

TEKNILLINEN KORKEAKOULU
Sähkö- ja tietoliikennetekniikan osasto

Henrik Mikael Kettunen

Pienen puolipallon sähköinen vaste

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi
diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 15.11.2006

Työn valvoja

Akatemiaprofessori Ari Sihvola

Työn ohjaaja

TkT Henrik Wallén

Tekijä:	Henrik Kettunen	
Työn nimi:	Pienen puolipallon sähköinen vaste	
Päivämäärä:	15.11.2006	Sivumäärä: 98
Osasto:	Sähkö- ja tietoliikennetekniikan osasto	
Professuuri:	Sähkömagnetiikka	
Työn valvoja:	Akatemiaprofessori Ari Sihvola	
Työn ohjaaja:	TkT Henrik Wallén	
Tiivistelmäteksti:	<p>Työn tarkoituksena on selvittää homogeenisen, puolipallon muotoisen kappaleen sähköstaattinen vaste. Vasteen voimakkuutta voidaan kuvata laskemalla puolipallon polarisoituvuus. Polarisoituvuuden laskenta jaetaan kahteen erikoistapaukseen: aksiaaliseen ja transversaaliseen. Polarisoituvuutta ei pystytä selvittämään täysin analyttisesti, vaan joudutaan muodostamaan ja ratkaisemaan suuri matriisiyhtälö. Polarisoituvuudet esitetään puolipallon suhteellisen permittiivisyyden funktiona. Positiivisilla permittiivisyyksillä saadaan tarkkoja tuloksia, jotka voidaan varmentaa laskemalla polarisoituvuus myös numeerisella valmisohjelmistolla.</p> <p>Polarisoituvuus lasketaan myös negatiivisilla permittiivisyyksillä, jolloin täytyy olettaa taajuus korkeaksi ja puolipallon mitat aallonpituuteen nähden pieniksi, jotta sähköstaattinen tarkastelu edelleen pätee. Pienillä negatiivisilla permittiivisyyksillä puolipallon vaste on singulaarinen, eli havaitaan useita niin sanottuja staattisia resonansseja. Vastaavilla permittiivisyyden arvoilla tuloksia ei saada suppenemaan. Analyttisesti voidaan osoittaa, että singulaarisuudet suhteellisen permittiivisyyden arvoilla $-3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$ aiheutuvat puolipallon terävistä nurkista.</p> <p>Ottamalla huomioon materiaalin kausaalisuus ja häviöt, singulaarisuudet katoavat, ja ratkaisu saadaan suppenemaan.</p> <p>Työ on luonteeltaan akateemista perustutkimusta, joka selvittää yhteyttä kappaleen geometrian, materiaalin ja sen sähköisten ominaisuuksien välillä.</p>	
Avainsanat:	polarisoituvuus, puolipallo, negatiivinen permittiivisyys, staattiset resonanssit	

Author:	Henrik Kettunen
Name of the Thesis:	Electric Response of a Small Hemisphere
Date:	November 15, 2006
	Number of pages: 98
Department:	Department of Electrical and Communications Engineering
Professorship:	Electromagnetics
Supervisor:	Academy Professor Ari Sihvola
Instructor:	Henrik Wallén, Dr.Sc.(Tech)
Abstract:	<p>This thesis examines the electrostatic response of a homogeneous hemispherical object by computing its polarizability. Two special cases are investigated: one axial, the other transversal. Polarizability cannot be calculated purely analytically; hence a large matrix equation must be constructed and solved. The polarizability of a hemisphere is presented as a function of relative permittivity. With positive values for permittivity, the results are quite accurate and they are verified by computing the polarizability numerically.</p> <p>The thesis also considers negative values for permittivity. To obtain negative permittivities, the presumed frequency must be very high and the dimensions of the object very small in order for the static approach to be feasible. With small negative permittivities, the polarizability of the hemisphere is found to have several singularities, also known as static resonances, and the solution does not converge. It can be shown analytically that the resonances between relative permittivity values $-3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$ are due to the sharp corners of the hemisphere.</p> <p>By taking the causality and the losses of the material into consideration, the singularities vanish and the solution converges.</p> <p>This master's thesis is based on basic academic research observing the connection between the geometry, material and electrical characteristics of an object.</p>
Keywords:	polarizability, hemisphere, negative permittivity, static resonances

Alkusanat

Tammikuussa 2006 olivat opintoni siinä vaiheessa, että oli aika ryhtyä diplomityön tekoon. Diplomityötäni pääsin tekemään akatemiaprofessori Ari Sihvolan valvonnan alaisuudessa Teknillisen korkeakoulun Sähkömagnetiikan laboratorioon, jossa tähän mennessä olin ollut kesätöissä kolmasti, sekä toiminut kenttäteorian kurssien tuntiopettajana lukukausien aikana.

Alun perin diplomityöni aiheen piti liittyä yleisemmin pallogeometrioihin sisältäen sekä statiikkaa, että dynamiikkaa. Pian kuitenkin huomattiin, että jo pelkästään puolipallossa ja statiikassa olikin aivan riittävästi työtä, ja pohdittavaa jäi vielä tulevaisuuttakin ajatellen.

Suurimmat kiitokset työni edistymisestä ja, näin marraskuun koittaessa, valmistumisesta kuuluvat tietysti valvojalleni, professori Ari Sihvolalle, sekä ohjaajalleni Henrik ”vanhempi” Wallénille. Arin kannustava asenne jaksoi pitää motivaatiota yllä tehokkaasti, vaikkei työ aina tuntunutkaan edistyvän. Suuri osa työssäni sovelletuista ideoista taas ovat peräisin Henrikiltä.

Ehkä paljolti tietämättään minua on auttanut myös Tommi Dufva, jonka käsialaa Legendren funktioiden integraalien analyttiset kaavat alunperin ovat. Tommi myös toi tietooni Josef Meixnerin artikkelin terävien kiilojen aiheuttamista singulaarisuuksista.

Kiitokset ansaitsee tietysti myös koko Sähkömagnetiikan laboratorion henkilökunta. Korvaamattoman tärkeitä vinkkejä muun muassa tietokoneohjelmien käytössä olen vuosien varrella saanut erityisesti Sami Ilvoselta ja Jukka Venermolta. Jari Hänninen on auttanut ATK-ongelmissa, ja pitänyt tietokoneeni päivitettyinä. Muutekin laboratorion kannustavassa ilmapiirissä, diplomityöni akateemisesta luonteesta huolimatta, olen saanut kokea tekeväni työtä, jolla on tarkoitus.

Lopuksi aivan erityiset kiitokset lähestulkoon kaikesta mahdollisesta haluan lausua vanhemmilleni Juhalle ja Raijalle, sekä tietysti vaimolleni Leenalle.

Espoossa 15.11.2006

Henrik Kettunen

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Polarisaatio ja polarisoituvuus	3
3	Homogeeninen pallo staattisessa sähkökentässä	5
3.1	Potentiaalifunktion sarjakehitelmä pallokoordinaatistossa	6
3.2	Homogeenisen pallon polarisoituvuus	8
4	Kaksoispuolipallo staattisessa sähkökentässä	11
4.1	Aksiaalisen sähkökentän tapaus	11
4.2	Transversaalisien sähkökentän tapaus	18
4.3	Legendren funktioiden integraaleista	23
4.4	Dielektrisen kaksoispuolipallon polarisoituvuus	28
4.4.1	Aksiaalinen polarisoituvuus	28
4.4.2	Transversaalinen polarisoituvuus	29
5	Vertailutulosten laskenta valmisohjelmalla	33
5.1	Aksiaalisen sähkökentän tapaus	33
5.2	Transversaalisien sähkökentän tapaus	35
6	Puolipallon polarisoituvuus	40
6.1	Dielektrinen puolipallo	40
6.1.1	Aksiaalinen polarisoituvuus	40
6.1.2	Transversaalinen polarisoituvuus	41
6.2	Vertailu homogeeniseen palloon	44
6.3	Ideaalijohdepallon polarisoituvuus	46
6.3.1	Aksiaalinen polarisoituvuus	47
6.3.2	Transversaalinen polarisoituvuus	48
6.4	Magneettijohdepuolipallon polarisoituvuus	49
6.5	Approksimaatiokaava puolipallon polarisoituvuudelle	49
6.5.1	Aksiaalinen polarisoituvuus	50
6.5.2	Transversaalinen polarisoituvuus	52
7	Negatiivinen permittiivisyys	54
7.1	Negatiivisen permittiivisyyden edellytykset	54
7.2	Potentiaalisen singulaarisuus ja staattiset resonanssit	56
7.2.1	Suorakulmisen kiilan aiheuttama singulaarisuus	60
7.2.2	Tasaisen pinnan aiheuttama singularisuus	65
7.3	Vertailu ellipsoidiin	67
7.4	Vastakkaismerkkiset permittiivisyydet	70
7.5	Potentiaalijakaumat	72
7.6	Puolipallon kulmien pyöristäminen	78

7.7	Singulaarisuuksien määrittäminen ominisarvoyhtälöstä	80
7.7.1	Aksiaalinen tilanne	80
7.7.2	Transversaalinen tilanne	82
7.8	Häviöt	86
8	Yhteenveto	94

Symbolit ja lyhenteet

\mathbf{a}, \mathbf{A}	vektori
$\bar{\bar{a}}$	dyadi
A	matriisi
a	pallon säde
a_x, a_y, a_z	ellipsoidin puoliakselit
\mathbf{D}	sähkövuontiheysvektori
\mathbf{E}	sähkökenttävektori
$\Im\{x\}$	luvun x imaginääriosa
j	imaginääriyksikkö
\mathbf{n}	pinnan normaalivektori
N_t	transversaalin depolarisaatiokerroin
N_z	aksiaalinen depolarisaatiokerroin
\mathbf{p}	dipolimomenttivektori
\mathbf{P}	keskimääräinen polarisaatio, dipolimomenttitiheysvektori
$P_n(x)$	n . asteen Legendren polynomi
$P_n^m(x)$	n . asteen ja m . kertaluvun Legendren liittofunktio
$\Re\{x\}$	luvun x reaaliosa
V	tilavuus
α	polarisoituvuus
α_n	normalisoitu polarisoituvuus
α_t	transversaalin polarisoituvuus
α_z	aksiaalinen polarisoituvuus
$\bar{\bar{\alpha}}$	polarisoituvuusdyadi
$\Gamma(x)$	gammafunktio
$\delta_{n,m}$	Kroneckerin deltafunktio
ϵ	sähköinen permittiivisyys
ϵ_0	tyhjiön permittiivisyys
ϵ_r	suhteellinen permittiivisyys
ϵ_r'	suhteellisen permittiivisyyden reaaliosa
ϵ_r''	suhteellisen permittiivisyyden imaginääriosa
λ	matriisin ominaisarvo
μ	magneettinen permeabilisuus
μ_0	tyhjiön permeabilisuus
μ_r	suhteellinen permeabilisuus
ν	törmäystaajuus
ϕ	potentiaali
χ_e	sähköinen susceptiivisuus
ω	kulmataajuus
ω_p	plasmataajuus

(x, y, z)	kartesisen koordinaatiston paikkakoordinaatit
(ρ, φ, z)	sylinterikoordinaatiston paikkakoordinaatit
(r, θ, φ)	pallokoordinaatiston paikkakoordinaatit
$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$	kartesisen koordinaatiston yksikkövektorit
$(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\varphi, \mathbf{u}_z)$	sylinterikoordinaatiston yksikkövektorit
$(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi)$	pallokoordinaatiston yksikkövektorit
FDTD	<i>Finite Difference Time Domain</i> , aika-alueen differenssimenetelmä
FEM	<i>Finite Element Method</i> , elementtimenetelmä
PEC	<i>Perfect Electric Conductor</i> , ideaalijohde
PMC	<i>Perfect Magnetic Conductor</i> , magneettijohde

1 Johdanto

Tämän diplomityön tarkoituksena on selvittää homogeenisen puolipallon muotoisen kappaleen staattisessa sähkökentässä synnyttämä vaste. Sähköstatiikassa, eli tilanteessa, jossa kentät eivät muutu ajan funktiona, kappaleen vasteen suuruutta voidaan kuvata yhdellä suurella määrittämällä sen *polarisoituvuus*. Tällöin kappaletta approksimoidaan dipolilla, eikä etäisyyden funktiona nopeasti vaimenevia korkeamman asteen kenttäkomponentteja oteta huomioon. Kappaleista homogeenisen pallon sekä ellipsoidin polarisoituvuus voidaan ratkaista analyttisesti, mutta mielivaltaisen muotoisen kappaleen polarisoituvuus joudutaan sen sijaan laskemaan jollakin numeerisella menetelmällä tai valmisohjelmistolla. Teknillisen korkeakoulun Sähkömagneettikan laboratoriossa on aiemmin laskettu useiden kappaleiden ja rakenteiden, kuten esimerkiksi sylinterin [1], säännöllisten monitahokkaiden, eli platonisten kappaleiden [2], sekä kaksoispallon [3, 4], polarisoituvuuksia. Tässä työssä on tarkoitus lähestyä puolipallon tapausta mahdollisimman pitkälle analyttisin keinoin. Saatuja tuloksia vertaillaan elementtimenetelmää hyödyntävällä valmisohjelmalla laskettuihin tuloksiin.

Koska puolipallo ei ole pallosymmetrinen kappale, riippuu sen vaste ulkoisen sähkökentän suunnasta. Tässä työssä jaetaan tilanne kahteen ortogonaaliseen tapaukseen, eli lasketaan erikseen puolipallon *aksiaalista* ja *transversaalista* polarisoituvuutta.

Staattisessa tilanteessa sähkö- ja magneettikentän välillä ei ole kytkentää. Tällöin puolipallon mallintamiseen riittää yksi materiaali parametri: sähköinen *permittiivisyys* $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, missä ϵ_0 on tyhjiön permittiivisyys ja ϵ_r on materiaalin suhteellinen permittiivisyys. Todellisten, luonnossa esiintyvien materiaalien suhteellinen permittiivisyys on staattisessa tilanteessa aina $\epsilon_r \geq 1$.

Materiaalien sähkömagneettisten ominaisuuksien mallinnus on viime vuosina ollut suuren mielenkiinnon kohteena. Erytystä huomiota ovat saaneet keino-tekkoiset, niin sanonut *metamateriaalit*, joiden materiaali parametrejä voidaan muokata halutusti ja saada ne jopa negatiivisiksi. Ensimmäisenä idean negatiivisten materiaali parametrien soveltamisesta esitti Veselago [5] jo 60-luvulla. Yksi kuuluisimmista metamateriaalien sovellusideoista lienee täydellinen linssi [6]. Tämän valossa ollaan kiinnostuneita puolipallon vasteesta myös negatiivisilla permittiivisyyden arvoilla. Esimerkiksi metallien tapauksessa permittiivisyys voidaan saada negatiiviseksi erittäin korkeilla taajuuksilla, jotka vastaavat näkyvän valon ja UV-alueen aallonpituuksia. Jotta statiikan avulla johdettu ratkaisumalli pätsi, on kappaleen mitat tällöin oletettava aallonpituutta pienemmiksi.

