset, kehitettiin Stanfordin yliopistossa
1963. Alakoulun matematiikkaa logiikassa ja aritmetiikassa sekä äidin-
kieltä varten tehtiin sovellus, jossa koululaisten oli mahdollista tehdä
harjoituksia päätelaitteen kautta. Järjestelmä oli oman aikansa verkkoso-
vellus, jonka pääpalvelin sijaitsi yliopistolla. Järjestelmän tavoitteena oli
mahdollistaa koululaisten opiskelu omaan tahtiin vastakohtana luokan
yhtenäiseen tahtiin etenemiselle, ja tarjota välitöntä palautetta suorituk-
sista. Tällä haluttiin päästä uudenlaiseen pedagogiseen näkemykseen
opiskelusta, jossa koululaisella on suurempi vastuu omasta oppimisestaan.
(Suppes 1971)

*»Being a mathematician means doing, rather
than knowing or understanding.» – Papert*

Edellä mainitun aikakauden tietotekniikalle oli luontaista, että tietoko-
neen yleinen käyttäminen oli läheisessä yhteydessä ohjelmointiin. Ohjel-
mien käyttäminen vaati esimerkiksi yleistä käsitystä tietokoneen toimin-
nasta aivan eri tavalla kuin nykyisin. Niinpä myös ohjelmointi tuotiin
työkaluksi, jolla pyrittiin kehittämään opiskelijoiden matemaattista ajat-
telua.

1970-luvun alussa MIT:ssa kehitettiin LOGO-ohjelmointikieli, jonka
avulla pyrittiin yhdistämään matemaattinen ajattelu ja konkreettinen
tekeminen. Tavoitteena oli matematiikan opettamisen sijaan kouluttaa
lapsista matemaatikkoita. Osaaminen haluttiin saavuttaa harjoittelun ja
käytännön avulla. (Papert 1980)

Myöhemmin tähän konseptiin liitettiin Lego-palikoista rakennetut kon-
struktiot, joiden avulla toteutettiin konstruktivista oppimiskäsitystä. Op-

pimisen ajateltiin olevan mielekkäintä, kun koululainen pystyy rakentamaan itse konkreettisen välineen, jolla opeteltavaa ilmiötä voidaan tarkastella tai ratkaista.

4.2 Tietokoneavusteinen opetus alkaa Teknillisessä korkeakoulussa

Kotitietokoneet yleistyivät 1980-luvun alussa, kun markkinoille tuli laitteita, joita oli mahdollista hankkia kotikäyttöön. Kodeissa tietokoneen käyttö oli usein pelaamista ja yksinkertaista ohjelmointia. Basic eri versioineen oli yleisin ohjelmointikieli ensimmäisissä laajempaa suosiota saaneissa kotimikroissa. Tietokoneen käyttäminen vaati usein ymmärrystä ohjelmoinnista ja laitteen tekniikasta.

Teknillisessä korkeakoulussa oli jo 1970-luvun puolella aloitettu matematiikan opetus tietokoneavusteisesti. Erilaiset laskentaohjelmat kuten Matlab, Mathematica ja Maple oli otettu käyttöön insinöörimatematiikan kursseilla.

Kehitys sai erityisesti vauhtia kotitietokoneiden ja pöytäkoneiden arkipäiväistymisestä. Laitteita oli saatavilla niin yliopistokäyttöön kuin koteihin, jolloin opiskelijoilla oli mahdollista tehdä tehtäviä omilla laitteillaan, sekä ylipäätään totuttautua tietokoneilla työskentelyyn.

Teknillisessä korkeakoulussa aloitettiin Simo K. Kivelän johdolla MatTa-projekti vuonna 1993 (Kivelä & Spåra 2001, 90). Projektin käynnistäneet syyt olivat kuin tästä päivästä. Oltiin huolissaan matematiikan ja luonnontieteiden osaamisen tasosta, ja tietotekniikan kehityksen tunnustettiin olevan nopeaa ja yhä useammalle elämän alueelle ulottuvaa. Niinpä sitä haluttiin tuoda myös opetukseen. Oltiin myös uteliaita kokeilemaan, miten tietotekniikkaa voidaan käyttää opetuksessa, millaisia mahdollisuuksia se tarjoaa, ja millaisia vaikutuksia sen käytöllä on pedagogiaan.

WWW:n ja sähköpostin arkipäiväistyminen muutti tietokoneilla työskentelyn omaan koneeseen asennettujen ohjelmien käyttämisestä verkon palveluja hyödyntäväksi. Tietoteknisille oppimisympäristöille tämä muutos tarkoitti, että oppimisovelluksia ja materiaaleja ryhdyttiin tekemään verkon kautta käytettäväksi. Oppimateriaaleja siirrettiin verkkoon, ja kommunikointi opiskelijoiden kesken ja opettajan kanssa oli varhaisia verkon mahdollistamia toimintoja, jotka tuotiin myös opetusovelluksiin.

4.3 Aallon matematiikan opetus verkossa

Insinöörimatematiikan opiskelun aloittaminen yliopistossa on opiskelijalle monella tapaa haasteellista, sillä aikaisemmin koulussa opitut matematiikan oppimisstrategiat ja -menetelmät eivät enää välttämättä riitä sujuvaan opiskeluun. Tämän korjautuminen automaattisesti ei useinkaan toteudu, sillä se vaatisi opiskelijalta aktiivisuutta analysoida ja muuttaa omia opiskelutottumuksiaan. Tilannetta ei helpota, että yliopiston tarjoama opetus monesti olettaa, että opiskelijoilla on valmiit valmiudet suoriutua kursseista.

Aalto-yliopiston matematiikan ja systeemianalyysin laitoksella on lähestytty näitä haasteita kehittämällä matematiikan peruskurssien opetusta. Osa kurssien laskuharjoittelusta on viety suoritettavaksi verkkooppimisympäristössä. Usealla massakurssilla on ollut käytössä Stack-järjestelmä (Sangwin 2013; Stack 2013; Harjula 2008). Lisäksi laitos on ollut mukana EU-projektissa *Support Successful Student Mobility with MUMIE*, jossa kehitetään Mumie-oppimisympäristöä (S3M2 2012; Rasila ym. 2014; Seiler ym. 2014).

Stack-järjestelmään rakennetun oppimisympäristön ideana on luoda eräänlainen automaattinen kurssiassistentti. Harjoitustehtävien esittämisen ja vastausten keräämisen lisäksi järjestelmä tarkistaa vastaukset ja antaa opiskelijalle henkilökohtaista palautetta ja ohjausta. Tämän toivotaan aktivoivan opiskelijaa ja ohjaavan hänen opiskelutottumuksiaan.

Tutkittaessa Stackin käyttöä siitä todettu olevan monenlaisia hyötyjä. Monien toivottujen hyötyjen on voitu todeta toteutuneen. Laskuharjoitusten järjestämiseen kuluvia resursseja on saatu säästettyä, kun automaattisen tarkastuksen avulla yksinkertaisten harjoitustehtävien määrää on ollut mahdollista lisätä. Henkilökohtaisesti annettun palautteen avulla opiskelijoiden perustaitoja pystytään harjoittamaan tehokkaasti. Järjestelmän avulla on myös mahdollista kerätä tietoja opiskelijoiden tekemistä virheistä. Kurssin henkilökunta saa näin nopeasti selville, millaisissa asioissa opiskelijoilla on erityisiä vaikeuksia. (Majander & Rasila 2011, 211–212)

Stackin käyttö johtaa joustavuuteen opetuksessa ja se sopii massakursseille. Uudenlainen tapa tehdä laskuharjoituksia voi olla motivoiva opiskelijoille (Harjula 2008, 7–11; Rasila, Havola, Majander & Malinen 2010, 44). Pedagogisesti automaattisesti tuotettujen ja tarkastettujen tehtävien avulla opetusta on saatu tuotua lähemmäs muotoa, joka soveltuu hyvin tekniikan opiskelijan tapaan hahmottaa uutta tietoa aktiivisena, aistivana,

visuaalisena ja sarjallisena oppijana (Havola 2011, 127).

4.4 Verkkotehtävät Aallon matematiikan opetuksessa

Automaattisten laskuharjoitustehtävien käyttämisestä on nyt useamman vuoden kokemus TKK:n ja Aallon insinöörimatematiikan opetuksessa (Rasila ym. 2007; Rasila ym. 2010). Tehtäviä on laadittu erilaisille kursseille sekä erilaisilla alustoilla. Sisältöjä ja teknisiä ratkaisuja on kehitetty ja kokeilu on vakiintunut osaksi matematiikan peruskurssien opetuskäytäntöjä. Kehitystyön edelleen jatkuessa voidaan huomiota suunnata ympäristöjen laatuun myös suunnittelun, käyttökelpoisuuden ja käytettävyyden näkökulmasta.