Idealisoidussa tapauksessa, jossa kappaleen permittiivisyys on negatiivinen ja reaalinen, kappaleen vaste saattaa joillain permittiivisyyden arvoilla olla singulaarinen, eli saadaan aikaiseksi niin kutsuttuja *staattisia resonansseja*. Näitä haetaan myös puolipallon tapauksessa. Tarkastellaan myös analyyttisesti puolipallon terävien nurkkien ja tasaisen pohjan vaikutusta sähköiseen vasteeseen negatiivisilla permittiivisyyden arvoilla.

Diplomityö on luonteeltaan akateemista perustutkimusta, joka pyrkii selvittämään kappaleen sähköisten ominaisuuksien riippuvuutta sen materiaalista ja geometriasta. Vastaisuudessa tuloksista voi olla hyötyä esimerkiksi suunniteltaessa uusia sähkömagneettisia komposiittimateriaaleja. Aivan suoraa käytännön sovellutusta tai tilausta työllä ei siis ole.

2 Polarisaatio ja polarisoituvuus

Varaamaton dielektrinen kappale on sähköisesti neutraali, sillä sen molekyylien sisältämät positiiviset ja negatiiviset varaukset kumoavat toisensa. Tällaisessa, sähköstatiikan kannalta ideaalisessa, eristekappaleessa varaustenkuljettajien sanotaan olevan sidottuja, toisin kuin johteissa, joissa varaustenkuljettajan pääsevät liikkumaan vapaasti. Joutuessaan ulkoiseen sähkökenttään dielektrisen kappaleen varaukset kokevat voimavaikutuksen, joka pyrkii siirtämään eri merkkisiä varauksia eri suuntiin, minkä seurauksena kappaleen sisällä syntyy dipolimomentteja, jotka taas synnyttävät ympärilleen sähkökentän, joka näkyy vääristymänä alkuperäisessä sähkökentässä kappaleen ympäristössä. Ilmiötä kutsutaan *polarisaatioksi* [7, 8, 9, 10].

Dipolimomenttien syntymekanismeja eli polarisaatiolajeja on erilaisia [7, 8], mutta sähkömagnetiikan kannalta on käytännöllisempää tutkia ilmiötä efektiivisesti, eli hyvinkin makroskooppisesti, eikä perehtyä siihen, mitä kappaleessa molekyyllitasolla tapahtuu. Polarisaation voimakkuutta voidaan kuvata *dipolitiheysvektorilla* $\mathbf{P}(\mathbf{r})$, joka kertoo dipolimomenttien tiheyden kussakin pisteessä \mathbf{r} . Dipolitiheyden voimakkuutta kappaleessa vaikuttavaan sähkökenttään nähden kuvaa yksikötön kerroin, materiaali parametri sähköinen *suskeptiivisuus* χ_e , siten, että

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}_i. \quad (2.1)$$

Huomataan, että dipolitiheyden \mathbf{P} yksikkö, Asm^{-2} , on sama kuin *sähkövuontiheyden* $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$. Dielektrisessä aineessa sähkövuontiheys onkin muotoa

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_i + \mathbf{P} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E}_i, \quad (2.2)$$

jolloin materiaalin suhteellinen permittiivisyys voidaan lausua muodossa

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e. \quad (2.3)$$

Polarisaation seurauksena kappale saattaa synnyttää myös dipoleja korkeampiasteisia kenttäkomponentteja, eli niin sanottuja *multipoleja*. Nämä komponentit kuitenkin vaimenevat nopeasti etäisyyden funktiona kappaleesta pois päin siirryttäessä. Kauempaa tarkasteltuna polarisoitunut kappale voidaankin ajatella korvattavan dipolilla, jonka *dipolimomentti* \mathbf{p} saadaan integroimalla kappaleen dipolitiheyttä tämän tilavuuden yli

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV. \quad (2.4)$$

Sijoittamalla tähän dipolitiheys kaavasta (2.1) ja lausumalla susceptiivisuus permittiivisyyden avulla kaavan (2.3) mukaisesti saadaan

$$\mathbf{p} = \int_V (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}_i dV. \quad (2.5)$$

Hyvä makroskooppinen mitta kappaleen polarisoituvuudelle on sen *polarisoituvuus* α , joka on määritelty polarisaatiosta syntyneen dipolimomentin ja alkuperäisen, polarisaation aiheuttaneen, sähkökentän suhteena siten, että

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_e. \quad (2.6)$$

Mielivaltaisen muotoisen tai anisotrooppisen kappaleen tapauksessa polarisoituvuus riippuu ulkoisen herätekentän suunnasta, jolloin polarisoituvuus joudutaan esittämään matriisina tai *dyadina*. Yleisesti pätee

$$\mathbf{p} = \overline{\overline{\alpha}} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.7)$$

Polarisoituvuusdyadin $\overline{\overline{\alpha}}$ komponentit voidaan kuitenkin ratkaista erikseen erisuuntaisilla herätekentillä.

Otetaan esimerkiksi a -säteisen homogeenisen pallon polarisoituvuus, joka on pallosymmetrian vuoksi pelkistyy skaalariseksi luvuksi. Pallon permittiivisyys ja alkuperäinen, staattinen vakiokenttä, ovat vakioita tilavuusintegroinnin suhteen, joten kaavasta (2.5) pallolle saadaan

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \mathbf{E}_i. \quad (2.8)$$

Pallon sisäkentäksi voidaan laskea [7]

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_e, \quad (2.9)$$

jolloin

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi a^3 (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_e. \quad (2.10)$$

Vertaamalla lausekkeita (2.6) ja (2.10) pallon polarisoituvuudeksi saadaan

$$\alpha = 3V \epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}, \quad (2.11)$$

missä $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ on pallon tilavuus.

3 Homogeeninen pallo staattisessa sähkökentässä

Tutkitaan homogeenisen pallon vastetta staattiseen sähkökenttään vielä tarkemmin ja analyttisemmin hakemalla yhtälö sähköstaattiselle *potentiaalifunktiolle* lähtien liikkeelle Maxwellin yhtälöistä. Sähköstaatikassa yhtälöt ovat [8]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.2)$$

sekä väliaineiyhtälö

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

Faradayn lain, (3.2), perusteella tiedetään sähkökenttä pyörteettömäksi, jolloin se voidaan lausua sähköstaattisen potentiaalin avulla muodossa

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (3.4)$$

Sähkövuontiheydelle saadaan väliaineiyhtälön (3.3) avulla

$$\mathbf{D} = -\epsilon \nabla\phi, \quad (3.5)$$

jolloin *Gaussin laista*, (3.1), saadaan

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (-\epsilon \nabla\phi) = \rho, \quad (3.6)$$

missä $\rho = 0$, sillä ollaan lähteettömässä alueessa. Tällöin

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla\phi) = 0. \quad (3.7)$$

Kun oletetaan kappale homogeeniseksi, eli permittivisyys ϵ vakioksi, saadaan potentiaalille *Laplacen yhtälö*

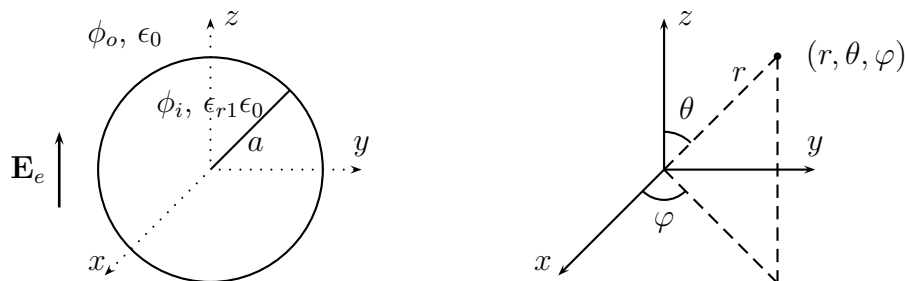
$$\nabla^2\phi = 0. \quad (3.8)$$

Vaikuttakoon tyhjiössä koko avaruuden täyttävä staattinen vakiosähkökenttä. Tuodaan koordinaatiston origoon a -säteinen, homogeeninen dielektrinen pallo, minkä seurauksena avaruus on jaettava kahteen osaan: pallon sisä- ja ulkopuoliseen. Potentiaalifunktio tulee ratkaistavaksi sekä pallon sisällä, että ulkopuolella. Toisin sanoen on ratkaistava yhtälöt

$$\nabla^2\phi_i = 0, \quad r \leq a \quad (3.9)$$

$$\nabla^2\phi_e = 0, \quad r \geq a. \quad (3.10)$$

Rajapintaehtoina ovat potentiaalin ja sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuus pallon pinnalla. Lisäksi vaaditaan potentiaalifunktio äärelliseksi origossa sekä äärettömyydessä.



Kuva 3.1: Homogeeninen pallo sekä pallokoordinaatiston koordinaattien (r, θ, φ) määrittely

3.1 Potentiaalifunktion sarjakehitelmä pallokoordinaatistossa

Tarvitaan ratkaisu sähköstaattiselle potentiaalifunktiolle pallokoordinaatistossa. Ratkaisu on johdettu useissakin sähkömagneettisen teorian perusoppaissa [10, 9]. Staattisen potentiaalın tulee toteuttaa Laplacen yhtälö, $\nabla^2\phi = 0$. Pallokoordinaatistossa Laplacen yhtälö on muotoa

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3.11)$$

Pallokoordinaatiston Laplacen yhtälö on separoituva, joten ratkaisua voidaan hakea muodossa

$$\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)Q(\varphi). \quad (3.12)$$

Sijoittamalla ratkaisuyrite (3.12) yhtälöön (3.11) saadaan kolme erillistä, vain yhdestä koordinaatista riippuvaa differentiaaliyhtälöä:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + m^2 = 0, \quad (3.13)$$

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} (rR) - n(n+1)rR = 0 \quad (3.14)$$

ja

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0. \quad (3.15)$$

Yhtälön (3.13) ratkaisuksi käy *eksponenttifunktio*

$$Q(\varphi) = e^{\pm im\varphi}, \quad (3.16)$$

ja reaalinen ratkaisu saadaan *sini- ja kosinifunktioiden* avulla muodossa

$$Q(\varphi) = C_m \cos(m\varphi) + D_m \sin(m\varphi). \quad (3.17)$$

Yhtälön (3.14) ratkaisut ovat *potenssimuotoisia*

$$R(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}. \quad (3.18)$$

Tekemällä yhtälöön (3.15) sijoitus $\xi = \cos \theta$, eli $\sin \theta = 1 - \xi^2$, saadaan

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] = 0. \quad (3.19)$$

Yhtälö (3.19) tunnetaan *Legendren yhtälönä*, ja sen ratkaisut ovat *Legendren liittofunktioita* [11]

$$\Theta(\theta) = P_n^m(\xi) = P_n^m(\cos \theta), \quad (3.20)$$

jotka saadaan kaavasta

$$P_n^m(\xi) = (-1)^m (1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\xi^m} P_n(\xi), \quad \begin{cases} n = 0, 1, 2, \dots \\ m = 0, 1, 2, \dots, n \\ -1 \leq \xi \leq 1 \end{cases}, \quad (3.21)$$

missä $P_n(\xi)$ ovat *Legendren polynomeja*, jotka voidaan määrittellä rekursiivisesti seuraavasti:

$$\begin{cases} P_0(\xi) = 1 \\ P_1(\xi) = \xi \\ P_{n+1}(\xi) = \frac{1}{n+1} [(2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi)], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.22)$$

Liittofunktiot negatiivisilla kertaluvuilla saadaan kaavasta

$$P_n^{-m}(\xi) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\xi). \quad (3.23)$$

Potentiaalifunktion ratkaisut ovat siis muotoa

$$\phi(r, \theta, \varphi) = (Ar^n + Br^{-(n+1)}) P_n^m(\cos \theta) [C_m \cos(m\varphi) + D_m \sin(m\varphi)]. \quad (3.24)$$

Ratkaisuksi kelpaavat myös kaikki lineaarikombinaatiot mahdollisilla $n:n$ ja $m:n$ arvoilla, joten potentiaali voidaan antaa sarjamuodossa

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-(n+1)}) P_n^m(\xi) [C_m \cos(m\varphi) + D_m \sin(m\varphi)], \quad (3.25)$$

missä $\xi = \cos \theta$. Kertoimet A_{nm} , B_{nm} , C_m ja D_m on ratkaistava tapauskohtaisesti rajapintaehtojen avulla.

3.2 Homogeenisen pallon polarisoituvuus

Tutkitaan esimerkinomaisesti tyhjiössä sijaitsevan, a -säteisen, homogeenisen dielektrisen pallon vastetta staattiseen sähkökenttään. Esimerkki löytyy helposti myös kirjallisuudesta [9]. Pallosymmetrian vuoksi ulkoisen kentän suunnalla ei ole merkitystä, joten valitaan ulkoinen kenttä z -akselin suuntaiseksi, eli $\mathbf{E}_e = E_e \mathbf{u}_z$. Tällöin kenttä on z -akselin suhteen pyörähdyssymmetrinen, ja ratkaisu on φ -kulmasta riippumaton. Tällöin voidaan valita $m = 0$. Ulkoisen kentän aiheuttavan potentiaalin on oltava muotoa

$$\phi_e = -E_e z = -E_e r \cos \theta = -E_e r P_1(\xi), \quad (3.26)$$

sillä tällöin $-\nabla \phi_e = E_e \mathbf{u}_z$.