S3M2-projektin tavoitteena oli tuottaa oppimateriaalia helpottamaan insinööri- ja luonnontieteiden opiskelijoiden liikkuvuutta eurooppalaisissa yliopistoissa (S3M2 2012). Bolognan prosessi on yhtenäistänyt Euroopan yliopistotutkintojen rakenteita (OKM 2013). Tästä huolimatta näillä aloilla opintoja keskeytetään paljon ja liikkuvuus on heikkoa. Osasyynä tähän pidetään esimerkiksi opiskelijoiden erilaisia taustoja ja lähtökoh- tia opintoihin. Tätä ongelmaa poistamaan EU käynnisti projektin, jonka tarkoitus on luoda verkkoon matematiikan siltamateriaaleja, joiden avulla opiskelijat pystyvät täydentämään tietojaan opintojen nivelkohdissa, kuten siirryttäessä kandidaattiopinnoista maisterivaiheeseen. Matematiikan opintojen on todettu olevan avainasemassa opintojen jatkumisen kannalta. Aallon omissakin tutkimuksissa on havaittu, että menestys matematiikan perusopinnoissa ennustaa hyvin opiskelijan suoriutumista loppuopinnoista. Aallon rooli projektissa oli muokata sen verkossa jo olevan Pikku-M-kertauspaketin materiaalit Mumie-oppimisympäristöön (Rasila & Tiitu 2014; Kivelä, Lehtinen & Tyrväinen 2009).

Uusimpia projekteja Aallon matematiikan oppimisympäristöjen ja verkko-opetuksen kehittämisessä on ollut Abacus-projekti, jonka koordinaattorina Aalto on ollut (Rasila 2016). Tässä projektissa jaetaan sähköisiä matematiikan oppimateriaaleja kansainvälisen konsortion kesken.

Lisäksi Aalto järjesti Suomen ensimmäisen avoimen matematiikan MOOC-verkkokurssin, jonka aiheena oli matriisilaskenta (Rasila & Malinen 2016). Avointen massakurssien kehittäminen ja järjestäminen on nykyisin suuren mielenkiinnon kohteena. Alustana näissä projekteissa on Stackin uusin versio.

Stack

Stack on ympäristö automaattisesti tarkastettavien matematiikan harjoitustehtävien toteuttamiseen (Sangwin 2013). Stackiä käytetään matematiikan lisäksi myös muiden matemaattisluonteisten aiheiden, kuten fysiikan opettamiseen. Ympäristön potentiaalia kuvaa, että sen avulla voidaan toteuttaa sisältöä myös sellaisiin aineisiin, joissa varsinainen laskeminen ei ole keskiössä. Aalto-yliopistossa on tästä kokemuksia tuotantotalouden logistiikka-kurssin tehtävien toteuttamisen kautta. Tällöin tehtävän tarkistamisen suorittavaa tarkistuspuuta käytetään vastauksen sisällön analysoimisen lisäksi myös tehtävän kerronnallisen etenemisen toteuttamiseen. Näin on mahdollista toteuttaa tehtävän sisälle vaiheita, jotka ovat riippuvaisia tehtävän yksittäisten osien suorittamisesta.

Stackin ensimmäinen versio julkaistiin Birminghamin yliopistossa vuonna 2004 perustuen aiempaan belgialaiseen AIM-projektiin (Stack 2013). Stackin symbolisen laskennan tekee Maxima, jonka kehittäminen oli aloitettu jo 1968 MIT:n tekoälyprojektina (Maxima 2014). Teknillinen korkeakoulu tuli mukaan Stackin kehitystyöhön vuonna 2006, jolloin järjestelmää lähdettiin kehittämään TKK:n matematiikan peruskurssien tarpeisiin (Harjula 2008; Sangwin 2013, 114–125). Näin Stackin kehitys jakautui muutamaksi vuodeksi kahdeksi rinnakkaiseksi haaraksi, kun Birminghamkin kehitti edelleen järjestelmää.

TKK:ssa tehty kehitystyö otti huomioon erityisesti suomalaisen yliopisto-opetuksen erityispiirteitä ja vaatimuksia. Näitä olivat erityisesti ympäristön aiottu käyttö massakursseilla, jolloin opetuksen ja neuvonnan resurssit ovat pienet yhtä opiskelijaa kohti. Stackin käyttöliittymää ja dialogeja kehitettiin siten, että opiskelija pystyisi käyttämään järjestelmää mahdollisimman itsenäisesti ilman ulkopuolista apua.

Nykyisin Stackin kehitystä tehdään pääosin Britanniassa. Aalto-yliopisto on säilynyt yhtenä merkittävimmistä ympäristön käyttäjistä, joten yhteistyö kehitysryhmän ja Aallon välillä on edelleen vilkasta. Stackin nykyominaisuudet ja ideologia ovat kokoelma Birminghamin ja Aallon kehitystyön tuloksista. Merkittävä kehitysaskel on ollut Stackin integroiminen Moodle-oppimisympäristöön (Moodle 2014). Stack-tehtävästä on tullut yksi Moodlen kysymystyyppi, jolloin Moodlen muut ominaisuudet ja käyttöliittymä ovat käytössä oppimateriaalien laadinnassa.

Mumie

Mumie-oppimisympäristö kehitettiin vuonna 2000 muutaman saksalaisen yliopiston yhteisprojektina Berliinin teknillisen korkeakoulun johdolla. Vuodesta 2005 ohjelman kehityksestä on vastannut Integral Learning GmbH -yritys, joskin Berliinin TKK on säilynyt ympäristön tärkeimpänä käyttäjänä ja kehityksen yhteistyötahona.

Mumieta käytetään erityisesti matematiikan siltakurssien alustana, jolloin opintonsa aloittavat opiskelijat kertaavat ja opiskelevat matemaattiset tietonsa tasolle, joka mahdollistaa sujuvan yliopisto-opiskelun aloittamisen. Yli 5000 opiskelijaa käyttää Mumieta yksinomaan Saksassa, ja Berliinin TKK:ssa yli 4000 opiskelijaa opiskelee sen avulla matematiikan peruskursseja vuosittain.

Mumien avulla on mahdollista toteuttaa opetettavan aiheen teorial, havainnollistukset, visualisoinnit, harjoitukset sekä palautteen antaminen. Mumie on yhteensopiva GeoGebran kanssa, mikä mahdollistaa graafisten esitysten esittämisen osana Mumie-materiaaleja.

4.5 Yhteenveto

Tietokoneavusteisella matematiikan opetuksella on pitkät perinteet Aalto-yliopistossa ja sen edeltäjässä Teknillisessä korkeakoulussa. Erityisesti matematiikan perusopetuksessa tapahtuvaa laskuharjoittelua on viety Stack-oppimisympäristöön, jonka avulla on mahdollista toteuttaa satunnaistettuja, henkilökohtaisia ja automaattisesti tarkastettavia tehtäviä.

Stackiä on tutkittu monipuolisesti, ja sen on todettu mahdollistavan matematiikan opiskelua muodossa, joka sopii tekniikan opiskelijan malliin opiskella. Samalla on havaittu, että ympäristöä voidaan edelleen kehittää. Niinpä lisätutkimus ympäristön ja materiaalien tuottamisesta on paikallaan.

5. Hyvä käytettävyys ja oppimisympäristöt

5.1 Käytettävyyden yleiset osatekijät

Edellisissä luvuissa on käsitelty oppimista yleisellä tasolla ja matemaattisen tiedon luonnetta. Näiden asioiden perusteiden tunteminen onkin keskeistä, kun halutaan suunnitella opetusväline matematiikan opettamista varten. Jokainen opetusvälineen tai -materiaalin suunnittelija jakaa kaikille suunnittelijoille yhteisen halun parantaa omalta osaltaan maailmaa, tehdä omasta tuotteestaan mahdollisimman hyvän. Tähän tavoitteeseen ei päästä lupausten tai pinnallisen kauneuden kautta. Suunnittelijalla tulee olla läpikäyvä tuntemus tuotteen aihepiiristä, käyttötilanteista ja käyttäjistä, jolloin hän pystyy tekemään tuotteestaan laadukkaasti käytökelpoisen ja yleiskäyttöisen. Näiden päämäärien tavoittelua voidaan käsitellä hyvän käytettävyyden käsitteistön avulla.

Käytettävyydelle annetaan yleinen määritelmä standardissa ISO 9241-210 (2010, 3) seuraavasti.

Käytettävyys on se vaikuttavuus, tehokkuus ja tyytyväisyys, jolla tietyt määritellyt käyttäjät saavuttavat määritellyt tavoitteet tietyssä ympäristössä.

Käytettävyys-alan kirjallisuudessa käytettävyyden eri osa-alueet jaotellaan usein seuraaviin viiteen kokonaisuuteen, jotka antavat standardin yleistä määritelmää käytännönläheisemmän kuvan erilaisista käytettävyyden vaikuttavista tekijöistä. (Shneiderman & Plaisant 2010, 32; Nielsen 1993, 26)

Opittavuus Miten nopeasti peruskäyttäjä oppii käyttämään järjestelmän keskeisiä toimintoja.

Käytön tehokkuus Miten sujuvasti järjestelmällä voidaan tehdä keskeiset toiminnot.

Virheiden vähyys Paljonko ja millaisia virheitä käyttäjät tekevät käyttäessään järjestelmää. Virhetilanteista selviäminen näkyy myös käytön tehokkuudessa.

Muistettavuus Miten hyvin järjestelmän käytöstä opitut asiat pysyvät käyttäjien mielessä. Opittavuus on läheisessä yhteydessä siihen, miten hyvin järjestelmän ominaisuuksien muistiinpalauttaminen tai uudelleenoppiminen onnistuu.

Miellyttävyys Käyttäjien subjektiivinen mielipide järjestelmän käytön miellyttävydestä. Miellyttävyys on tässä yhteydessä laaja käsite, jolla voidaan arvioida järjestelmän käytön aiheuttamia tuntemuksia miltä tahansa kannalta.

Hyvän käytettävyyden rakentaminen on usein tasapainoilua eri osatekijöiden välillä. Esimerkiksi käytön tehokkuutta voidaan lisätä rakentamalla käyttöliittymään erilaisia oikoteitä, lyhenteitä ja makroja, joiden avulla yleisimmin tarvittujen toimintojen suorittaminen käy jouhevasti. Näiden avulla on mahdollista nopeuttaa järjestelmän arkikäyttöä. Haittapuolelta tästä voi kuitenkin olla, että esimerkiksi järjestelmän opittavuus tai muistettavuus tulee heikommaksi.

Yleisesti katsoen miellyttävyys-osatekijä on ehkä kaikista merkittävin. Jos käyttäjä kokee tyytyväisyyttä käyttäessään järjestelmää, voitaneen ajatella, että toiminta on ollut käyttäjän kannalta kohtuullisen helppoa ja sujuvaa, ja toiminnan tarkoitus täyttynyt.

Oppimisympäristön ollessa kyseessä tilanne on kuitenkin hieman erilainen. Opiskelijan päällimmäinen motiivi käyttää järjestelmää ei ole välttämättä ensisijaisesti sama kuin järjestelmää ylläpitävällä opettajalla. Opiskelijan motiivi voi olla lyhytjänteisesti esimerkiksi vaaditun viikko tehtävän suorittaminen. Opettajalla on kuitenkin korkeampi tavoite järjestelmän käytölle ylipäätään – hänelle on olennaista, että käyttö aikaansaa oppimista.

Kuten oppimista käsittelevässä luvussa todettiin, oppimistapahtumaan saattaa liittyä ristiriitaisia tuntemuksia jo itsessään. Tältä kannalta voidaan ajatella, että oppimisjärjestelmän yleinen miellyttävyys ei ole niin keskeisessä asemassa kuin yleisesti. Sen sijaan käyttöliittymän valinnoilla

voidaan vaikuttaa suuresti siihen, mihin suuntaan järjestelmän käytöstä syntyviä tuntemuksia ohjataan. Opiskelija voi hyväksyä järjestelmän epämiellyttäviä piirteitä, mikäli hän on motivoitunut kokien onnistumisen ja itsenäisyyden tunteita. Lisäksi käyttöliittymän avulla voidaan ohjata oppimisprosessia haluttuun suuntaan.

E erityisen tärkeässä asemassa oppimisympäristön käyttökokemus on silloin, kun opiskelija aloittaa opiskelunsa ja oppimateriaalien käytön. Opiskelija joutuu alussa opettelemaan oppimisen työkalun käyttämisen samalla, kun hänen tulisi jo hallita sen käyttö varsinaisten opintojen edistämiseksi. Tämä lisää opiskelijan kognitiivista haastetta. Mikäli tämä ei onnistu, ei oppimisympäristö voi palvella tarkoitustaan oppimisen edellytysten tarjoajana. Oppimisympäristön hyvällä käytettävyydellä voi olla ratkaiseva merkitys siihen, miten opiskelija pääsee opinnoissaan alkuun.

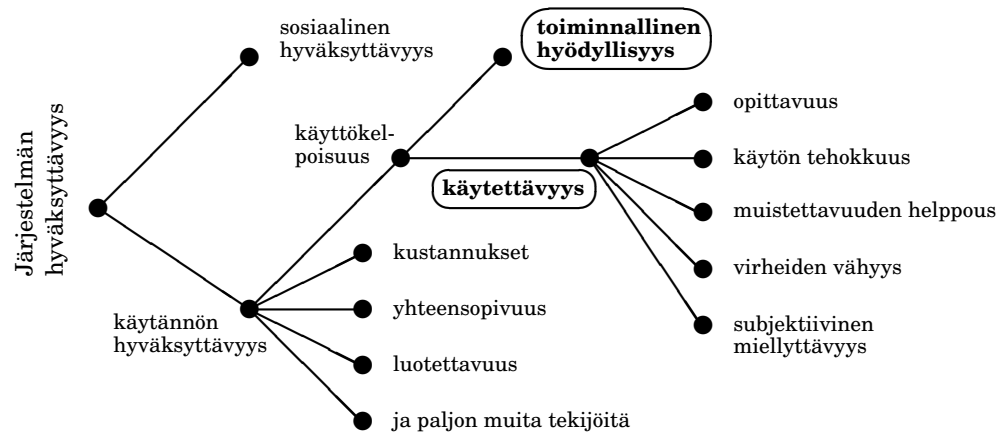
5.2 Matematiikka tietoteknisillä välineillä

Kun matematiikan kieltä ryhdytään esittämään tietoteknisen oppimisympäristön tarjoamin keinoin, tulee oppimisympäristön toteuttajan ratkaistavaksi monta kysymystä. Matematiikan käsitteiden esittämisen vahva traditio ohjaa totuttujen merkintöjen käyttöön, kun taas tekniikan tarjoamat mahdollisuudet esimerkiksi tiedon visuaaliseen esittämiseen tuovat uusia mahdollisuuksia.

Käytännössä oppimisympäristön tarjoamat työkalut matematiikan esittämiseen eivät aina ole optimaaliset. Tähän ongelmaan törmätään silloin, kun matemaattista sisältöä esitetään sellaisessa ympäristössä, joka ei ole erityisesti tähän suunniteltu. Matematiikan merkintöjä tukevat oppimisympäristöt tukeutuvat esimerkiksi \LaTeX -ladontaohjelman kaltaiseen syntaksiin, jolloin on mahdollista esittää monimutkaisiakin matemaattisia merkintöjä. Ongelmana kuitenkin monesti on, että matematiikan esittämisen syntaksi on niin monimutkaista, että jopa tehtäviä laativan opettajan on hankala tuottaa tekstiä, vastauksia kirjoittavasta opiskelijasta puhumattakaan.

5.3 Hyödyllisyys on pedagogista käytettävyyttä

Sampola (2008, 1) tulkitsee, että määritelmän vaikuttavuudella tarkoitetaan sitä, miten tarkoin ja täydellisesti käyttäjä saavuttaa tavoitteensa ja



Kuva 1. Tuotteen tai järjestelmän hyväksyttävyyden osatekijät (Nielsen 1993, 25; käännös Sampola 2008, 38).

tehokkuus sitä, miten tavoitteet saavutetaan suhteutettuna käytettyihin resursseihin. Tyytyväisyys on käytön mukavuutta ja hyväksyttävyyttä. Nielsenin (1993, 24–25) mukaan tuotteen tai järjestelmän yleiselle hyväksyttävyydelle on hyvän käytettävyyden lisäksi muitakin vaatimuksia. Kuvassa 1 on esitetty eri vaatimusten hierarkkinen järjestys. Tuotteen yleinen käyttökelpoisuus jakautuu käytettävyyteen ja toiminnalliseen hyödyllisyyteen. Tätä käytettävyyttä kutsutaan jatkossa tuotteen tekniseksi käytettävyydeksi.

Erityisesti opetuskäyttöön suunnattu ohjelmisto tai tietokonetoteutus on hyödyllinen, mikäli sen käyttäminen edistää oppimistapahtumaa halutulla tavalla. Tämän toteutuminen edellyttää, että oppimateriaalien asiasisällöt ovat opetussuunnitelman mukaisia. Yhtä tärkeää on, että materiaali ohjaa oppilaiden tiedonmuodostusta ja oppimiskäytäntöjä haluttuun suuntaan. Tätä toiminnallista hyödyllisyyttä kutsutaan jatkossa tuotteen pedagogiseksi käytettävyydeksi. Sampola (2008, 30) määrittelee sen verkko-opetusympäristöille siten, että miten hyvin käyttöliittymä, rakenne, toiminnot, verkkomateriaali, sisältö, oppimistehtävät ja valitut työkalut motivoivat ja tukevat erilaisten oppijoiden opiskelua ja ohjausta tiettyssä oppimiskontekstissa valittujen tavoitteiden mukaisesti.

Pedagogiseen käytettävyyteen kuuluvat myös tiedonhaku- ja vuorovaikutustaidot sekä sosiaalisten taitojen tukeminen. Tämä korostaa oppimista prosessina, joka on vastavuoroista ja perustuu yhteisöön osallistumiseen ja sosiaaliseen toimintaan. Hakkaraisen, Longan ja Lipposen (2004, 124) mukaan opiskelijan identiteetti, yhteisöön kuuluminen ja tulevaisuuden

osallistumisen näkymät säätelevät merkittävästi oppimisen luonnetta ja syvyyttä. Myös tästä näkökulmasta oppimisympäristön käytettävyydellä voi olla merkittävä rooli oppimisprosessin ohjaajana.

5.4 Virheettömyys käyttökelpoisuuden mittarina

Määriteltäessä hyvän käytettävyyden piirteitä on poikkeuksetta mukana virheiden vähyys (esimerkiksi Nielsen 1995; Shneiderman & Plaisant 2010, 88–89 ja Squires & Preece 1999, 479–480). Tietokonejärjestelmän tai sovelluksen tulee olla sellainen, että se ohjaa käyttäjää oikeaan toimintaan. Käyttäjän tulee saavuttaa tavoitteensa esimerkiksi käyttämänsä tietokoneohjelman avulla.