Kirjoitetaan kehitelmät potentiaalille pallon sisä- ja ulkopuolisessa alueessa. On kuitenkin huomioitava origon ja äärettömyyden asettamat ehdot ratkaisun fysikaalisuudelle. Pallon sisällä $r^{-(n+1)}$ -riippuvuus on epäfysikaalinen, sillä se johtaa singulaarisuuteen origossa. Vastaavasti ulkoalueessa r^n -riippuvuus on mahdoton, sillä pallon vasteen on oltava paikallinen ja äärellinen. Tämä huomioon ottaen potentiaalille voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \phi_i(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-(n+1)}) P_n(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^n P_n(\xi), \quad r \leq a. \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \phi_o(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\xi) + \phi_e \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\xi) - E_e r P_1(\xi), \quad r \geq a. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Legendren liittofunktiot toteuttavat *ortogonaalisuusehdon* [11]

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = \delta_{n'n} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (3.29)$$

missä $\delta_{n'n}$ on *Kroneckerin deltafunktio*

$$\delta_{n'n} = \begin{cases} 1, & n' = n \\ 0, & n' \neq n. \end{cases} \quad (3.30)$$

Ehdon (3.29) perusteella nähdään, että koska herätteenä toimiva ulkoinen potentiaali ϕ_e sisältää ainoastaan $P_1(\xi)$ -riippuvuuden, ei pallon aiheuttama vastekaani voi sisältää muunasteisia Legendren polynomeja. Nähdään, että homogeenisen pallon aiheuttama häiriökenttä vastaa tällöin muodoltaan sähköisen

dipolin aiheuttamaa kentää. Potentiaalin lausekkeet (3.27) ja (3.28) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\phi_i(\mathbf{r}) = CrP_1(\xi) = Cr \cos \theta \quad (3.31)$$

$$\phi_o(\mathbf{r}) = \left(\frac{B}{r^2} - E_e r \right) P_1(\xi) = \left(\frac{B}{r^2} - E_e r \right) \cos \theta. \quad (3.32)$$

Vaativalla potentiaali jatkuvaksi rajapinnalla $r = a$ saadaan

$$C = \frac{B}{a^3} - E_e. \quad (3.33)$$

Toinen yhtälö saadaan sähkövuontiheyden, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, normaalikomponentin jatkuvuusehdosta. Kyseiset sisä- ja ulkokentän komponentit ovat

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_i = -\epsilon \mathbf{u}_r \cdot \nabla \phi_i = -\epsilon C \cos \theta \quad (3.34)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_o = -\epsilon_0 \mathbf{u}_r \cdot \nabla \phi_o = \epsilon_0 \left(\frac{2B}{r^3} + E_e \right) \cos \theta. \quad (3.35)$$

Rajapinnalla $r = a$ saadaan

$$C = -\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \left(2\frac{B}{a^3} + E_e \right). \quad (3.36)$$

Yhdistämällä yhtälöt (3.33) ja (3.36) saadaan

$$B = a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_e. \quad (3.37)$$

Sähköisen dipolin aiheuttama potentiaali on [8]

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.38)$$

Polarisaation aiheuttamalle, \mathbf{u}_z -suuntaiselle dipolille voidaan kirjoittaa

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{B}{r^2} \cos \theta, \quad (3.39)$$

jolloin dipolimomentiksi p saadaan

$$p = 4\pi\epsilon_0 B = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} E_e. \quad (3.40)$$

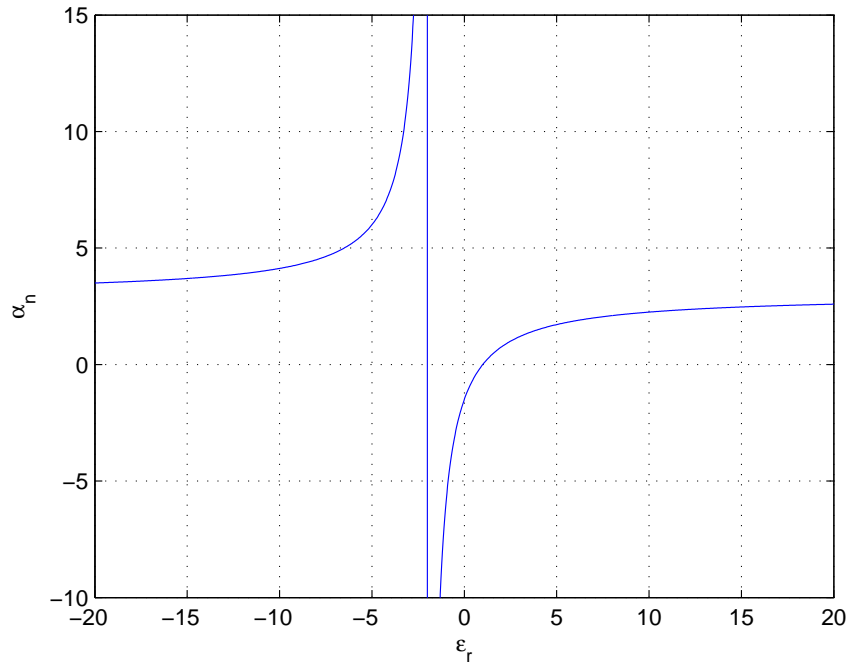
Tällöin polarisoituvuus on muotoa

$$\alpha = \frac{p}{E_e} = 3V\epsilon_0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}, \quad (3.41)$$

missä $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ on pallon tilavuus. Kaava on sama kuin (2.11).

On usein käytännöllisempää antaa polarisoituvuus pelkkänä permittiivisyydellä ja kappaleen tilavuudella normalisoituna, yksiköttömänä numeroarvona. Pallon *normalisoiduksi polarisoituvuudeksi* saadaan

$$\alpha_n = \frac{\alpha}{V\epsilon_0} = 3\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}. \quad (3.42)$$

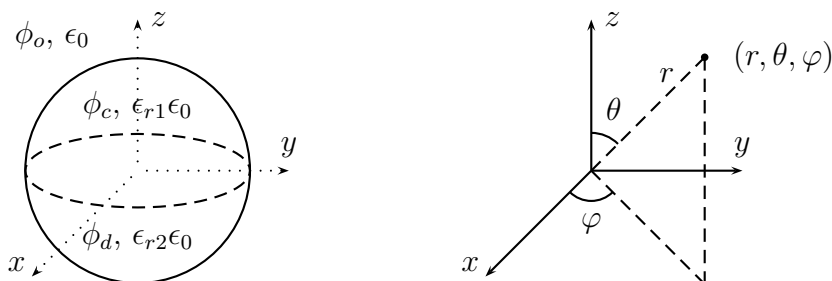


Kuva 3.2: Homogeenisen pallon normalisoitu polarisoituvuus

Kuvassa 3.2 on esitetty homogeenisen pallon normalisoitu polarisoituvuus suhteellisen permittiivisyyden funktiona. Kuvaaajaan on otettu mukaan myös negatiiviset permittiivisyyden arvot, joita käsitellään tarkemmin luvussa 7. Huomataan polarisoituvuuden olevan singulaarinen arvolla $\epsilon_r = -2$.

4 Kaksoispuolipallo staattisessa sähkökentässä

Tutkitaan seuraavaksi paloittain homogeenista tilannetta, jossa pallo koostuu kahdesta yhteenliitetystä puolipallosta, joilla on eri permittiivisyydet. Kutsutaan tällaista rakennetta *kaksoispuolipalloksi*. Huomataan, että tilanne tulee monimutkaisemmaksi: kappaleen vaste ulkoiseen sähkökenttään ei esimerkiksi enää ole kentän suunnasta riippumaton. Lisäksi potentiaalin ratkaiseminen on huomattavasti työläämpää kuin homogeenisen pallon tapauksessa kaksoispuolipallon sisäisen materiaalirajapinnan vuoksi. Vastaavanlaisen rakenteen potentiaalifunktion ratkaisuja on käsitelty artikkeleissa [12, 13, 14].



Kuva 4.1: Kahdesta puolipallosta koostuva kaksoispuolipallo

4.1 Aksiaalisen sähkökentän tapaus

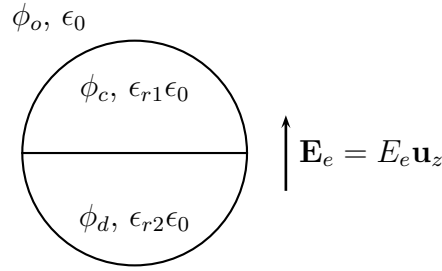
Paloittain homogeeninen kahdesta puoliskosta koottu a -säteinen pallo sijaitsee tyhjiössä, koordinaatiston origossa. Avaruudessa vaikuttaa primaarinen z -suuntainen staattinen sähkökenttä $\mathbf{E}_e = E_e \mathbf{u}_z$, jota vastaava potentiaali on

$$\phi_e(\mathbf{r}) = -E_e z = -E_e r \cos \theta = -E_e r P_1(\cos \theta). \quad (4.1)$$

Haetaan ratkaisua potentiaalifunktiolle pallokoordinaatistossa. Tämä saadaan separoimalla Laplacen yhtälö, $\nabla^2 \phi = 0$. Ratkaisu tässä φ :n suhteen pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa voidaan lausua sarjakehitelmänä [9]

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\xi), \quad (4.2)$$

missä $\xi = \cos \theta$. Kyseessä on siis kehitelmä (3.25) sijoituksella $m = 0$.



Kuva 4.2: Poikkileikkaus kaksoispuolipallosta aksiaalisessa sähkökentässä

Nyt avaruus on jaettava kolmeen osaan: pallon ulkopuoliseen, sekä pallon sisällä yläpuoliseen ja alapuoliseen. Potentiaalit kussakin alueessa ovat

$$\phi_c(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^k P_k(\xi), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad r \leq a \quad (4.3)$$

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^k P_k(\xi), \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad r \leq a \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \phi_o(\mathbf{r}) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\xi) + \phi_e \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\xi) - E_e r P_1(\xi), \quad r > a. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Vastaavat sähkökentät saadaan gradientin avulla, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$:

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = - \sum_{k=0}^{\infty} \left[k C_k r^{k-1} P_k(\xi) \mathbf{u}_r + C_k r^{k-1} \frac{d}{d\theta} P_k(\xi) \mathbf{u}_\theta \right] \quad (4.6)$$

$$\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = - \sum_{k=0}^{\infty} \left[k D_k r^{k-1} P_k(\xi) \mathbf{u}_r + D_k r^{k-1} \frac{d}{d\theta} P_k(\xi) \mathbf{u}_\theta \right] \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(n+1) B_n r^{-(n+2)} P_n(\xi) \mathbf{u}_r + B_n r^{-(n+2)} \frac{d}{d\theta} P_n(\xi) \mathbf{u}_\theta \right] \\ &\quad + E_e (\cos \theta \mathbf{u}_r - \sin \theta \mathbf{u}_\theta). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tuntemattomat kertoimet B_n , C_k ja D_k haetaan rajapintaehtojen avulla artikkelin [14] tavoin. Kaikilla rajapinnoilla vaaditaan potentiaalin, ϕ , sekä sähkövuontiheyden normaalikomponentin, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{n} \cdot \epsilon \mathbf{E}$, jatkuvuus.

Tutkitaan ensin rajapintaa pallon sisällä, $r \leq a$ ja $\theta = \frac{\pi}{2}$, jolloin $\xi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Potentiaalin jatkuvuusehto voidaan kirjoittaa

$$\phi_c \left(r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right) = \phi_d \left(r, \frac{\pi}{2}, \varphi \right),$$

eli saadaan ehto

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k(0). \quad (4.9)$$

Toisaalta sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehto

$$\epsilon_{r1} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_\theta = \epsilon_{r2} \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{u}_\theta,$$

johtaa yhtälöön

$$\epsilon_{r1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{d}{d\theta} P_k(0) = \epsilon_{r2} \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{d}{d\theta} P_k(0). \quad (4.10)$$

Yhtälöt (4.9) ja (4.10) näyttäisivät olevan ristiriidassa keskenään, joten on tarpeen tutkia tarkemmin Legendren polynomien ja näiden derivaattojen käyttäytymistä nollassa. Legendren polynomit saadaan muodostettua rekursiivisesti kaavan (3.22) avulla. Kun $\xi = 0$, saadaan

$$\begin{aligned} P_0(0) &= 1 \\ P_1(0) &= 0 \\ P_k(0) &= -\frac{k-1}{k} P_{k-2}(0). \end{aligned} \quad (4.11)$$

k -asteisen polynomin arvo nollassa on siis verrannollinen $(k-2)$ -asteisen polynomin arvoon. Tällöin, koska $P_1(0) = 0$, on oltava $P_3(0) = 0$, mistä edelleen seuraa, että $P_5(0) = 0$, ja niin edelleen.

Huomataan, että parittomilla k $P_k(0) = 0$, eikä yhtälö (4.9) tällöin sido kertoimia C_k ja D_k . Tällöin yhtälön (4.10) perusteella on oltava $\epsilon_{r1} C_k = \epsilon_{r2} D_k$.

Tutkitaan seuraavaksi polynomien derivaattoja.

$$\frac{d}{d\theta} P_k(\xi) = -\sin \theta \frac{d}{d\xi} P_k(\xi), \quad (4.12)$$

missä $\sin \theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Kaavaa (3.22) derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} P'_0(0) &= 0 \\ P'_1(0) &= 1 \\ P'_k(0) &= \frac{1}{k} [2k P_{k-1}(0) - (k-1) P'_{k-2}(0)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Derivaatan arvo riippuu siis yhtä astetta alemman polynomin arvosta sekä kah- ta astetta alemman polynomin derivaatan arvosta. Tällöin, koska $P_1(0) = 0$, ja $P'_0(0) = 0$, pätee, että $P'_2(0) = 0$, ja koska $P_3(0) = 0$, tästä seuraa, että myös $P'_4(0) = 0$, ja niin edelleen.

Huomataan, että vastaavasti parillisilla k $\frac{d}{d\theta}P_k(0) = 0$, jolloin yhtälö (4.10) on merkityksetön, ja tällöin kerrointen täytyy toteuttaa yhtälön (4.9) ehto $C_k = D_k$.

Kertoimille C_k ja D_k voidaan kirjoittaa

$$C_k = \eta_k D_k, \quad \eta_k = \begin{cases} 1, & k \text{ parillinen} \\ \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}, & k \text{ pariton} \end{cases} \quad (4.14)$$

Lähdetään ensiksi johtamaan ulkoalueen kertoimia B_n , joten tarkoituksena on eliminoida yhtälöistä sisäalueen kertoimet C_k ja D_k .