Oppimisympäristöön toteutetuissa harjoitustehtävissä virheiden esiintyminen saa lisämerkityksiä. Oppilaan käsitemaailman muuttuminen ja kehittyminen näkyy oppilaan tekemissä virheissä. Toisaalta oppimisympäristön käytettävyys on keskeisessä asemassa siinä, millaisia virheitä oppilas tekee. Näin käytettävyyden ja käsitteenmuodostuksen välille syntyy yhteys. Oppimisympäristön käytettävyys on osa kokonaisuutta, joka johtaa opiskelijan oppimiseen, eli se vaikuttaa koko käsitteenmuodostusprosessiin.

6. Virheet käsitteenmuodostuksen peilaajina

6.1 Oppiminen virheiden minimointina

Opiskelijalle vuosien saatossa kehittyneet matematiikan opiskelu- ja oppimistekniikat ovat usein virheiden minimointiin tähtääviä. Opiskelun menetelmät ovat rakentuneet behaviorismin hengessä siten, että oppiminen konkretisoituu esimerkiksi harjoitustehtävän oikeana lopputuloksena. Tästä opiskelijan ja opettajan on helppo arvioida, miten matka oppimistavoitteiden saavuttamiseen on edistynyt. Oikea suorittaminen tarjoaa myös helpon keinon arvioinnille. Menestystä opinnoissa mitataan kokeissa tehtyjen virheiden määrällä. Tämän valossa onkin ymmärrettävää, että opiskelijan kannalta virheen syntyminen on mitä epätoivotuin tilanne.

Opettajan kannalta tilanne on toinen. Hänelle oppilaan tekemä virhe tarjoaa ainutlaatuisen ikkunan oppilaan käsitteenmuodokseen. Opettajan kannalta hyödyllinen virhe paljastaa opiskelijan ajattelun kulkua. Virheitä tarkastellessa voidaan esittää kysymys *miksi* tietynlainen virhe syntyy? Jotta tätä tarkastelua voitaisiin tehdä, pitäisi erilaiset virheet pystyä tunnistamaan.

Miten tämä voisi onnistua käytännössä? Vastaus ongelmaan on virheiden luokittelu. Valitettavasti luokittelu on kuitenkin haastava tehtävä. Matemaattisen virheen syntymiseen vaikuttaa hyvin moni tekijä oppimisprosessissa, esimerkiksi opettajan toiminta ja painotukset, opetussuunnitelma tai -tavoitteet, oppimisympäristö ja erilaisten tekijöiden keskinäinen vuorovaikutus (Radatz 1979, 164).

Myös tietotekninen oppimisympäristö itsessään voi toimia virheiden synnyttäjänä käyttöliittymänsä ja yleisen käytettävyytensä kautta. Käyttöliittymä ohjaa opiskelijan työskentelyä, mutta vaikuttaa myös siihen, millaisia tehtäviä oppimisympäristön avulla on ylipäättäen toteutettu. Tä-

mä ohjaa opiskelijaa mahdollisesti tekemään tietynlaisia virheitä, joita jossain toisessa ympäristössä työskenneltäessä ei syntyisi.

6.2 Virheanalyysi

Virheiden laadun tutkimista luokittelun avulla kutsutaan virheanalyysiksi. Sillä on matematiikan opetuksen tutkimuksessa 1920-luvulle ulottuvat perinteet. Aluksi virheanalyysissä keskityttiin alaluokkien aritmetiikkaan liittyviin virheisiin (esimerkiksi Cox 1975 ja Radatz 1979). Myöhemmin virheanalyysin avulla on tutkittu myös muita matematiikan osa-alueita.

Virheanalyysin tutkimus on keskittynyt viiteen eri tavoitteeseen (Radatz 1980, 16–20).

1. Kaikkien mahdollisten virhemenetelmien listaaminen
2. Virhemenetelmien frekvenssijakauman selvittämiseen eri ikäryhmissä
3. Erikoisvaikeuksien analysointi (esimerkiksi allekkain jaon vaikeuksien).
4. Yksittäisten virhemenetelmien pysyvyyden määrittäminen
5. Virheiden luokittelu

Luokittelussa on olennaista luokittelumalli, eli millaisiin luokkiin virheet asetellaan. Malli muotoutuu usein lopulliseksi yleensä vasta itse luokittelun edetessä. Mallin tulee aina perustua havaintoihin, joita virheistä tehdään. Ne voivat ottaa huomioon esimerkiksi arvailuja oppilaan mahdollisesta ajatteluprosessista. Aina ei ole kuitenkaan helppoa seurata oppilaan ajattelua vastauksessa olevien merkintöjen perusteella. Esimerkiksi Movshovitz-Hadar, Zaslavsky ja Inbar (1987, 3–14) luokittelivat israelilaisten ylioppilaskokeiden matematiikan kokeita empiirisen tutkimusaineiston pohjalta seuraavalla mallilla.

1. väärin käsitelty informaatio
2. kielen virheellinen käänös
3. loogisesti virheellinen päättely
4. vääristynyt lause tai määritelmä
5. varmentamaton ratkaisu
6. tekninen virhe

Israelilaisten tutkimus oli empiirinen siinä mielessä, että analyysi perustui ainoastaan oppilaiden koevastauksiin. Virheiden analysointi päättyi ensimmäiseen virheeseen. Näin menettelemällä saatiin eliminoitua virheistä johtuvat uudet virheet.

Kuten edellä oppimisympäristön käytettävyyttä jaoteltiin tekniseen ja pedagogiseen, myös oppimisympäristön käytössä syntyneet virheet voidaan karkeasti luokitella tekniseen ja pedagogiseen käytettävyyteen liittyviksi. Käyttöliittymien suunnittelun lähtökohdaksi tulee ottaa, että tekniseen käytettävyyteen liittyvät virheet olisivat minimissä.

Squires ja Preece (1999, 479–480) ovat sisällyttäneet tämän opetuskäyttöön suunniteltujen ohjelmistojen käytettävyyden arviointia varten tekemiinsä heuristiikkoihin: oppimateriaalin käytössä syntyvien virhetilanteiden tai ongelmien tulee liittyä opittavaan asiaan, ei huonoon käytettävyyteen. Selvät huolimattomuudesta johtuvat virheet eivät kerro käsitteenmuodostuksesta mitään.

6.3 Virheanalyysin tekeminen

Virheille voidaan löytää joitakin yhteisiä piirteitä. Ne ovat yleensä yllättäviä, koska virhe havaitaan usein viiveellä. Virheet ovat myös pysyviä. Ne eivät korjaannu itsestään, vaan korjaaminen saattaa vaatia jopa opiskelijan ajattelumallin muutosta. Virheet voivat olla systemaattisia tai satunnaisia. Systemaattiset virheet ovat hyviä välineitä opiskelijan ajatteluprosessin tutkimiseen. Satunnaiset virheet taas kertovat huolimattomuudesta tai satunnaisesta lipsahduksesta. Opiskelijan tekemät virheet matematiikan tehtävissä ovat usein *järjettömiä*. Virheellinen vastaus on tyypillisesti sellainen, ettei se mitenkään voisi olla tehtävän mahdollinen vastaus. (Mulhern 1989, 40)

Virheitä voidaan tutkia monesta näkökulmasta. Mulhern (1989, 36–37) luettelee seuraavia.

1. Lasketaan virheellisten suoritusten määrä erityyppisissä laskutoimituksissa.
2. Analysoidaan tehtyjen virheiden tyypit. Tutkitaan, kuinka nämä virheelliset suoritukset eroavat oikeista ratkaisuksista ja tehdään johtopäätökset siitä, mitkä tekijät ovat vaikuttaneet näiden virheiden syntymiseen.

3. Analysoidaan virhemalleja. Tällaisella analyysillä voi paljastua systemaattisia tai satunnaisia virheitä, tai virheet voivat olla erilaisia ratkaistavan tehtävän mukaan. Virhemallien selvittämisen tuloksena saadaan tietoa niistä strategioista, joita opiskelija käyttää.
4. Tähdätään virheisiin, eli tutkija laatii tehtäviä siten, että opiskelijat tekevät yksilöllisiä virheitä. Yksilön virhemallit tutkitaan ja yritetään saada selville näiden virheiden tarkat syyt. Laaditaan systemaattisesti uusia ongelmia, joiden voidaan ajatella tuottavan samanlaisia virheitä.

Erilaiset näkökulmat virheisiin johtavat siihen, että optimitilanteessa tutkimuksen tekeminen monella eri menetelmällä tuottaa parhaan lopputuloksen (Tsamir 2007, 28–33). Tosin kaikkiin tilanteisiin tämäkään lähestyminen ei sovi, sillä ei ole olemassa mitään yleispätevää analysointimenetelmää, joka toimisi hyvin kaikille mahdollisille virheille.

6.4 Lineaarinen syntaksi

Matematiikan oppimisympäristössä keskeinen virheiden lähde on matemaattisen tiedon lineaarinen esitysmuoto. Matemaattisen tiedon perinteinen esittäminen kaksiulotteisesti paperilla perustuu käsin kirjoitettuihin symboleihin ja vapaaseen asetteluun. Hyvä merkintätapa auttaa niin matemaattista ajattelua kuin ongelmien mekaanista ratkaisemista.