Tutkitaan rajapintaehtoja ylemmän pallonpuoliskon pinnalla, eli kun $r = a$, ja $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Soveltamalla potentiaalin jatkuvuusehtoa yhtälöihin (4.3) ja (4.5) saadaan

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k a^k P_k(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\xi) - E_e a P_1(\xi). \quad (4.15)$$

Legendren polynomit $P_n(\xi)$ eivät ole ortogonaalisia välillä $0 \leq \xi \leq 1$, joten sarjoja ei voi vertailla suoraan termeittäin. Kerrotaan jokaisella k :n arvolla yhtälö puolittain $P_k(\xi)$:lla, ja tämän jälkeen integroidaan yhtälö puolittain ξ :n suhteen välin $0 \leq \xi \leq 1$ yli. Legendren funktioiden tulojen integrointia käsitellään luvussa 4.3, missä johdetaan integraalille Legendren polynomien tulosta analyyttinen kaava (4.84)

$$U_{n,k} = \int_0^1 P_n(\xi) P_k(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2k+1}, & n = k \\ 0, & n \neq k, \quad n + k \text{ parillinen} \\ f_{n,k}, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (4.16)$$

missä

$$f_{n,k} = \frac{2 \sin(\frac{n\pi}{2}) \cos(\frac{k\pi}{2}) A_{n,k} - \cos(\frac{n\pi}{2}) \sin(\frac{k\pi}{2}) A_{k,n}}{\pi (n(n+1) - k(k+1))}, \quad (4.17)$$

missä

$$A_{n,k} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{k}{2} + 1)}. \quad (4.18)$$

Huomataan, että

$$A_{k,n} = \frac{1}{A_{n,k}}. \quad (4.19)$$

Laskettaessa integraaleja $U_{n,k}$ suurilla n ja k tulee yksittäisen gammafunktion arvo todella suureksi, vaikka $A_{n,k}$:n arvo pysyisikin äärellisenä. Käytettäessä Matlabia, kannattaa (4.18) kirjoittaa muodossa

$$A_{n,k} = e^{\{\ln[\Gamma(\frac{n}{2}+1)] + \ln[\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{1}{2})] - \ln[\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})] - \ln(\Gamma(\frac{k}{2}+1))\}}, \quad (4.20)$$

sillä luonnollinen logaritmi gammafunktioista voidaan laskea omana funktionaan, jolloin pystytään käsittelemään huomattavasti suurempia n :n ja k :n arvoja.

Näin ollen jokaiselle k :n arvolle saadaan

$$C_k = \frac{2k+1}{a^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} U_{n,k} - E_e a U_{1,k} \right). \quad (4.21)$$

Seuraavaksi tarkastellaan \mathbf{D} :n normaalikomponentin jatkuvuutta

$$\epsilon_{r1} \epsilon_0 \mathbf{E}_e \cdot \mathbf{u}_r = \epsilon_0 \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{u}_r.$$

Yhtälöistä (4.6) ja (4.8) saadaan

$$-\epsilon_{r1} \sum_{k=0}^{\infty} k C_k a^{k-1} P_k(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n a^{-(n+2)} P_n(\xi) + E_e P_1(\xi). \quad (4.22)$$

Jälleen, kertomalla puolittain $P_k(\xi)$:lla ja integroimalla ξ :n suhteen välin $0 \leq \xi \leq 1$ yli saadaan jokaiselle k :n arvolle

$$C_k = -\frac{2k+1}{\epsilon_{r1} k a^{k-1}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n a^{-(n+2)} U_{n,k} + E_e U_{1,k} \right]. \quad (4.23)$$

Tämän jälkeen, merkitsemällä yhtälöt (4.21) ja (4.23) yhtäsuuriksi, saadaan kaikille k

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [(n+1) + k \epsilon_{r1}] U_{n,k} = E_e (k \epsilon_{r1} - 1) U_{1,k}. \quad (4.24)$$

Seuraavaksi johdetaan vastaavat yhtälöt alemman pallonpuolikkaan pinnalla, $r = a$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

Potentiaalin jatkuvuudesta, yhtälöistä (4.4) ja (4.5), saadaan

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k a^k P_k(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} P_n(\xi) - E_e a P_1(\xi). \quad (4.25)$$

Yhtälö kerrotaan jälleen puolittain $P_k(\xi)$:lla, mutta integrointirajat ovat nyt $-1 \leq \xi \leq 0$. Integraalit voidaan kuitenkin laskea analyttisesti kaavan (4.16) avulla, kun hyödynnetään yhteyttä (4.97)

$$\int_{-1}^0 P_n(\xi)P_k(\xi)d\xi = (-1)^{n+k} \int_0^1 P_n(\xi)P_k(\xi)d\xi. \quad (4.26)$$

Jokaiselle k saadaan

$$D_k = \frac{2k+1}{a^k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+1)} (-1)^{n+k} U_{n,k} - E_e a (-1)^{1+k} U_{1,k} \right]. \quad (4.27)$$

Soveltamalla \mathbf{D} :n normaalikomponentin jatkuvuutta

$$\epsilon_{r2}\epsilon_0 \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{u}_r = \epsilon_0 \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{u}_r$$

yhtälöihin (4.7) ja (4.8) saadaan

$$-\epsilon_{r2} \sum_{k=0}^{\infty} k D_k a^{k-1} P_k(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n a^{-(n+2)} P_n(\xi) + E_e P_1(\xi). \quad (4.28)$$

Jälleen, kertomalla $P_k(\xi)$:lla, käyttämällä yhtälöä (4.26) ja integroimalla ξ :n suhteen välin $0 \leq \xi \leq 1$ yli, saadaan kaikille k

$$D_k = -\frac{2k+1}{\epsilon_{r2} k a^{k-1}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) B_n a^{-(n+2)} (-1)^{n+k} U_{n,k} + E_e (-1)^{1+k} U_{1,k} \right]. \quad (4.29)$$

Merkitsemällä yhtälöt (4.27) ja (4.29) yhtäsuuriksi saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} (-1)^{n+k} [(n+1) + k\epsilon_{r2}] U_{n,k} = E_e (-1)^{1+k} (k\epsilon_{r2} - 1) U_{1,k}. \quad (4.30)$$

Seuraavaksi on yhdistettävä yhtälöt (4.24) ja (4.30), mutta on muistettava ottaa huomioon ehto (4.14) kertoimien C_k ja D_k välillä. Yhtälö (4.24) on siis ensin kerrottava η_k :lla. Lopulta jokaiselle k saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [\eta_k(n+1) + \eta_k k \epsilon_{r1} + (-1)^{n+k} (n+1) + (-1)^{n+k} k \epsilon_{r2}] U_{n,k} \\ = E_e [\eta_k k \epsilon_{r1} - \eta_k + (-1)^{1+k} k \epsilon_{r2} - (-1)^{1+k}] U_{1,k}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Kyseessä on ääretön lineaarinen yhtälöryhmä (k yhtälöä), jossa jokainen yhtälö

sisältää äärettömän summauksen (n tuntematonta). Ratkaistaan kertoimet B_n ottamalla yhtä paljon, N , yhtälöitä ja tuntemattomia ja muodostamalla $(N \times N)$ -matriisiyhtälö

$$\mathbf{MB} = \mathbf{A},$$

mikä auki kirjoitettuna on muotoa

$$\begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0N} \\ M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N0} & M_{N1} & \dots & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

missä

$$M_{kn} = a^{-(n+2)} [\eta_k(n+1) + \eta_k k \epsilon_{r1} + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k} k \epsilon_{r2}] U_{n,k} \quad (4.33)$$

ja

$$A_k = E_e [\eta_k k \epsilon_{r1} - \eta_k + (-1)^{1+k} k \epsilon_{r2} - (-1)^{1+k}] U_{1,k}. \quad (4.34)$$

Kerrointen B_n ratkaisu edellyttää matriisiyhtälön ratkaisemista, mikä onnistuu numeerisesti Matlabin avulla.

Sitten johdetaan vastaava matriisiyhtälö pallon sisäalueen kertoimille. Palataan yhtälöön (4.15), mutta tällä kertaa pyritään eliminoimaan ulkoalueen kertoimet B_n . Kerrotaan yhtälö puolittain $P_n(\xi)$:lla, ja integroidaan ξ :n suhteen välin $0 \leq \xi \leq 1$ yli. Saadaan kaikille n

$$B_n = \frac{2n+1}{a^{-(n+1)}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k a^k U_{k,n} + E_e a U_{1,n} \right). \quad (4.35)$$

Seuraavaksi kerrotaan yhtälö (4.22) $P_n(\xi)$:lla, ja integroidaan ξ :n suhteen välin $0 \leq \xi \leq 1$ yli. Saadaan kaikille n

$$B_n = -\frac{2n+1}{(n+1)a^{-(n+2)}} \left(\epsilon_{r1} \sum_{k=0}^{\infty} k C_k a^{k-1} U_{k,n} + E_e U_{1,n} \right). \quad (4.36)$$

Merkitsemällä yhtälöt (4.35) ja (4.36) yhtäsuuriksi saadaan kaikille n

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k a^k \left(1 + \frac{k \epsilon_{r1}}{n+1} \right) U_{k,n} = -E_e a \left(\frac{1}{n+1} + 1 \right) U_{1,n}. \quad (4.37)$$

Seuraavaksi tarkastellaan uudelleen rajapintaehtoja alemman pallonpuoliskon

pinnalla. Kerrotaan yhtälö (4.25) puolittain $P_n(\xi)$:lla, integroidaan ξ :n suhteen välin $-1 \leq \xi \leq 0$, ja käytetään integraaleihin ehtoa (4.26). Saadaan kaikille n

$$B_n = \frac{2n+1}{a^{-(n+1)}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} D_k a^k (-1)^{n+k} U_{k,n} + E_e a (-1)^{1+n} U_{1,n} \right]. \quad (4.38)$$

Sitten kerrotaan yhtälö (4.28) puolittain $P_n(\xi)$:lla ja integroidaan kuten edellä. Saadaan jokaiselle n

$$B_n = -\frac{2n+1}{(n+1)a^{-(n+2)}} \left[\epsilon_{r2} \sum_{k=0}^{\infty} k D_k a^{k-1} (-1)^{n+k} U_{k,n} + E_e (-1)^{1+n} U_{1,n} \right]. \quad (4.39)$$

Merkitsemällä yhtälöt (4.38) ja (4.39) yhtäsuuriksi saadaan kaikille n

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k a^k (-1)^{n+k} \left(1 + \frac{k\epsilon_{r2}}{n+1} \right) U_{k,n} = -E_e a (-1)^{1+k} \left(\frac{1}{n+1} + 1 \right) U_{1,n}. \quad (4.40)$$

Lopuksi on jälleen yhdistettävä yhtälöt (4.37) ja (4.40). Sijoitetaan $C_k = \eta_k D_k$, ja saadaan kaikille n

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} D_k a^k \left[\eta_k + \eta_k \frac{k\epsilon_{r1}}{n+1} + (-1)^{n+k} + (-1)^{n+k} \frac{k\epsilon_{r2}}{n+1} \right] U_{k,n} \\ = -E_e a \left[\frac{1}{n+1} + 1 + \frac{(-1)^{1+k}}{n+1} + (-1)^{1+k} \right] U_{1,n}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

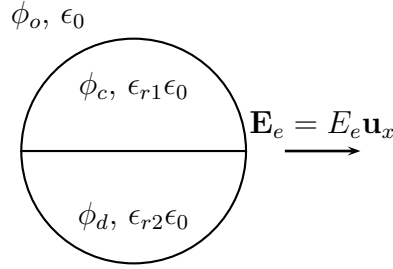
Kertoimet D_k ratkeavat ratkaisemalla $(N \times N)$ -matriisiyhtälö. Kertoimet C_k saadaan yhtälöstä (4.14).

4.2 Transversaalisen sähkökentän tapaus

Transversaalisessa tapauksessa ulkoinen primaarikenttä ei ole pyörähdysymmetrinen z -akselin suhteen. Kaksoispuolipallon geometria tosin säilyy pyörähdysymmetrisenä transversaalista xy -tasosta tarkkailtuna, joten ulkoisen sähkökentän suuntavektoriksi voidaan valita mikä tahansa xy -tasossa oleva vektori. Valitaan $\mathbf{E}_e = E_e \mathbf{u}_x$, jolloin sitä vastaava potentiaali voidaan kirjoittaa

$$\phi_e(\mathbf{r}) = -E_e x = -E_e r \sin \theta \cos \varphi = -E_e r P_1^1(\xi) \cos \varphi. \quad (4.42)$$

Legendren polynomien $P_n(\xi)$ sijaan tarvitaan nyt Legendren liittofunktioita $P_n^m(\xi)$, ja mukana on $\cos \varphi$ -riippuvuus. Geometrian symmetrisyydestä johtuen



Kuva 4.3: Poikkileikkaus kaksoispuolipallosta transversaalissa sähkökentässä

φ -riippuvuus säilyy kaikissa sarjakehitelmän (3.25) termeissä muuttumattomana, joten Legendren liittofunktioida voidaan valita $m = 1$, ja toisaalta jättää pois $\sin \varphi$ -riippuvuus. Sarjojen summaukset alkavat tämän vuoksi nyt indeksistä 1, sillä $m \leq n$, eli funktiota $P_0^1(\xi)$ ei ole olemassa.

Potentiaalit eri alueissa ovat

$$\phi_c(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k r^k P_k^1(\xi) \cos \varphi \quad (4.43)$$

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k r^k P_k^1(\xi) \cos \varphi \quad (4.44)$$

$$\phi_o(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n^1(\xi) \cos \varphi - E_e r P_1^1(\xi) \cos \varphi \quad (4.45)$$

ja näitä vastaavat sähkökentät, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, ovat

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = - \sum_{k=1}^{\infty} & \left[k C_k r^{k-1} P_k^1(\xi) \cos \varphi \mathbf{u}_r \right. \\ & + C_k r^{k-1} \frac{d}{d\theta} P_k^1(\xi) \cos \varphi \mathbf{u}_\theta \\ & \left. - C_k r^{k-1} \frac{1}{\sin \theta} P_k^1(\xi) \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = - \sum_{k=1}^{\infty} & \left[k D_k r^{k-1} P_k^1(\xi) \cos \varphi \mathbf{u}_r \right. \\ & + D_k r^{k-1} \frac{d}{d\theta} P_k^1(\xi) \cos \varphi \mathbf{u}_\theta \\ & \left. - D_k r^{k-1} \frac{1}{\sin \theta} P_k^1(\xi) \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

ja

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[- (n+1) B_n r^{-(n+2)} P_n^1(\xi) \cos \varphi \mathbf{u}_r \right. \\ & + B_n r^{-(n+2)} \frac{d}{d\theta} P_n^1(\xi) \cos \varphi \mathbf{u}_\theta \\ & \left. - B_n r^{-(n+2)} \frac{1}{\sin \theta} P_n^1(\xi) \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi \right] \\ & + E_e (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{u}_\theta - \sin \varphi \mathbf{u}_\varphi). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Tutkitaan jälleen rajapintaehdot pallon sisäisellä rajapinnalla $\theta = \frac{\pi}{2}$, kun $r \leq a$. Soveltamalla potentiaalin jatkuvuutta yhtälöihin (4.43) ja (4.44) saadaan

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k^1(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k P_k^1(0). \quad (4.49)$$

Sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehdosta,

$$\epsilon_{r1} \mathbf{E}_c \cdot \mathbf{u}_\theta = \epsilon_{r2} \mathbf{E}_d \cdot \mathbf{u}_\theta,$$

puolestaan saadaan

$$\epsilon_{r1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{d}{d\theta} P_k^1(0) = \epsilon_{r2} \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{d}{d\theta} P_k^1(0). \quad (4.50)$$

Legendren liittofunktioille pätee rekursiivinen kaava [11]

$$P_{k+1}^m(\xi) = \frac{1}{k-m+1} [(2k+1)\xi P_k^m(\xi) - (k+m)P_{k-1}^m(\xi)], \quad (4.51)$$

mikä arvolla $m = 1$ voidaan kirjoittaa

$$P_{k+1}^1(\xi) = \frac{1}{k} [(2k+1)\xi P_k^1(\xi) - (k+1)P_{k-1}^1(\xi)]. \quad (4.52)$$

Tällöin

$$P_k^1(0) = -\frac{k}{k-1} P_{k-2}^1(0). \quad (4.53)$$

Kaavasta (3.21) saadaan

$$\begin{aligned} P_1^1(0) &= 1 \\ P_2^1(0) &= 0. \end{aligned}$$

Tällöin kaavasta (4.53) nähdään, että $P_4^1(0) = 0$. Tästä seuraa, että myös $P_6^1(0) = 0$, ja niin edelleen, eli parillisilla k $P_k^1(0) = 0$.