Matemaattisen syntaksin syöttämisen tuottamista virheistä on mahdollista päästä täysin eroon käyttämällä tehtäviä, joiden suorittamiseen ei liity matemaattisen tekstin tuottamista. Tällaisia voivat olla esimerkiksi monivalintatehtävät, jolloin opiskelijan tulee tavalla tai toisella valita oikea vastaus useamman vaihtoehdon joukosta, tai erilaiset graafiset tehtävät, joissa opiskelija muokkaa tai siirtää tehtävässä esitettyä sisältöä. Tällaisten tehtävien käyttäminen rajaa kuitenkin opiskelijan oppimisprosessia, eikä ole useinkaan pedagogisesti perusteltua.

Tietokoneelle lineaarisena syötteenä annettu matemaattinen teksti perustuu syntaksiin, jossa matematiikan symbolit on koodattu näppäimistöllä peräkkäin kirjoitettaviksi merkeiksi. Tietokoneiden symbolisen laskennan järjestelmät käsittelevät matematiikkaa tällä tavoin, ja näin tästä on tullut myös matemaattisen kommunikaation tapa.

Vaikka uusimmat oppimisympäristöt voivat perustua graafisella käyttöliittymällä toteutettuihin kaavaeditoreihin, on lineaarisen syötteen perinteinen matemaattisen vastauksen kirjoittamisessa vielä usein selvästi nähtä-

vissä. Kaavaeditorit muokkaavat vastauksesta lineaarisen syötteen, jota tietokoneen symbolisen laskennan järjestelmä edelleen käsittelee.

7. Tutkimusasetelma

7.1 Aineisto

Tässä tutkimuksessa analysoidaan opiskelijoiden tekemiä virheitä Stack 1-järjestelmässä. Erityisenä kiinnostuksen kohteena on tehtävään vastaamisen aloittaminen: millaisiin ongelmiin opiskelija törmää tehtävää aloittaessaan, ja miten nopeasti virhetilanteesta päästään eteenpäin.

Aineistona on Matematiikan peruskurssi P2:n Stack-viikkoharjoitukset keväältä 2013. Aineistoksi on valittu yhdeksän Stack-tehtävää, joihin on annettu yhteensä 545 vastausta.

Matematiikan peruskurssi P2 oli pääasiassa prosessiteknologiaa kuten kemiaa ja materiaalitekniikkaa opiskelevien toinen insinöörimatematiikan 10 opintopisteen laajuinen peruskurssi Aalto-yliopistossa. Kurssin ohjeen mukainen suoritusajankohta oli ensimmäisen opiskeluvuoden keväällä. Kurssia ei enää luennoita.

Kurssin aihe oli analyysin jatkokurssi, jossa opitaan differentiaaliyhtälöt, vektorianalyysiä sekä kompleksiluvut. Kurssin suorittaminen tapahtui osallistumalla luennoille sekä luokassa järjestettyihin laskuharjoituksiin ja -demonstraatioihin. Niiden lisäksi kurssilla oli viikoittaisia Stack-harjoituksia, jotka ovat tämän tutkimuksen aineistona.

Edellä mainittu aineisto on valittu siksi, että kyseisellä kurssilla oli erilaisia aiheita siten, että Stackin käyttö niiden opettelemiseksi on mielekasta. Kurssin aihepiireihin kuului siis paljon perinteistä laskemista.

Tutkimuksessa perehdytään opiskelijoiden tekemiin lineaarisen syötteen virheisiin. Käyttöliittymä auttaa joissakin tehtävissä siten, että esimerkiksi vektorin komponentit on mahdollista syöttää eri syöttökenttiin sen sijaan, että opiskelija joutuisi muodostamaan vektorin komponenteis-

taan lineaarisen syntaksin keinoin. Pääosa tehtäviin vastaamisesta on kuitenkin puhtaasti lineaarisen syötteen kirjoittamista.

Stack-järjestelmä tallentaa opiskelijan jokaisen yrityksen validoida vastauksen syntaksi sekä itse palautuksen. Näin syntyvästä vastausaineistosta on mahdollista lukea opiskelijan yritykset sekä lopulliseksi vastaukseksi tarkoittamat syötteen. Näitä vertaamalla on mahdollista tehdä havaintoja, miten nopeasti syntyneet virhetilanteet on saatu korjattua.

7.2 Tutkimuskysymykset

Tutkimuskysymyksiä ja -tehtäviä ovat

1. selvittää miten hyvin opiskelijat selviytyvät aineistona olevista tehtävistä,
2. laatia virheluokat aineiston luokitteluksi ja
3. aineiston virheluokittelun suorittaminen.

7.3 Tutkimuksen suorittaminen

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen saadaan vastaus yksinkertaisesti laskemalla miten moni opiskelija sai vietyä tehtävän oikeaan ratkaisuun asti.

Luokkien tekeminen aloitetaan tekemällä hahmotelma virhemallista. Tässä käytetään pohjana Sangwinin ja Ramsdenin (2007, 927) tekemiä virrehavaintoja. Heillä oli käytössään seuraavat virheluokat.

Numero	Havainto
1	Kertomerkki väärin
2	Parittomat sulut
3	Oma syntaksi, tarkoittaa oikeaa
4	Ongelma miinus-merkin kanssa
5	Ei virheitä

Näiden luokkien avulla tehdään koeluokittelu, jonka kuluessa mallia täydennetään luokiteltavaan aineistoon sopivaksi. Koeluokittelun jälkeen

arvioidaan luokitteluprosessia, ja tehdään päätös lopullisista luokista ja luokittelumenetelmästä. Luokittelut tehdään lukemalla Stack-vastausten lokeja ruudulta. Luokittelussa ollaan kiinnostuneita vain ensimmäisenä tulevasta virheestä. Tällä pyritään saamaan vastaus sille, että miksi ratkaisu on lähtenyt väärille raiteille.

Lopullinen luokittelu tehdään jälleen lukemalla opiskelijoiden vastauksia Stack-lokeista. Päähuomio on syntaksivirheissä, jolloin vastaamisen voidaan ajatella keskeytyneen siksi, että opiskelijan ja tietokoneen käsitys matemaattisesta kielestä eivät kohta. Toki syntaktiseen virheeseen saattaa liittyä myös ongelmia tehtävän varsinaisessa ratkaisemisessa, mutta on mahdollista, että opiskelija on osannut ratkaista matemaattisen ongelman oikein epäonnistuen tiedon syöttämisessä järjestelmään.

8. Tulokset

8.1 Opiskelijoiden selviytyminen eri tehtävistä

Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä haluttiin selvittää, montako opiskelijaa suoriutui kustakin aineistona olleesta tehtävästä. Tulokset ovat luettavissa alla olevasta taulukosta.

Tehtävä	Yritti	Selviytyi
1a	93	84
4a	67	67
4b	66	62
5a	62	62
5b	54	53
6b	54	44
8a	62	51
9a	43	40
9b	44	41

8.2 Virheluokkien laatiminen

Koeluokittelun jälkeen päädyttiin säilyttämään muutama luokka alustavasta luokittelusta, mutta tarvetta ilmeni monille uusille luokille. Alustavan luokittelun kaikki luokat säilytettiin myös varsinaiseen luokitteluun, koska nämä ovat melko yleisiä virheitä myös tämän tutkimuksen aineistossa.

Matemaattisessa tekstissä on monia vaihtoehtoja merkitä kertomerkki. Erilaisiin tilanteisiin on vakiintunut erilaisia käytäntöjä, esimerkiksi

kertomerkki voidaan jättää lausekkeessa merkitsemättä, kuten $2x$ ymmärretään luvun x kertomisena kahdella. Stackissä kertolaskut pitää merkitä aina *-merkillä, mikä tuottaa virheitä.

Sulut pitää kirjoittaa Stack-vastauksessa täsmällisesti siten, että jokainen avattu sulku myös suljetaan. Tähän voisi käyttöliittymä tarjota apuja kahdella tavalla. Ensiksikin dialogi voisi huomioida sulut ja visualisoida parittomat sulut käyttäjälle helposti havaittavaksi. Toiseksi vastausdialogi olisi mahdollista muotoilla siten, että vastaajan ei tarvitse kirjoittaa itse sulkuja. Tässä vaihtoehdossa vastauksen oikea muoto saatetaan paljastaa vastaajalle, mikä ei yleensä ole toivottua.

Toisinaan Stackin hylkäämästä vastauksesta on nähtävissä, että vastaaja on tiennyt oikean vastauksen, mutta ei ole onnistunut kirjoittamaan sitä Stackin vaatimalla tavalla. Yleensä tässä yhdistyy jokin perinteinen matematiikan merkintä, jota ei olla osattu kääntää Maximan syntaksille.

Laskujärjestys pitemmissä lausekkeissa tulee määrätä suluilla. Esimerkiksi nimittäjässä oleva yhteenlasku tulee merkitä sulkuihin.

Stack-tehtävässä on validate- ja mark-nappulat. Opiskelijalla on mahdollista saada vastauksestaan arvostelu kesken vastaamisen painamalla validate-nappia. Tällä on mahdollista tarkistaa esimerkiksi syötteen oikeellisuus ennen lopullista palauttamista, joka tehdään mark-napista. Näiden kahden napin käyttötarkoitus on helppo sekoittaa. Tämä on selkeä käytettävyysongelma, mutta ei vaikuta tarkastelun alla olleissa tehtävissä vastaamiseen, koska tehtävät oli asetettu siten, että vastaamisen määräjän mennessä umpeen aloitetut, mutta palauttamatta olevat tehtävät palautetaan automaattisesti.

Käsitteellinen ongelma tai laskuvirhe on kategoria varsinaisille laskuvirheille. Näissä virheissä vastaaja on onnistunut kirjoittamaan vastauksen syntaktisesti oikein, mutta on päätenyt väärään vastaukseen.

Desimaali- ja murtoluvut on mahdollista sekoittaa vastauksessa. Stackiin voidaan asettaa, että vastaus pitää antaa joko desimaalilukuna tai murtolukuna. Tästä on syytä mainita tehtävänannossa, että vastaaja osaa toimia oikein. Tästä huolimatta vastaajan on helppo kirjoittaa vastaukseen väärässä muodossa olevia lukuja.

Huolimattomuus tai turhautuminen ilmenee monella eri tavalla. Toisinaan tämä näkyy tehtävässä siten, että vastaukseksi on annettu jotain sotkua.

Lopullisiksi virheluokiksi saatiin seuraavat.

Numero	Havainto
1	Kertomerkki väärin
2	Parittomat sulut
3	Oma syntaksi, tarkoittaa oikeaa
4	Sidontaongelma, esim. $1/x + 2$, kun pitäisi olla $1/(x + 2)$
5	Desimaaliluku/murtoluku-ongelma
6	Pilkku pilkkuna
7	Käsitteellinen ongelma tai laskuvirhe
8	Syntaksivirhe, huolimattomuus, turhautuminen
9	Ei virheitä

8.3 Tehtäväkohtainen yhteenveto

Seuraavissa taulukoissa on esitetty yhteenveto esiintymismääristä kullekin havainnolle. Sarakkeet ovat *Lukumäärä* (moniko teki kyseisen virheen), *Ratkesi* (moniko selviytyi virheestä), *Yrityksiä yhteensä* (montako yritystä tarvittiin kyseisestä virheestä selviämiseen) sekä *Yrityksiä keskimäärin* (montako yritystä keskimäärin tehtiin).

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	30	27	38	1,41
2	22	21	28	1,33
3	27	22	39	1,77
4	18	18	28	1,56
5	8	5	11	2,20
6	3	2	4	2,00
7	197	170	307	1,81
8	17	16	18	1,13
9	223	—	—	—

8.4 Luokittelut tehtävittäin

Tehtävä 1a

Kompleksiluvun

$$z = \frac{i + 4}{2i + 4}$$

polaarimuoto on $z = re^{i\varphi}$, jossa $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Täydennä seuraavat kentät tarkoilla arvoilla. Valitse myös se kompleksitason neljännes, jossa kompleksiluku z sijaitsee.

Huom! \sqrt{a} merkitään $\text{sqrt}(a)$, esim. $\text{sqrt}(2)$.

$|z| = r =$

$\tan \varphi =$

- z sijaitsee
- 1. neljänneksessä
 - 2. neljänneksessä
 - 3. neljänneksessä
 - 4. neljänneksessä

Kuva 2. Tehtävän 1a aiheena oli kompleksiluvut. Käyttöliittymä auttaa vastaajaa, sillä jokaiselle vastaukselle on oma vastauskenttä, sekä viimeinen kysymys vastataan monivalintatehtävänä.

Virheluokittelu tehtävässä 1a

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	1	1	1	1,00
2	3	3	6	2,00
3	3	3	3	1,00
4	1	1	1	1,00
5	7	4	10	2,50
6	2	1	3	3,00
7	49	44	92	2,09
8	0	0	0	—
9	27	—	—	—

Tehtävä 4a

Millä vakioiden A, B arvoilla funktio $y(x) = A \cdot \cos(6 \cdot x) + B \cdot \sin(6 \cdot x)$ toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$y' + y = 8 \cdot \sin(6 \cdot x)?$$

Vihje: Sijoita annettu lauseke yhtälöön ja päätele kertoimet. Vastauksessa ei saa esiintyä yleisen ratkaisun vakiota.

$y(x) =$

Kuva 3. Tehtävässä 4a on annettu ohje, joka vähentää väorien vastausten määrää.

Virheluokittelu tehtävässä 4a

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	5	5	10	2,00
2	0	0	0	—
3	1	1	3	3,00
4	0	0	0	—
5	0	0	0	—
6	0	0	0	—
7	24	24	39	1,63
8	5	5	5	1,00
9	32	—	—	—

Tehtävä 4b

Määritä alkuarvot tehtävän

$$y' = -5 \cdot \frac{7+y}{x},$$

 $y(-1) = -8$, ratkaisu.Vihje: Ratkaisu voidaan sieventää muotoon $a + b/x^c$. $y(x) =$ **Kuva 4.** Myös tehtävässä 4b annetaan vihje.

Virheluokittelu tehtävässä 4b

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	0	0	0	—
2	1	1	1	1,00
3	3	3	8	2,67
4	1	1	1	1,00
5	0	0	0	—
6	0	0	0	—
7	26	22	44	2,00
8	1	1	1	1,00
9	34	—	—	—

Tehtävä 5a

Määritä differentiaaliyhtälön

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

yleinen ratkaisu. Käytä muuttujaa x ja vakioille symboleja A ja B . Eksponenttifunktio annetaan esim. muodossa $\exp(5 \cdot x)$.

$y(x) =$

Kuva 5. Eksponenttifunktion syöttäminen neuvotaan tehtävässä 5a. Tässä moni varmasti antaisikin funktion siten, että siitä tulisi turha virheilmoitus.

Virheluokittelu tehtävässä 5a

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	5	5	5	1,00
2	1	1	1	1,00
3	3	3	5	1,67
4	5	5	5	1,00
5	0	0	0	—
6	0	0	0	—
7	5	5	8	1,60
8	3	3	4	1,33
9	40	—	—	—

Tehtävä 5b

Määritä Eulerin differentiaaliyhtälöön

$$x^2 y'' - 7xy' + 7y = 0$$

liittyvän alkuarvotehtävän $y(1) = 30$, $y'(1) = 0$, ratkaisu. Anna vastauksena ratkaisussa esiintyvien funktioiden x^r eksponentit $r_1 < r_2$ ja varsinainen ratkaisu, joka on kokonaislukukertoinen polynomi.

$r_1 =$

$r_2 =$

$y(x) =$

Kuva 6. Tehtävässä 5b jokainen vastaus pyydetään omaan syöttökenttäänsä.

Virheluokittelu tehtävässä 5b

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	1	1	1	1,00
2	0	0	0	—
3	2	2	2	1,00
4	0	0	0	—
5	0	0	0	—
6	0	0	0	—
7	12	11	11	1,00
8	1	1	1	1,00
9	38	—	—	—

Tehtävä 6b

Määritä differentiaaliyhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x'(t) = 36y(t) \\ y'(t) = 36x(t) \end{cases}$$

sellaiset ratkaisut, että $x(0) = 0$, $y(0) = 12$. Anna vastauksena ratkaisuihin esiintyvien funktioiden $e^{\lambda t}$ eksponentit $\lambda_1 < \lambda_2$ ja varsinaiset ratkaisut. Huomaa, että muuttujan nimi on t .

Vihje. Muunna tehtävä ensin toisen kertaluvun yhtälöksi vaikkapa x :lle.

$$\lambda_1 = \text{[input]}$$

$$\lambda_2 = \text{[input]}$$

$$x(t) = \text{[input]}$$

$$y(t) = \text{[input]}$$

Kuva 7. Tehtävässä 6b kysytyt λ_1 ja λ_2 pitää osata syöttää oikeassa järjestyksessä.

Virheluokittelu tehtävässä 6b

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	1	1	2	2,00
2	4	4	5	1,25
3	6	4	6	1,50
4	4	4	4	1,00
5	0	0	0	—
6	0	0	0	—
7	20	13	18	1,38
8	3	2	3	1,50
9	16	—	—	—

Tehtävä 8a

Määritä seuraavat osittaisderivaatat

(a)

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\sqrt{6x^2 + 7y^2})$$

(b)

$$\frac{\partial}{\partial z}(\ln(xyz) - 9xyz^2)$$

Laske funktion $f(x, y, z)$ gradientti ∇f

(c)

$$f(x, y, z) = \cos(6xy)e^{7(x^2+y^2+z^2)}$$

(a):

(b):

(c): [

Kuva 8. Tehtävässä 8a on syöttökenttä jokaiselle kysytylle asialle. Tosin c-kohdassa kysytty gradientti pitää syöttää komponenteittain liian pitkiin syöttökenttiin.

Virheluokittelu tehtävässä 8a

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	14	12	16	1,33
2	9	8	10	1,25
3	6	3	9	3,00
4	2	2	12	6,00
5	1	1	1	1,00
6	0	0	0	—
7	21	16	30	1,88
8	3	3	3	1,00
9	6	—	—	—

Tehtävä 9a

Laske $y'(x)$ implisiittisen derivoinnin avulla, kun

(a)

$$x^6 + y^2 = 2$$

(b)

$$x + y = \frac{1}{x^2} + \frac{27}{y^2}$$

Määritä lisäksi $y'(1)$ molemmissa tapauksissa. Huomaa, että $y(1)$ täytyy ratkaista annetusta yhtälöstä, kun siihen on ensin sijoitettu $x = 1$. Anna vastaukset tarkkoina arvoina.

Huom. $y(x)$ merkitään tässä y , esim. $2*y$, ei $2*y(x)$.