Liittofunktioiden derivaatoille pätee

$$\frac{d}{d\theta} P_k^1(\xi) = -\sin \theta \frac{d}{d\xi} P_k^1(\xi),$$

eli

$$\frac{d}{d\theta} P_k^1(0) = -\frac{d}{d\xi} P_k^1(0).$$

Derivoimalla kaavaa (4.52) saadaan

$$P_k^1(0) = \frac{1}{k-1} \left[(2k-1)P_{k-1}^1(0) - kP_{k-2}^1(0) \right]. \quad (4.54)$$

Kaavan (3.21) derivaattoina saadaan

$$\begin{aligned} P_1^1(0) &= 0 \\ P_2^1(0) &= 1. \end{aligned}$$

Koska $P_2^1(0) = 0$ ja $P_1^1(0) = 0$, nähdään kaavasta (4.54), että $P_3^1(0) = 0$. Koska myös $P_4^1(0) = 0$, tästä seuraa, että myös $P_5^1(0) = 0$, ja niin edelleen. Parittomilla k siis $\frac{d}{d\theta} P_k^1(0) = 0$.

Kertoimille C_k ja D_k voidaan kirjoittaa

$$C_k = \eta_k D_k, \quad \eta_k = \begin{cases} 1, & k \text{ pariton} \\ \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}, & k \text{ parillinen} \end{cases}. \quad (4.55)$$

Kertoimia B_n , C_k ja D_k lähdetään hakemaan samalla periaatteella kuin aksiaalisessakin tapauksessa, ja niiden yhtälöt ovatkin muodoltaan samanlaisia. Ainoastaan η_k käyttäytyy päinvastoin kuin aksiaalisessa tapauksessa, ja Legendren polynomien tilalla ovat Legendren liittofunktiot.

Kertoimia B_n laskettaessa päädytään yhtälöihin

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} \left[\eta_k (n+1) + \eta_k k \epsilon_{r1} + (-1)^{n+k} (n+1) + (-1)^{n+k} k \epsilon_{r2} \right] U_{n,k}^1 \\ = E_e \left[\eta_k k \epsilon_{r1} - \eta_k + (-1)^{1+k} k \epsilon_{r2} - (-1)^{1+k} \right] U_{1,k}^1. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Jälleen kertoimet ratkaistaan $(N \times N)$ -matriisiyhtälöstä

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

missä

$$M_{kn} = a^{-(n+2)} [\eta_k(n+1) + \eta_k k \epsilon_{r1} + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k} k \epsilon_{r2}] U_{n,k}^1 \quad (4.58)$$

ja

$$A_k = E_e [\eta_k k \epsilon_{r1} - \eta_k + (-1)^{1+k} k \epsilon_{r2} - (-1)^{1+k}] U_{1,k}^1. \quad (4.59)$$

Kertoimille D_k yhtälöt ovat muotoa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} D_k a^k \left[\eta_k + \eta_k \frac{k \epsilon_{r1}}{n+1} + (-1)^{n+k} + (-1)^{n+k} \frac{k \epsilon_{r2}}{n+1} \right] U_{k,n}^1 \\ = -E_e a \left[\frac{1}{n+1} + 1 + \frac{(-1)^{1+k}}{n+1} + (-1)^{1+k} \right] U_{1,n}^1. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Kertoimet C_k saadaan yhtälöstä (4.55).

Integraalit $U_{n,k}^1$ voidaan laskea kaavan (4.86) avulla analyttisesti seuraavasti

$$U_{n,k}^1 = \int_0^1 P_n^1(\xi) P_k^1(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2n+1}, & n = k \\ 0, & n \neq k, \quad n+k \text{ parillinen} \\ f_{n,k}^1, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (4.61)$$

missä

$$f_{n,k}^1 = \frac{2k(k+1) \sin(\frac{n\pi}{2}) \cos(\frac{k\pi}{2}) A_{n,k} - n(n+1) \cos(\frac{n\pi}{2}) \sin(\frac{k\pi}{2}) A_{k,n}}{\pi [n(n+1) - k(k+1)]}, \quad (4.62)$$

missä $A_{n,k}$ on määritelty yhtälössä (4.18).

Yhtälöitä (4.56) johdettaessa on myös hyödynnetty havaintoa (4.98)

$$\int_{-1}^0 P_n^1(\xi) P_k^1(\xi) d\xi = (-1)^{n+k} \int_0^1 P_n^1(\xi) P_k^1(\xi) d\xi.$$

4.3 Legendren funktioiden integraaleista

Halutaan laskea integraalit

$$U_{n,k} = \int_0^1 P_n(\xi)P_k(\xi)d\xi \quad (4.63)$$

$$L_{n,k} = \int_{-1}^0 P_n(\xi)P_k(\xi)d\xi \quad (4.64)$$

$$U_{n,k}^1 = \int_0^1 P_n^1(\xi)P_k^1(\xi)d\xi \quad (4.65)$$

$$L_{n,k}^1 = \int_{-1}^0 P_n^1(\xi)P_k^1(\xi)d\xi. \quad (4.66)$$

$P_n^m(\xi)$ ovat Legendren liittofunktioita, jotka voidaan lausua Legendren polynomien, $P_n(\xi)$, avulla seuraavasti [11]

$$P_n^m(\xi) = (-1)^m(1 - \xi^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\xi^m} P_n(\xi). \quad (4.67)$$

Tällöin

$$P_n^1(\xi) = -\sqrt{1 - \xi^2} \frac{d}{d\xi} P_n(\xi).$$

Lähdetään muodostamaan integraalia $U_{n,k}^1$, (4.65). Lausumalla liittofunktiot kaavan (4.67) avulla saadaan

$$U_{n,k}^1 = \int_0^1 (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) \frac{d}{d\xi} P_k(\xi) d\xi. \quad (4.68)$$

Tämän jälkeen osittaisintegroinnin avulla saadaan

$$\begin{aligned} U_{n,k}^1 &= \int_0^1 (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) P_k(\xi) \\ &\quad - \int_0^1 \left[-2\xi \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) + (1 - \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} P_n(\xi) \right] P_k(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Sijoitustermistä jää jäljelle vain sijoitus alarajalla. Myös integraalitermiä voidaan sieventää hyödyntämällä Legendren differentiaaliyhtälöä [11]

$$(1 - z^2) \frac{d^2 w(z)}{dz^2} - 2z \frac{dw(z)}{dz} + \left[n(n+1) - \frac{m}{1 - z^2} \right] w(z) = 0, \quad (4.70)$$

jonka ratkaisut $w(z)$ ovat Legendren liittofunktioita $P_n^m(z)$ ja $Q_n^m(z)$.

$P_n(\xi)$:lle pätee

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} P_n(\xi) - 2\xi \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) = -n(n+1)P_n(\xi). \quad (4.71)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (4.69) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} U_{n,k}^1 &= -\frac{d}{d\xi} P_n(0)P_k(0) + n(n+1) \int_0^1 P_n(\xi)P_k(\xi)d\xi \\ &= -\frac{d}{d\xi} P_n(0)P_k(0) + n(n+1)U_{n,k} \end{aligned} \quad (4.72)$$

$P_n(\xi)$:n ja tämän derivaatan arvot nollassa tunnetaan [11]

$$P_n(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (4.73)$$

$$\frac{d}{d\xi} P_n(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}. \quad (4.74)$$

Sijoittamalla nämä yhtälöön (4.72) saadaan

$$U_{n,k}^1 = -\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k} + n(n+1)U_{n,k}, \quad (4.75)$$

missä

$$A_{n,k} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 1) \Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{k}{2} + 1)}. \quad (4.76)$$

Huomataan, että alkuperäisissä integraaleissa (4.63)-(4.66) indeksien n ja k järjestys voidaan vaihtaa. Esimerkiksi

$$U_{n,k}^1 = \int_0^1 P_n^1(\xi)P_k^1(\xi)d\xi = \int_0^1 P_k^1(\xi)P_n^1(\xi)d\xi = U_{k,n}^1. \quad (4.77)$$

Tällöin yhtälön (4.75) oikealla puolellakin indeksit voidaan vaihtaa keskenään. Voidaan kirjoittaa

$$U_{n,k}^1 = U_{k,n}^1 = -\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) A_{k,n} + k(k+1)U_{k,n} \quad (4.78)$$

Huomataan myös, että

$$A_{k,n} = \frac{\Gamma(\frac{k}{2} + 1) \Gamma(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} = \frac{1}{A_{n,k}} \quad (4.79)$$

Yhtälöt (4.75) ja (4.78) muodostavat yhtälöparin, josta voidaan ratkaista

$$U_{n,k} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k} - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}}}{n(n+1) - k(k+1)}. \quad (4.80)$$

Kyseinen integraali on tosin löydettävissä suoraan kirjallisuudestakin [15]

Yhtälöt (4.75) ja (4.78) voidaan myös ratkaista $U_{n,k} = U_{k,n}$ suhteen, jolloin saadaan yhtälöpari

$$U_{n,k} = \frac{1}{n(n+1)} \left[U_{n,k}^1 + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k} \right] \quad (4.81)$$

$$U_{n,k} = \frac{1}{k(k+1)} \left[U_{n,k}^1 + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}} \right], \quad (4.82)$$

josta voidaan ratkaista

$$U_{n,k}^1 = \frac{2}{\pi} \frac{k(k+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k} - n(n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}}}{n(n+1) - k(k+1)}. \quad (4.83)$$

Erikoistapausta $n = k$ ei kuitenkaan voi sijoittaa yhtälöihin suoraan, vaan ne vaativat hieman muokkausta. Jos $n = k$,

$$A_{n,k} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = 1 = \frac{1}{A_{n,k}}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} U_{n,k} &= \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi \left(n(n+1) - k(k+1) \right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\frac{\pi}{2}(n-n)(2n+1)} \\ &= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(n-n)\right]}{\frac{\pi}{2}(n-n)(2n+1)} \\ &= \frac{\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{2}(n-n)\right]}{2n+1} \\ &= \frac{\operatorname{sinc}(0)}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Vastaavasti, jos $n = k$,

$$U_{n,k}^1 = \frac{n(n+1)}{2n+1}.$$

Huomataan myös, että jos sekä n että k ovat molemmat parittomia, jolloin

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = 0,$$

tai molemmat parillisia, jolloin

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) = 0,$$

pätee

$$U_{n,k} = U_{n,k}^1 = 0.$$

Voidaan kirjoittaa

$$U_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & n = k \\ 0, & n \neq k, \\ f_{n,k}, & \text{muulloin} \end{cases} \quad n+k \text{ parillinen}, \quad (4.84)$$

missä

$$f_{n,k} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k} - \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}}}{n(n+1) - k(k+1)}, \quad (4.85)$$

missä $A_{n,k}$ on määritelty yhtälössä (4.76).

Vastaavasti

$$U_{n,k}^1 = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2n+1}, & n = k \\ 0, & n \neq k, \\ f_{n,k}^1, & \text{muulloin} \end{cases} \quad n+k \text{ parillinen}, \quad (4.86)$$

missä

$$f_{n,k}^1 = \frac{2}{\pi} \frac{k(k+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k} - n(n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}}}{n(n+1) - k(k+1)}. \quad (4.87)$$

Integraalien $L_{n,k}$ ja $L_{n,k}^1$ tapauksissa toimitaan vastaavasti. Lähdetään muodostamaan integraalia $L_{n,k}^1$, (4.66), ja lausutaan liittofunktiot kaavan (4.67) avulla ja osittaisintegroidaan. Sovelletaan integraalitermiin kaavaa (4.71) ja saadaan

$$L_{n,k}^1 = \int_{-1}^0 (1-\xi^2) \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) P_k(\xi) + n(n+1) \int_{-1}^0 P_n(\xi) P_k(\xi) d\xi. \quad (4.88)$$

Sijoitusermistä jää tässä tapauksessa jäljelle vain sijoitus ylärajalla. $P_n(\xi)$:n ja tämän derivaatan arvot nollassa on annettu kaavoissa (4.73) ja (4.74). Saadaan

$$L_{n,k}^1 = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k} + n(n+1) L_{n,k}. \quad (4.89)$$

Jälleen huomataan, että indeksien n ja k järjestys voidaan vaihtaa integraalin arvon siitä muuttumatta. Voidaan kirjoittaa

$$L_{n,k}^1 = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) A_{k,n} + k(k+1)L_{n,k}. \quad (4.90)$$

Yhtälöparista (4.89) ja (4.90) voidaan ratkaista

$$L_{n,k} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}} - \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k}}{n(n+1) - k(k+1)}, \quad (4.91)$$

ja

$$L_{n,k}^1 = \frac{2 n(n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}} - k(k+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k}}{n(n+1) - k(k+1)}. \quad (4.92)$$

Erikoistapaukset huomioon ottaen voidaan kirjoittaa

$$L_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & n = k \\ 0, & n \neq k, \quad n+k \text{ parillinen} \\ g_{n,k}, & \text{muulloin} \end{cases}, \quad (4.93)$$

missä

$$g_{n,k} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}} - \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k}}{n(n+1) - k(k+1)} \quad (4.94)$$

ja

$$L_{n,k}^1 = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2n+1}, & n = k \\ 0, & n \neq k, \quad n+k \text{ parillinen} \\ g_{n,k}^1, & \text{muulloin} \end{cases}, \quad (4.95)$$

missä

$$g_{n,k}^1 = \frac{2 n(n+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \frac{1}{A_{n,k}} - k(k+1) \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) A_{n,k}}{n(n+1) - k(k+1)}. \quad (4.96)$$

Huomataan, että

$$L_{n,k} = (-1)^{n+k} U_{n,k} \quad (4.97)$$

ja

$$L_{n,k}^1 = (-1)^{n+k} U_{n,k}^1. \quad (4.98)$$

4.4 Dielektrisen kaksoispuolipallon polarisoituvuus

Kaksoispuolipallon tapauksessa polarisoituvuus ei ole skalaarinen luku, sillä pallon vaste ulkoiseen kenttään on erilainen riippuen kentän suunnasta. Eriksseen ovat kuitenkin laskettavissa pallon pyörähdyssymmetria-akselin eli \mathbf{u}_z :n suuntainen, *aksiaalinen polarisoituvuus* α_z sekä z -akselia vastaan kohtisuoran tason suuntainen, *transversaalinen polarisoituvuus* α_t , joiden avulla kaksoispuolipallon polarisoituvuus voidaan lausua *dyadina*

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha_z \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z + \alpha_t \bar{\bar{I}} = \alpha_t \mathbf{u}_x \mathbf{u}_x + \alpha_t \mathbf{u}_y \mathbf{u}_y + \alpha_z \mathbf{u}_z \mathbf{u}_z. \quad (4.99)$$

Polarisoituvuus lasketaan kappaleeseen syntyneen dipolimomentin ja ulkoisen kentän itseisarvojen suhteena. Kaavasta (2.6)

$$\alpha = \frac{p}{E_e} \quad (4.100)$$

Kaksoispuolipallon tapauksessa dipolia vastaavan termin laskemiseksi täytyy kuitenkin ratkaista koko matriisiyhtälö (4.32) tai (4.57), sillä pallon epähomogeenisuudesta seuraavan Legendren funktioiden epäortogonaalisuuden vuoksi jokainen kerroin B_n riippuu jokaisesta muusta kertoimesta B_n .