(a) $y' =$

(a) $y'(1) =$

(b) $y' =$

(b) $y'(1) =$

Kuva 9. Tehtävässä 9a jokaiselle kysytylle kohdalle on tehty oma syöttölaatikko.

Virheluokittelu tehtävässä 9a

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	1	1	1	1,00
2	4	4	5	1,25
3	2	2	2	1,00
4	5	5	5	1,00
5	0	0	0	—
6	1	1	1	1,00
7	22	19	34	1,79
8	1	1	1	1,00
9	7	—	—	—

Tehtävä 9b

Määritä seuraavan käyrän tangentin yhtälö annetussa pisteessä:

$$5x^2y^3 - 2x^3y^2 = 96 \text{ pisteessä } (2, 2)$$

$y =$

Kuva 10. Tehtävässä 9b kysytään suoran yhtälöä.

Virheluokittelu tehtävässä 9b

Havainto	Lukumäärä	Selviytyi	Yrityksiä yhteensä	Yrityksiä keskimäärin
1	2	1	2	2,00
2	0	0	0	—
3	1	1	1	1,00
4	0	0	0	—
5	0	0	0	—
6	0	0	0	—
7	18	16	31	1,94
8	0	0	0	—
9	23	—	—	—

9. Diskussio

9.1 Tulosten arviointi

Virheiden jakautumista käsitteellisiin ja järjestelmän käytöstä johtuviin syntaktisiin virheisiin on tässä analyysissä arvioitu vertaamalla virheiden lukumääriä. Käsitteellisten virheiden tarkempaa analyysia ei tässä tutkimuksessa tehty. Tämä johtuu siitä, että käytössä ollut Stack-järjestelmä ei kerää lokitietoa sellaisella tarkkuudella, että tehtävien välivaiheita olisi mahdollista tarkastella. Tämä olisi olennaista, jos vastausten avulla haluttaisiin tutkia tarkemmin opiskelijoiden käsitteenmuodostusta.

Vaikka vääränlainen kertomerkki tai ongelma sulkujen kanssa tuntuu etukäteen hankalalta ongelmalta, näistä selvittiin melko hyvin. Selkeästi suurin määrä virheitä oli käsitteellisiä tai laskuvirheitä. Lähes kaikki opiskelijat saivat vastaukset lopulta oikein. Etenkin syntaksivirheistä on selvitty yrityksen ja erehdyksen kautta eteenpäin. Kuten olettaa saattaa, käsitteellisistä virheistä oli vaikeinta toipua.

Virheellisten vastausten lukumääristä voidaan arvioida, että aineistona olleet Stack 1 -järjestelmän tehtävät toteuttavat kohtalaista käytettävyyttä suhteessa virheettömyyteen ja käytön helppouteen.

Jos käytettävyyttä haluttaisiin tutkia tarkemmin, pitäisi Stackin ja tehtävien käyttöliittymää arvioida usealla käytettävyyden arviointimenetelmällä. Erilaisten arviointimenetelmien käyttäminen yhdessä takaa yleensä paremman lopputuloksen, koska eri menetelmät löytävät hieman erilaisia käytettävyysongelmia ja toimivat eri tavoin tuotekehityksen eri vaiheissa. (Nielsen 1993, 223)

9.2 Aiheita jatkotutkimukselle

Tämä diplomityö lähti liikkeelle ajatuksesta suorittaa vertailua tavallisen kokeen ja Stackissä suoritettujen tehtävien virheiden välillä. Kysymyksenä olisi ollut, että tekevätkö opiskelijat samanlaisia virheitä paperikokeessa ja Stackissä, ja mikäli virheet eroavat toisistaan, miten. Tähän kysymykseen ei nyt kuitenkaan ollut mahdollista päästä käsiksi, koska Stackin tapa tallentaa pelkästään valmiita vastauksia ilman suorituksen etenemisestä kertovia välivaiheita ei mahdollista vastausten tarkempaa analysointia. Stackiin olisi kyllä mahdollista luoda sellaisia tehtäviä, jotka tuovat esille opiskelijan ajattelua enemmän kuin vastauksen verran, mutta tässä aineistossa sellaisia kysymyksiä ei ollut.

Sähköisissä oppimisympäristöissä annettuja vastauksia on syytä tutkia monesta syystä. Kysymysten käyttöliittymiä tulee kehittää sellaisiksi, että opiskelijoiden kognitiivinen kuorma vastaushetkellä minimoituisi. Tehtäviin tulee olla mahdollisimman helppoa vastata. Lisäksi tavoitteena tulee olla rakentaa yhä automaattisempi ja parempaa palautetta antava autonominen oppimisympäristö. Tällöin vastausten laatua tulee pystyä arvioimaan myös muuten kuin syntaksin osalta.

Tämän diplomityön tutkimus on osa laajempaa tavoitetta, joka tähtää pedagogisesti mielekkäiden ja älykkäiden oppimisympäristöjen suunnitteluun. Tulevaisuuden oppimisympäristöt pystyvät mukautumaan opiskelijan etenemiseen ja ohjaamaan hänen oppimisprosessiaan kokonaisvaltaisesti. Tähän liittyen oppimisympäristö ohjaa opiskelijaa myös kohti *oikeita virheitä*, jotka parhaimmillaan paljastavat opiskelijan käsitteenmuodostuksen ja mahdollistavat oppimisen analysoimisen.

Matematiikan sähköisiä oppimisympäristöjä käytetään yhä enemmän myös kokeiden järjestämiseen (Sangwin & Köcher 2016). Tällöin niin kokeen järjestelyt kuin vastausten tarkistaminen ja edelleen analysointi tapahtuu automaattisesti. Virheiden löytämisellä ja analysoimisella on tällaisessakin järjestelmässä keskeinen rooli.

Virheanalyysi tarjoaa mielenkiintoisen pohjan oppimisympäristöjen älykkyyden kehittämiseksi. Kun analyysi yhdistetään pedagogisen mallin kanssa (esim. Dahl ym. 2014), tulevaisuuden oppimisympäristöt mahdollistavat automaattisesti tuotettua tavoitteellista opetusta, jossa huomioidaan jokaisen opiskelijan henkilökohtaiset tarpeet. □

Lähteet

- Bradford, R., Davenport, J. H. & Sangwin, C. J. 2009. A Comparison of equality in computer algebra and correctness in mathematical pedagogy. Teoksessa J. Carette, L. Dixon, C. Sacerdoti Coen & C. M. Watt (toim.) Proceedings of the 16th Symposium of the Integration of Symbolic Computation and Mechanized Reasoning (Calculemus 2009). Lecture Notes in Artificial Intelligence 5625. Berlin: Springer, 75–89. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-02614-0_11
- Bradford, R., Davenport, J. H. & Sangwin, C. 2010. A Comparison of equality in computer algebra and correctness in mathematical pedagogy (II). *International Journal for Technology in Mathematics Education* 17 (2), 93–98. <http://opus.bath.ac.uk/24994/>
- Bruner, J. 1986. *Actual minds, possible worlds*. Cambridge: Harvard University Press.
- Cox, L. S. 1975. Diagnosing and remediating systematic errors in addition and subtraction computations. *Arithmetic Teacher* 22 (2), 151–157.
- Dahl, B., Ståhl, T., Malinen, J., Rasila, A. & Tiitu, H. 2014. Diagnosing nursing students' errors in medication calculation. Designing a method based on the 4 Cs teaching model for analysing mathematical proficiency. Teoksessa J. Viteli & A. Östman (toim.) *Tuovi 12: Interaktiivinen tekniikka koulutuksessa 2014 -konferenssin tutkijatapaamisen artikkelit*. TRIM Research Reports 12. Tampere: Tampereen yliopisto, 82–92. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-44-9561-8>
- Devlin, K. 2008. What will count as mathematics in 2100? Teoksessa B. Gold & R. Simons (toim.) *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*. Mathematical Association of America, 291–311.
- Devlin, K. 2011. *Mathematics education for a new era. Video games as a medium for learning*. Natick: A K Peters.
- Engeström, Y. 1982. *Perustietoa opetuksesta*. Helsinki: Valtiovarainministeriö. <http://hdl.handle.net/10224/3665>
- Haapasalo, L. 2001. *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu*. 4. tarkistettu painos. Joensuu: Medusa-Software.
- Haapasalo, L. 2004. Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka: Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 50–83.
- Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. 2004. *Tutkiva oppiminen. Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä*. Helsinki: WSOY.
- Harjula, M. 2008. *Mathematics exercise system with automatic assessment*. Teknillinen korkeakoulu. Elektroniikan, tietoliikenteen ja automaation tiedekunta. Automaatio- ja systeemitekniikan diplomityö. <http://urn.fi/URN:NBN:fi:aalto-201306116486>
- Havola, L. 2011. New engineering students' learning styles and basic skills in mathematics. Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (toim.) *Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta*. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.–15.10.2010. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteiden yksikkö. Tampere: Juvenes Print, 118–131.

- <http://matta.math.aalto.fi/publications/Havola2011.pdf>
- Himanen, P. 2001. *The Hacker Ethic and the Spirit of the Information Age*. New York: Random House.
- Huhtala, S. & Laine, A. 2004. »Matikka ei ole mun juttu». *Matematiikkavaikeuksien syntyminen ja niihin vaikuttaminen*. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka: Näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. 2. uudistettu painos. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 320–346.
- ISO. 2010. *Standard ISO 9241-210: Ergonomics of human–system interaction. Part 210: Human-centred design for interactive systems*. Geneva: International Organization for Standardization.
- Kauppila, R. A. 2007. *Ihmisen tapa oppia. Johdatus sosiokonstruktiiviseen oppimiskäsitukseen*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Kivelä, S. K., Lehtinen, E. & Tyrväinen, S. 2009. *Pikku-M: lukiomatematiikan kertauspaketti*. <http://matta.hut.fi/PikkuM/> [luettu 28.4.2013]
- Kulik C.-L. C. & Kulik J. A. 1991. Effectiveness of computer-based instruction: an updated analysis. *Computers in Human Behavior* 7 (1–2), 75–94.
- Majander, H. & Rasila, A. 2011. Experiences of continuous formative assessment in engineering mathematics. Teoksessa H. Silfverberg & J. Joutsenlahti (toim.) *Tutkimus suuntaamassa 2010-luvun matemaattisten aineiden opetusta*. *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuksen päivät Tampereella 14.–15.10.2010*. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteiden yksikkö. Tampere: Juvenes Print, 197–214. <http://matta.math.aalto.fi/publications/MajanderRasila2011.pdf>
- Malmi, L., Karavirta, V., Korhonen, A. & Nikander, J. 2005. Experiences on automatically assessed algorithm simulation exercises with different resubmission policies. *ACM Journal on Educational Resources in Computing* 5 (3). <http://dx.doi.org/10.1145/1163405.1163412>
- Marton, F., Dall’Alba & G., Beaty, E. 1993. Conceptions of learning. *International Journal of Educational Research* 19 (3), 277–300.
- Maslow, A. H. 1943. A theory of human motivation. *Psychological Review* 50 (4), 340–396.
- Maxima. 2014. *Maxima, a Computer Algebra System*. <http://maxima.sourceforge.net/> [luettu 4.7.2014]
- Moodle. 2014. Moodle plugins directory: STACK. https://moodle.org/plugins/view.php?plugin=qtype_stack [luettu 23.7.2014]
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. & Inbar, S. 1987. An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 18 (1), 3–14.
- Mulhern, G. 1989. *Between the ears: Making inferences about internal processes*. Teoksessa B. Greer & G. Mulhern (toim.) *New Directions in Mathematics Education*. New York: Routledge.
- Multisilta, J. 1996. *Hypermedia Learning Environment for Mathematics*. Tampereen teknillisen korkeakoulun julkaisuja 183.
- Nielsen, J. 1993. *Usability Engineering*. Boston: Academic Press.
- Nielsen, J. 1995. *10 Usability Heuristics for User Interface Design*. <http://www.nngroup.com/articles/ten-usability-heuristics/> [luettu 3.4.2013]
- Nieminen, M. 2008. *Ilmavoimien kadetit verkossa: Kokemuksia verkkopohjaisten oppimisympäristöjen käytöstä matematiikan perusopetuksessa*. Jyväskylän yliopisto. Fysiikan laitoksen tutkimusraportti 3/2008. <http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-39-3117-9>
- OKM. 2013. *Bolognan prosessi*. <http://www.minedu.fi/OPM/Koulutus/artikkelit/bologna/> [luettu 28.4.2013]
- OPH. 2003. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf
- Papert, S. 1980. *Mindstorms. Children, Computers, and Powerful Ideas*. Brighton: Harvester Press.
- Pekkonen, E. 2013. Luovuus matematiikassa. *Dimensio* 77 (1), 48–55.

- Radatz, H. 1979. Error analysis in mathematics education. *Journal of Research in Mathematics Education* 10 (3), 163–172.
- Radatz, H. 1980. Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics* 1 (1), 16–20.
- Rasila, A. 2016. E-Assessment Material Bank Abacus. Teoksessa EDULEARN16 Proceedings.
- Rasila, A., Harjula, M. & Zenger, K. 2007. Automatic assessment of mathematics exercises: Experiences and future prospects. Teoksessa A. Yanar & K. Saarela-Kivimäki (toim.) *ReflekTori 2007. Tekniikan opetuksen symposium 3.–4.12.2007. Teknillisen korkeakoulun Opetuksen ja opiskelun tuen julkaisu 1/2007*, 70–80.
http://matta.math.aalto.fi/publications/Reflektori2007_70-80.pdf
- Rasila, A., Havola, L., Majander, H. & Malinen, J. 2010. Automatic assessment in engineering mathematics: evaluation of the impact. Teoksessa E. Myller (toim.) *ReflekTori 2010. Tekniikan opetuksen symposium 9.–10.12.2010. Aalto-yliopisto. Teknillinen korkeakoulu. Dipoli-raportit B 2010:1*, 37–45.
<http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-60-3478-2>
- Rasila, A., Linnoinen, K., Majander, H. & Tiitu, H. 2014. Supporting student mobility by e-learning within project S3M2. Annual symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association.
- Rasila, A. & Malinen, J. 2016. MOOCs in First Year Engineering Mathematics. Teoksessa SEFI Annual Conference 2016.
- Rasila, A., Malinen, J. & Tiitu, H. 2015. On automatic assessment and conceptual understanding. *Teaching Mathematics and its Applications* 34 (3), 149–159.
<http://dx.doi.org/10.1093/teamat/hrv013>
- Rasila, A. & Tiitu, H. 2014. Building bridges and minding the gaps. First year chemistry students rehearsing high school math with two online learning environments. Teoksessa J. Viteli & A. Östman (toim.) *Tuovi 12: Interaktiivinen tekniikka koulutuksessa 2014 -konferenssin tutkijatapaamisen artikkelit. Tampereen yliopisto. TRIM Research Reports 12*, 99–111.
- Rauste-von Wright, M. 1997. Opettaja tienhaarassa. *Konstruktivismia käytännössä*. Jyväskylä: PS-viestintä.
- Van Rossum, E. J. & Taylor, I. P. 1987. The relationship between conceptions of learning and good teaching: A scheme of cognitive development. Artikkelit konferenssissa Annual Meeting of the American Educational Research Association.
- S3M2. 2012. Support Successful Student Mobility with MUMIE. <http://s3m2.eu> [luettu 28.2.2017]
- Sampola, P. 2008. Käyttäjakeskeisen käytettävyyden arviointimenetelmän kehittäminen verkko-opetusympäristöihin soveltuvaksi. *Acta Wasaensia* 192, Tietotekniikka 7.
http://www.uva.fi/materiaali/pdf/isbn_978-952-476-234-2.pdf
- Sangwin, C. 2013. *Computer Aided Assessment of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Sangwin, C. & Köcher, N. 2016. Automation of mathematics examinations. *Computers & Education* 94, 215–227. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compedu.2015.11.014>
- Sangwin, C. J. & Ramsden, P. 2007. Linear syntax for communicating elementary mathematics. *Journal of Symbolic Computation* 42 (9), 920–934.
- Seiler, R., Grudzinski, M., Daalderop, F., Daudt, J., Hanke, M., Kurt, N., Rasila, A. & Tiitu, H. 2014. Bridging Math-Gaps with the Learning Environment MUMIE. Teoksessa EADTU 2014 – Open and Flexible Higher Education Conference. *New Technologies and the Future of Teaching and Learning*, 367–382.
- Shneiderman, B. & Plaisant, C. 2010. *Designing the User Interface. Strategies for Effective Human-Computer Interaction*. 5th Edition. Boston: Pearson.
- Skemp, R. R. 1979. *Intelligence, Learning and Action. A Foundation for Theory and Practice in Education*. New York: John Wiley & Sons.
- Skemp, R. R. 1987. *The Psychology of Learning Mathematics. Expanded American Edition*. New York: Routledge.

- Smith, S. L. & Mosier, J. N. 1986. Guidelines for Designing User Interface Software. Report ESD-TR-86-278. Bedford: MITRE Corporation. <http://hcibib.org/sam/>
- Squires, D. & Preece, J. 1999. Predicting quality in educational software: Evaluating for learning, usability and the synergy between them. *Interacting with Computers* 11 (5), 467–483.
- Stack. 2013. System for Teaching and Assessment using a Computer Algebra Kernel. <http://stack.bham.ac.uk> [luettu 28.2.2013]
- Suppes, P. 1971. Computer-assisted instruction at Stanford. Stanford University. Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences. Technical Report no. 174. http://suppes-corpus.stanford.edu/techreports/IMSSS_174.pdf
- Säljö, R. 1979. Learning in the learner's perspective: I. Some common-sense conceptions. University of Gothenburg. Institute of Education Report 76.
- Tsamir, P. 2007. Should more than one theoretical approach be used for analyzing students' errors? The case of areas, volumes and integration. *For the Learning of Mathematics* 27 (2), 28–33.
- Tynjälä, P. 2002. Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Tammi.
- Vaahtoranta, A. 2014. Matematiikka-ahdistus: syitä, seurauksia ja selviytymiskeinoja. Helsingin yliopisto. Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta. Matematiikan aineenopettajan koulutuksen pro gradu -tutkielma. <http://hdl.handle.net/10138/45445>
- Yrjönsuuri, R. 1996. Lapsi matkalla matematiikan maailmaan. *Lastentarha* 59 (2), 20–21.
- Yrjönsuuri, Y. 1991. Opetus intentionaalisenä toimintana. *Kasvatus: Suomen kasvatustieteellinen aikakauskirja* 22 (5–6), 428–432.