4.4.1 Aksiaalinen polarisoituvuus

Tutkitaan ensin kaksoispuolipallon aksiaalista polarisaatiota. Ulkoinen kenttä ja pallon polarisaation seurauksena syntynyt dipolimomentti ovat \mathbf{u}_z -suuntaisia. \mathbf{u}_z -suuntaisen dipolin aiheuttama potentiaali on kaavan (3.38) mukaisesti

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.101)$$

Dipolia vastaava termi kaksoispuolipallon potentiaalin sarjakehitelmässä on

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{B_1}{r^2} P_1(\xi) = \frac{B_1}{r^2} \cos \theta. \quad (4.102)$$

Merkitsemällä yhtälöt (4.101) ja (4.102) yhtäsuuriksi saadaan dipolimomentiksi

$$p = 4\pi\epsilon_0 B_1, \quad (4.103)$$

jolloin aksiaalinen polarisoituvuus on muotoa

$$\alpha_z = \frac{4\pi\epsilon_0 B_1}{E_e}. \quad (4.104)$$

Tyhjiön permittiivisyydellä ja pallon tilavuudella, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$, normalisoitu polarisoituvuus on tällöin muotoa

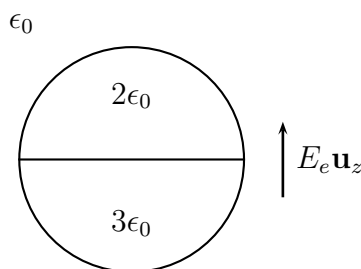
$$\alpha_{zn} = 3 \frac{B_1}{E_e a^3}. \quad (4.105)$$

Käytännön laskuissa kannattaa tällöin valita $E_e = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ ja $a = 1\text{m}$.

Lasketaan esimerkki, jossa tyhjiössä sijaitsevan kaksoispuolipallon puolikkaiden suhteelliset permittiivisyydet ovat $\epsilon_{r1} = 2$ ja $\epsilon_{r2} = 3$, kuva 4.4. Tutkitaan ratkaisun suppenemista yhtälöiden ja kerrointen määrän N funktiona, jolloin matriisin M koko on $N \times N$. Kuvasta 4.5 nähdään, että ratkaisua lähestytään alhaalta päin, ja tulos suppenee varsin hitaasti. Kuitenkin viiden desimaalin tarkkuus on saavutettavissa kohtalaisen kokoisilla matriiseilla. Saadaan

$$\alpha_{zn} \approx 0,96382.$$

Huomataan, ettei pallon kääntäminen ympäri vaikuta polarisoituvuuden arvoon. Tulos on siis täsmälleen sama, jos $\epsilon_{r1} = 3$ ja $\epsilon_{r2} = 2$.



Kuva 4.4: Poikkileikkaus kaksoispuolipallosta, jonka suhteelliset permittiivisyydet ovat 2 ja 3

4.4.2 Transversaalin polarisoituvuus

Transversaalisessa tapauksessa ulkoinen kenttä ja syntynyt dipolimomentti voidaan valita \mathbf{u}_x -suuntaiseksi. Kaavasta (3.38) dipolin potentiaaliksi saadaan

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \sin \theta \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (4.106)$$

Vastaava sarjakehitelmän termi on muotoa

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{B_1}{r^2} \sin \theta \cos \varphi. \quad (4.107)$$

Vertaamalla yhtälöitä (4.106) ja (4.107) dipolimomentiksi saadaan jälleen

$$p = 4\pi\epsilon_0 B_1, \quad (4.108)$$

eli transversaalisesäkin tapauksessa normalisoitu polarisoituvuus on muotoa

$$\alpha_{tn} = 3 \frac{B_1}{E_e a^3}. \quad (4.109)$$

Lasketaan nyt kaksoispuolipallon normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus α_{tn} , kun suhteelliset permittiivisyydet ovat edelleen $\epsilon_{r1} = 2$ ja $\epsilon_{r2} = 3$. Kuvassa 4.6 on esitetty ratkaisun suppeneminen. Tällä kertaa ratkaisua lähestytään ylhäältä päin. Saadaan

$$\alpha_{tn} \approx 0,98862.$$

Tässäkään tapauksessa pallon ympärikäntäminen, eli pallonpuolikkaiden permittiivisyyden arvojen vaihtaminen keskenään, ei muuta polarisoituvuuden arvoa.

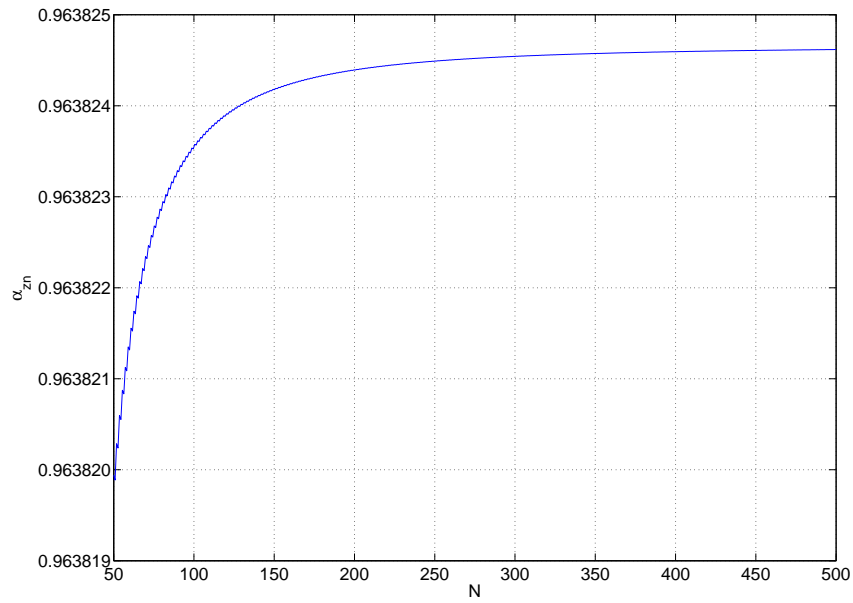
Tutkitaan vielä N :n kasvattamisen vaikutusta ratkaisun suppenemiseen. Polarisoituvuus pystytään laskemaan arvolla $N=6500$, tosin tämä alkaa olla tietokoneen muistin kannalta ylärajoilla, ja ajankulutus on liian suurta useamman polarisoituvuuden laskemiseksi samalla ajolla. Oletetaan, että ratkaisu todella suppenee kohti fysikaalista todellisuutta vastaavaa arvoa, ja että saatu polarisoituvuuden arvo on jo todella tarkka. Normalisoidulle aksiaalisella polarisoituvuudelle saadaan

$$\alpha_{6500} \approx 0,963824659284142.$$

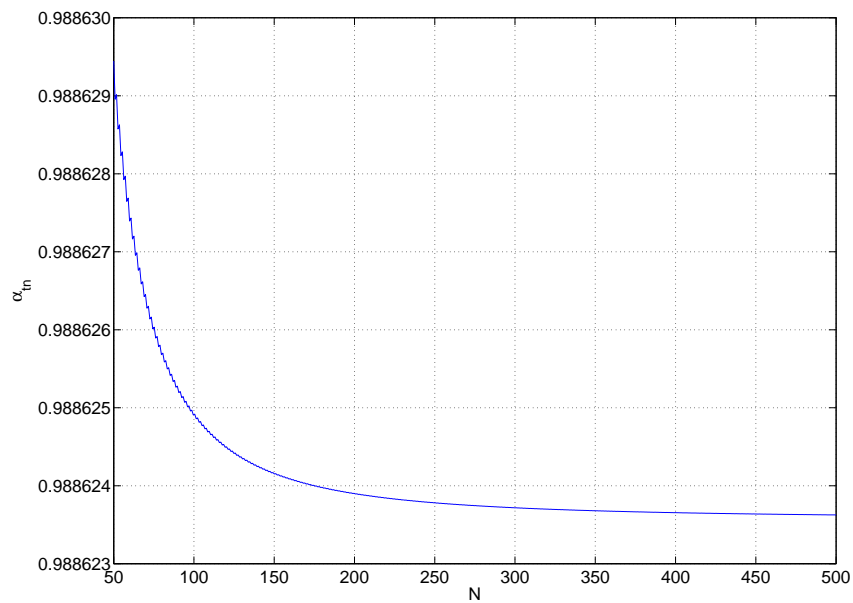
Otetaan α_{6500} vertailuarvoksi ja lasketaan pienemmillä N :n arvoilla laskettujen polarisoituvuuksien suhteellista virhettä tähän nähden

$$v = \frac{|\alpha_{6500} - \alpha_{nz}|}{\alpha_{6500}}.$$

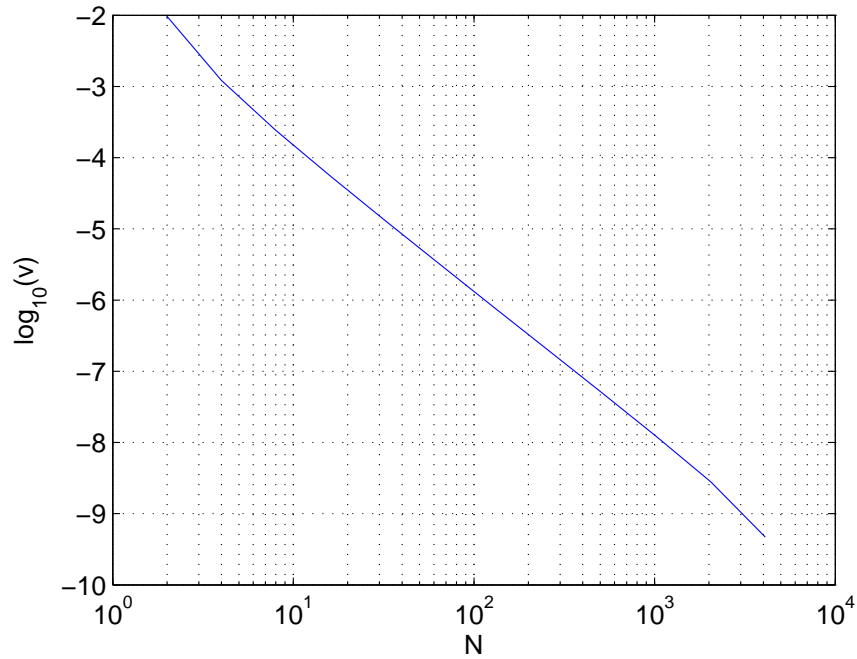
Tutkitaan N :n kaksinkertaistamisen vaikutusta ratkaisun suppenemiseen. Lasketaan α_{nz} , kun $N = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{12}$, ja lasketaan näiden suhteellinen virhe v . Kuvassa 4.7 on esitetty v :n kymmenkantainen logaritmi N :n funktiona puolilogaritmisella asteikolla. Huomataan kuvaa melko lineaariseksi. Karkeasti voidaan arvioida, että jos $N > 15$, ratkaisun kolmas merkitsevä numero ei enää voi muuttua. Vastaavasti, jos $N > 40$, neljäs, $N > 120$, viides, $N > 400$,



Kuva 4.5: Normalisoidun aksiaalisen polarisoituvuuden ratkaisun suppeneminen. $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$



Kuva 4.6: Normalisoidun transversaalisen polarisoituvuuden ratkaisun suppeneminen. $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$



Kuva 4.7: Suhteellisen virheen käyttäytyminen N :n funktiona normalisoidun aksiaalisen polarisoituvuuden tapauksessa.

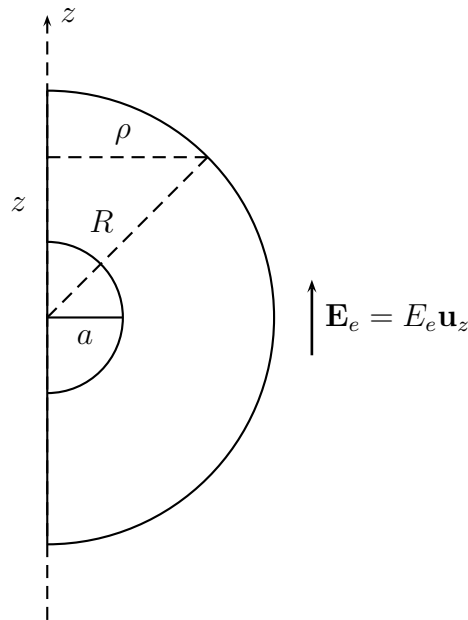
kuudes, ja jos $N > 1200$, tuloksen seitsemäs merkitsevä numero ei enää muutu. Sama näyttäisi toteutuvan myös transversaalisellevin polarisoituvuudelle. Tosin on huomioitava, että tarkastelu on tehty arvoilla $\epsilon_{r1} = 2$ ja $\epsilon_{r2} = 3$. Suurilla permittiivisyyskontrasteilla ratkaisun suppenemisen voi olettaa kuitenkin olevan vieläkin hitaampaa. Melko hyvällä varmuudella voidaan kuitenkin sanoa, että jos suhteelliset permittiivisyydet $\epsilon_r \geq 1$, viiden numeron tarkkuuteen riittää $N > 200$.

5 Vertailutulosten laskenta valmisohjelmalla

Halutaan laskea vertailutuloksia myös kaupallisella valmisohjelmistolla. Valitaan monipuolinen, *elementtimenetelmään* (FEM) perustuva Comsol Multiphysics, josta tästä eteenpäin käytetään lyhennystä CM. Ohjelman sähkömagneettikamoduulilla voidaan mallintaa kaksi- ja kolmiulotteisia rakenteita ja ratkaista statiikan ja dynamiikan differentiaaliyhtälöitä erilaisilla reunaehdoilla.

Huomataan, että pyörähdyssymmetrisen kappaleen, kuten pallon tai sylinterin polarisoituvuuden laskennassa voidaan hyödyntää kyseistä symmetriaa (Axial symmetry (2D)) siten, että riittää mallintaa ainoastaan kappaleen poikkileikkaus, tai itse asiassa ainoastaan poikkileikkauksen puolikas, kaksiulotteisesti, jolloin muistin ja laskenta-ajan säästö on merkittävä. Tämä tosin edellyttää ratkaistavien yhtälöiden ja reunaehtojen muokkausta, mitä esitellään seuraavassa.

5.1 Aksiaalisen sähkökentän tapaus



Kuva 5.1: Periaatekuva pyörähdyssymmetrisen kappaleen mallintamisesta aksiaalisen kentän tapauksessa

Aksiaalinen tapaus on z -akselin suhteen täysin pyörähdyssymmetrinen, eli geometriassa eikä ulkoisessa herätekentässäkään ole φ -riippuvuutta, joten on varsin luonnollista hyödyntää polarisoituvuuden laskennassa kyseistä symmetriaa.

Laskenta-alueeksi kannattaa valita origokeskeinen pallo, jonka keskelle kappale sijoitetaan. Esimerkiksi pallomaisen kappaleen polarisoituvuutta laskettaessa voi pallon säteeksi valita $a = 1$, ja laskenta-alueen säde kannattaa olla esimerkiksi $R = 4$.

Laskenta-alueen rajalle, $r = R$, asetetaan ehto, joka määrää sekä herätteen, että toimii myös absorboivana reunana. Oletetaan, että etäisyydellä $r = R$ korkeamman asteen vasteet ovat ehtineet vaimentua pois, ja kokonaispotentiaali muodostuu alkuperäisestä \mathbf{u}_z -suuntaisen vakiokentän aiheuttavasta potentiaalista sekä sekundäärisestä, kappaleen polarisoitumisen seurauksena syntyneen dipolin potentiaalista. Kaavoista (4.1) ja (4.101) voidaan kirjoittaa

$$\phi = \phi_e + \phi_d = -E_e r \cos \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta. \quad (5.1)$$

Kokonaispotentiaalin normaaliderivaatta pallopinnalla on

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-E_e r \cos \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \right) \\ &= -E_e \cos \theta - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \\ &= \frac{1}{r} \left(-E_e r \cos \theta - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(2E_e r \cos \theta - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta - 3E_e r \cos \theta \right) \\ &= -\frac{2}{r} \left(-E_e r \cos \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta \right) - 3E_e \cos \theta \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sijoittamalla takaisin sulkulausekkeen tilalle alkuperäinen kokonaispotentiaali yhtälöstä (5.1) saadaan rajapinnalla $r = R$ potentiaalille ϕ differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{2}{R} \phi = -3E_e \cos \theta, \quad (5.3)$$

missä $\cos \theta = z/R$.

Tämä ehto voidaan syöttää CM:iin (Physics - Equation System - Boundary Settings) sylinterikoordinaatiston muuttujien avulla lausuttuna muodossa

$$\rho\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} + \rho\epsilon \frac{2}{R} \phi = -3\rho\epsilon E_e \frac{z}{R}. \quad (5.4)$$

Ohjelma osaa antaa tilavuusintegraalina (Postprocessing - Subdomain Integration) z -suuntaisen dipolimomentin itseisarvon p_z , josta normalisoitu polarisoituvuus α_{zn} saadaan kaavan (3.42) mukaisesti jakamalla ulkoisen kentän itseisarvolla, tyhjiön permittiivisyydellä sekä puolipallon tilavuudella.

$$\alpha_{zn} = \frac{p_z}{V\epsilon_0 E_e}. \quad (5.5)$$

Lasketaan vertailun vuoksi numeroesimerkkinä luvussa 4.4 käsitelty kaksoispuolipallo arvoilla $\epsilon_{r1} = 2$ ja $\epsilon_{r2} = 3$. Mallinnetaan tilanne edellä kuvaillulla tavalla, ja annetaan ohjelman muodostaa laskentahila. Tihennetään hilaa siten, että lopullisessa hilassa on 168912 elementtiä jolloin ratkaistavia tuntemattomia on 338197 kappaletta. Verrataan tulosta Matlabilla laskettuun matriisiyhtälön tulokseen, jossa $N = 6500$. Saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_{CM} &\approx 0,963822632562066 \\ \alpha_{6500} &\approx 0,963824659284142. \end{aligned}$$

Nähdään, että tulokset ovat viiden merkitsevän numeron tarkkuudella samat, mikä vahvistaa aiemman tuloksen

$$\alpha_{zn} \approx 0,96382. \quad (5.6)$$

5.2 Transversaalisen sähkökentän tapaus

Transversaalisessa tilanteessa ulkoinen kenttä ei ole enää z -akselin suhteen pyörähdyssymmetrinen. \mathbf{u}_x -suuntaisen vakiokentän aiheuttava potentiaali on muotoa

$$\phi_e = -E_e r \sin \theta \cos \varphi.$$

Jos kappaleen geometria itsessään on kuitenkin pyörähdyssymmetrinen, termi $\cos \varphi$ säilyy sellaisenaan kaikissa potentiaalın kehittelmän termeissä, ja se voidaan erottaa yhteiseksi tekijäksi. Potentiaalifunktio on siis muotoa

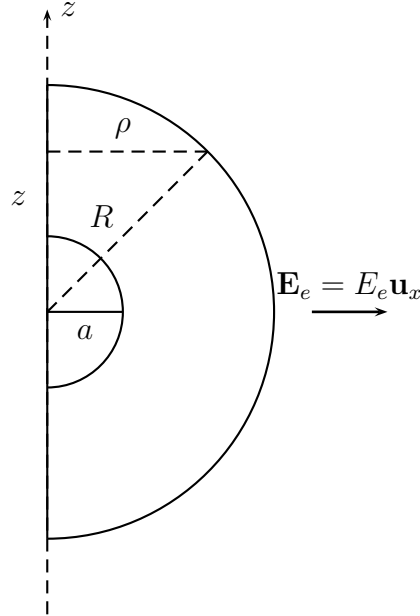
$$\phi(\rho, \varphi, z) = u(\rho, z) \cos \varphi. \quad (5.7)$$

Lähteettömässä alueessa potentiaalifunktion tulee toteuttaa yhtälö (3.7)

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0.$$

Sylinterikoordinaatistossa

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \mathbf{u}_\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \mathbf{u}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \mathbf{u}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{\rho} u \sin \varphi + \mathbf{u}_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.8)$$



Kuva 5.2: Pyörähdyssymmetrisen kappaleen mallintaminen onnistuu kaksiulotteisesti myös transversaalisen kentän tapauksessa

Tällöin

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\epsilon}{\rho} u \right) \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos \varphi. \quad (5.9)$$

Yhtälöiden (3.7) ja (5.9) avulla voidaan kirjoittaa

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{\epsilon}{\rho} u + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (5.10)$$

Näin ollaan saatu uusi yhtälö $u(\rho, z)$:lle ja päästy eroon φ -riippuvuudesta. Potentiaalin ϕ sijasta ratkaistaankin nyt u :ta, jonka yhtälö voidaan antaa CM:iin (Physics - Equation System - Subdomain Settings) muodossa

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\epsilon}{\rho} u = 0. \quad (5.11)$$

Rajapintaehto laskenta-alueen reunalla on samankaltainen kuin aksiaalisessa tapauksessa. Muodostetaan kokonaispotentiaali reunalla $r = R$ jälleen ulkoisen

kentän aiheuttavan potentiaalin sekä polarisaatiosta syntyneen dipolin potentiaalien summana. Kaavoista (4.42) ja (4.106) saadaan

$$\phi = \phi_e + \phi_d = -E_e r \sin \theta \cos \varphi + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \cos \varphi. \quad (5.12)$$

Tällöin u :lle pätee

$$u = u_e + u_d = -E_e r \sin \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta. \quad (5.13)$$

Muodostetaan u :n normaaliderivaatta pallopinnalla.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(-E_e r \sin \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \right) \\ &= -E_e \sin \theta - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \\ &= \frac{1}{r} \left(-E_e r \sin \theta - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(2E_e r \sin \theta - \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta - 3E_e r \sin \theta \right) \\ &= -\frac{2}{r} \left(-E_e r \sin \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta \right) - 3E_e \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Sijoittamalla takaisin u yhtälöstä (5.13) saadaan u :lle laskenta-alueen rajalla, $r = R$, differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{2}{R}u = -3E_e \sin \theta, \quad (5.15)$$

missä $\sin \theta = \rho/R$.

Ehto voidaan syöttää CM:iin (Physics - Equation System - Boundary Settings) muodossa

$$\rho\epsilon \frac{\partial u}{\partial n} + \rho\epsilon \frac{2}{R}u = -3\frac{\rho^2}{R}\epsilon E_e. \quad (5.16)$$

Lopullista normalisoitua polarisoituvuutta ei $\cos \varphi$ -riippuvuuden vuoksi kuitenkaan saada suoraan ohjelmasta polarisoituvuutta integroimalla. \mathbf{u}_x -suuntainen normalisoitu polarisoituvuus saadaan lausekkeesta

$$\alpha_{tn} = \frac{\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{p}}{\epsilon_0 V E_e}, \quad (5.17)$$

missä kokonaisdipolimomentti \mathbf{p} saadaan integroimalla dipolitiheyttä \mathbf{P} [7]

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{P} dV = \int \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} dV. \quad (5.18)$$

Sijoittamalla polarisoituvuuden lausekkeeseen (5.17) kokonaisdipolimomentti \mathbf{p} integraalimuodossa yhtälöstä (5.18) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\alpha_{tn} &= \frac{\epsilon_r - 1}{VE_e} \int_V \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{E} dV \\
&= \frac{\epsilon_r - 1}{VE_e} \int_V \mathbf{u}_x \cdot (-\nabla\phi) dV \\
&= -\frac{\epsilon_r - 1}{VE_e} \int_V \mathbf{u}_x \cdot \nabla(u(\rho, z) \cos\varphi) dV \\
&= \frac{1 - \epsilon_r}{VE_e} \int_V \mathbf{u}_x \cdot \left(\mathbf{u}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos\varphi - \mathbf{u}_\varphi \frac{1}{\rho} u \sin\varphi + \mathbf{u}_z \frac{\partial u}{\partial z} \cos\varphi \right) dV \\
&= \frac{1 - \epsilon_r}{VE_e} \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \cos^2\varphi + \frac{1}{\rho} u \sin^2\varphi \right) \rho d\rho d\varphi dz \\
&= \frac{\pi(1 - \epsilon_r)}{VE_e} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \rho + u \right) d\rho dz \\
&= \frac{\pi(1 - \epsilon_r)}{VE_e} \int_S (u - E_\rho \rho) d\rho dz \tag{5.19}
\end{aligned}$$

Tarvittava pintaintegraali

$$\int_S (u - E_\rho \rho) d\rho dz$$

on laskettavissa CM:llä.

Lasketaan myös kaksoispuolipallon ($\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 3$) normalisoitu transveraalinen polarisoituvuus numeerisesti edellä kuvailtuun tapaan. Käytetään laskentahilaa, jossa on 168912 elementtiä, jolloin tuntemattomia on 338197 kappaletta. Tosin tässä paloittain homogeenisessä tapauksessa integraali (5.19) on laskettava paloittain muodossa

$$\alpha_{tn} = \frac{\pi}{VE_e} \left[(1 - \epsilon_{r1}) \int_{S1} (u - E_\rho \rho) d\rho dz + (1 - \epsilon_{r2}) \int_{S2} (u - E_\rho \rho) d\rho dz \right].$$

Verrataan saatua tulosta matriisiyhtälöstä laskettuun tulokseen, jossa $N = 6500$. Saadaan

$$\alpha_{CM} \approx 0,988622051085879$$

$$\alpha_{6500} \approx 0,988623575539272.$$

Tässäkin tapauksessa tulokset täsmäävät viiden merkitsevän numeron tarkkuudella, eli jo aiemminkin saatu tulos

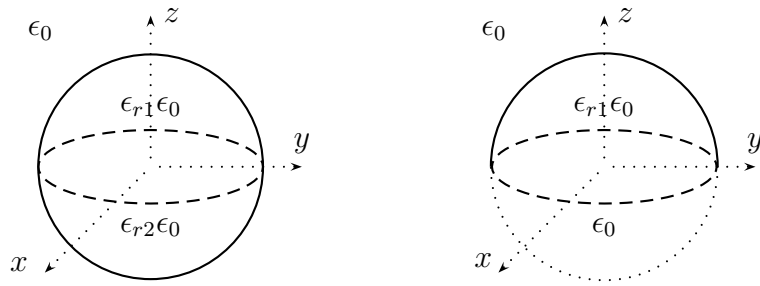
$$\alpha_{tn} \approx 0,98862$$

näyttäisi pätevän.

6 Puolipallon polarisoituvuus

6.1 Dielektrinen puolipallo

Valitsemalla kaksoispuolipallolle $\epsilon_{r2} = 1$ jää jäljelle tyhjiössä sijaitseva homogeeninen dielektrinen *puolipallo*. Kuten pallonkin, myös puolipallon normalisoitu polarisoituvuus riippuu vain yhdestä parametrystä, sen permittiivisyydestä ϵ_{r1} .



Kuva 6.1: Kaksoispuolipallon erikoistapauksena saadaan pelkkä puolipallo

6.1.1 Aksiaalinen polarisoituvuus

Puolipallon aksiaaliselle polarisoituvuudelle pätee yhtälö (4.104). Normalisoidua polarisoituvuutta laskettaessa on kuitenkin huomioitava, että puolipallon tilavuus, $V = \frac{2}{3}\pi a^3$, on vain puolet pallon tilavuudesta. Kaava (4.105) täytyykin nyt kirjoittaa muodossa

$$\alpha_{zn} = 6 \frac{B_1}{E_c a^3}, \quad (6.1)$$

missä kerroinvektori \mathbf{B} on ratkaistu matriisiyhtälöstä (4.32).

Lasketaan myös vertailutuloksia Comsol Multiphysics:n avulla. CM:llä tehty geometrian mallinnus voidaan tallentaa M-file -muodossa, jolloin se on muokattavissa Matlab-ohjelman editorilla. Tällöin on mahdollista sisällyttää koodiin esimerkiksi for-silmukoita, mikä mahdollistaa polarisoituvuuden laskennan, ja tämän kuvaajan piirtämisen, suhteellisen permittiivisyyden funktiona. Muokattu M-file ajetaan Comsol Script -ohjelmalla.

Kuvassa 6.2 on esitetty puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus

ϵ_r :n funktiona, $\epsilon_r \geq 0$, kun $N = 200$, sekä CM:llä laskettu vertailutulos, jossa tuntemattomien määrä on 453477. Kuvassa 6.3 on näiden kahden menetelmän välinen suhteellinen virhe

$$v = \frac{|\alpha_{200} - \alpha_{CM}|}{|\alpha_{200}|}.$$

Huonoimmillaankin tulokset yhtyvät viiden merkitsevän numeron tarkkuudella.

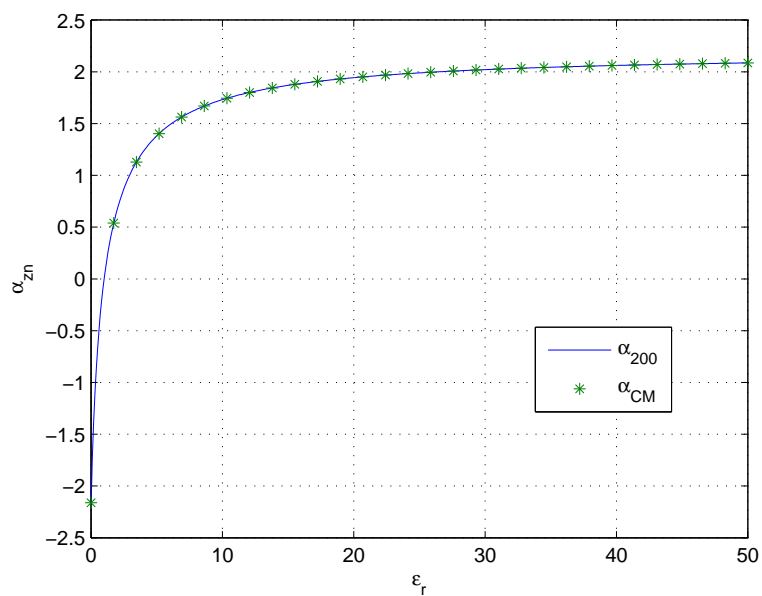
6.1.2 Transversaalin polarisoituvuus

Kaava (5.17) antaa puolipallon transversaalisen polarisoituvuuden. Normalisoituna transversaalinen polarisoituvuus on muotoa

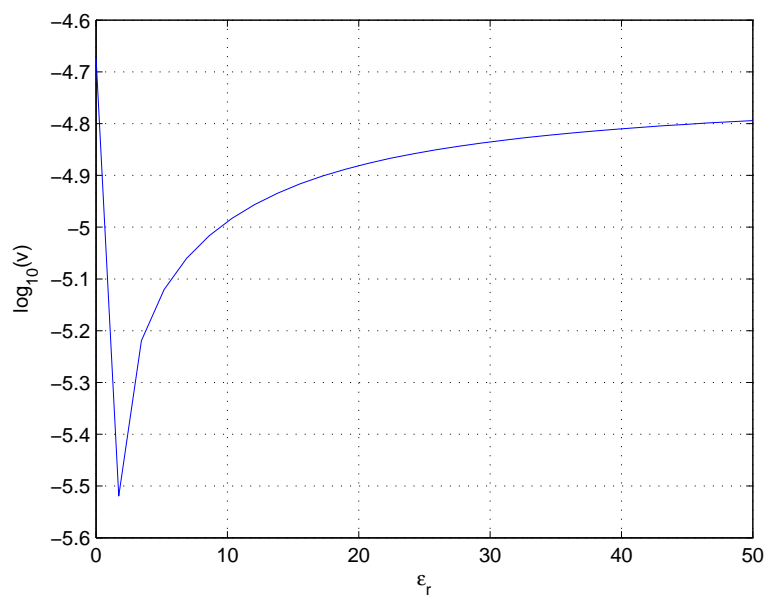
$$\alpha_{tn} = 6 \frac{B_1}{E_e a^3}, \quad (6.2)$$

missä kerroinvektori \mathbf{B} on ratkaistu matriisiyhtälöstä (4.57).

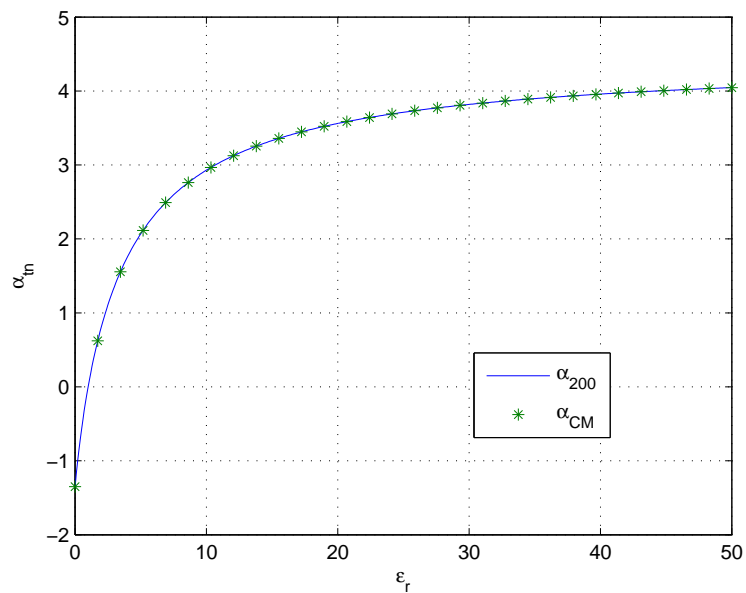
Kuvassa 6.4 on esitetty puolipallon normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus suhteellisen permiittivisyyden funktiona, kun $N = 200$. Vertailutuloksena on CM:llä laskettu normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus, kun tuntemattomia on 443489. Kuvassa 6.5 on esitetty matriisiyhtälöstä saadun ja CM:llä lasketun tuloksen välinen suhteellinen virhe. Tulokset näyttävät täsmäävän vieläkin paremmin kuin aksiaalisessa tapauksessa.



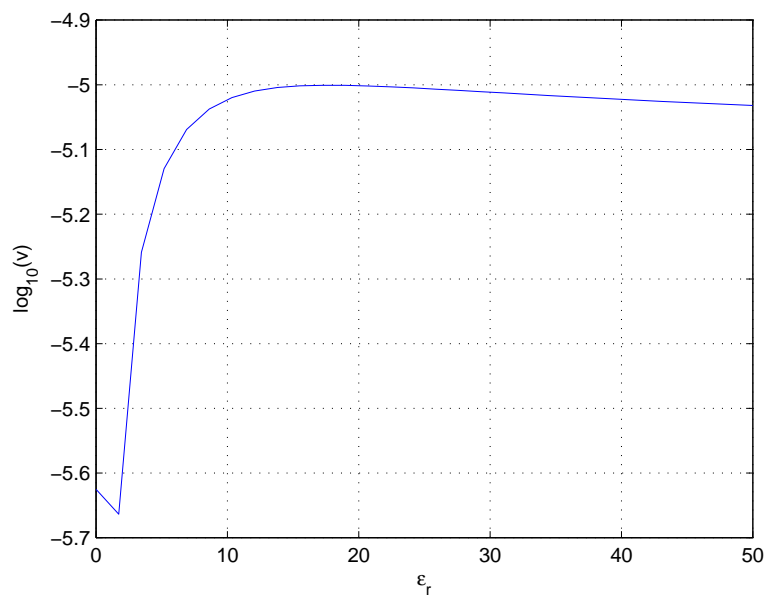
Kuva 6.2: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus suhteellisen permittiivisyyden funktiona



Kuva 6.3: Eri menetelmillä laskettujen polarisoituvuuksien α_{zn} suhteellinen virhe suhteellisen permittiivisyyden funktiona



Kuva 6.4: Puolipallon normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus suhteellisen permittiivisyyden funktiona



Kuva 6.5: Eri menetelmillä laskettujen polarisoituvuuksien α_{tn} suhteellinen virhe suhteellisen permittiivisyyden funktiona

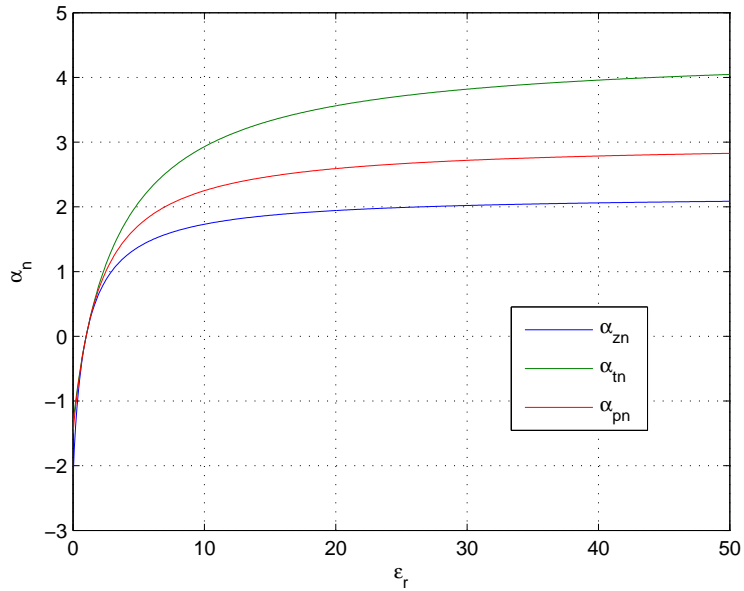
6.2 Vertailu homogeeniseen palloon

Vertaillaan vielä puolipallon polarisoituvuutta kokonaisen pallon tapaukseen. Pallon normalisoitu polarisoituvuus on laskettavissa analyttisesti kaavasta (3.42). Kuvassa 6.6 on esitetty puolipallon α_{zn} :n ja α_{tn} :n sekä kokonaisen pallon normalisoidun polarisoituvuuden α_{pn} kuvaajat ϵ_r :n funktiona, kun $\epsilon_r \geq 0$. Kuvassa 6.7 samat polarisoituvuudet on esitetty puolilogaritmisella asteikolla.

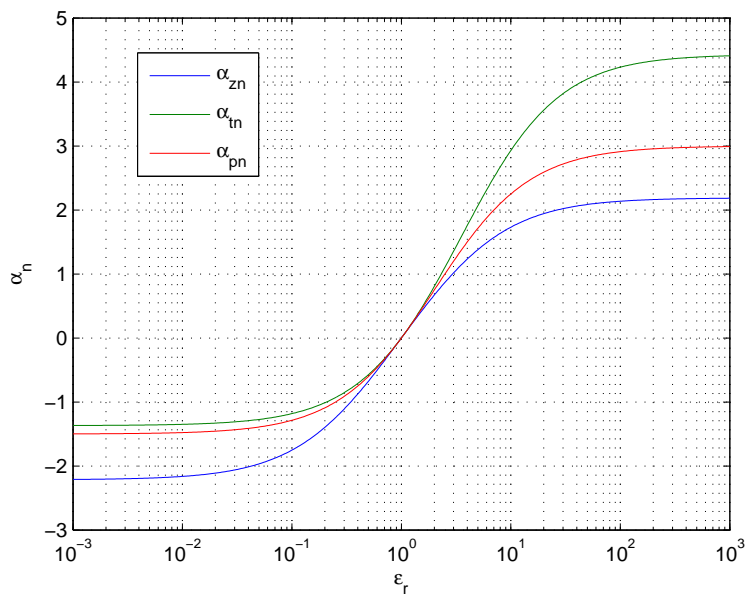
Huomataan, että α_{tn} saa suurempia, kun taas α_{zn} pienempiä arvoja kuin kokonainen pallo. Jos kuitenkin puolipallo otetaan kokonaisuutena huomioon, ja lasketaan sen keskimääräinen polarisoituvuus kolmen ortogonaalisen suunnan polarisoituvuuksien keskiarvona, saadaan

$$\alpha_{av} = \frac{\alpha_{zn} + 2\alpha_{tn}}{3}. \quad (6.3)$$

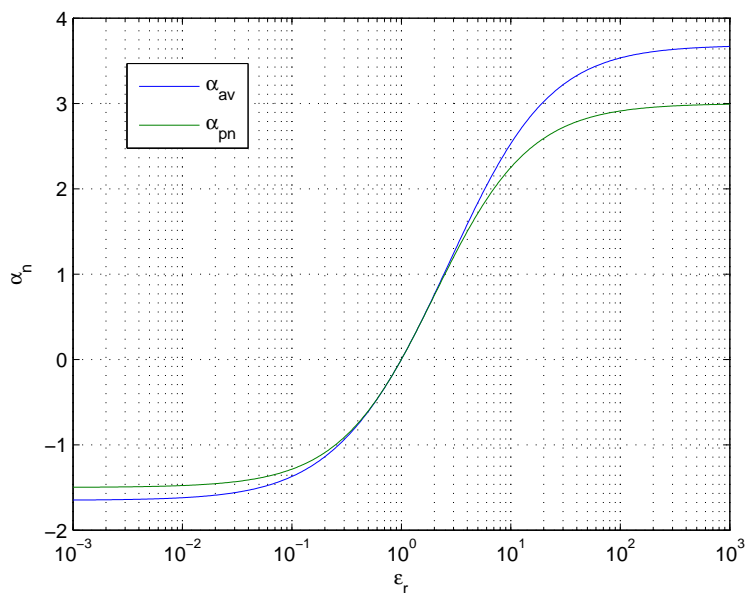
Kuvasta 6.8 nähdään, että keskimääräinen polarisoituvuus on suurempi kuin pallon, kun $\epsilon_r \geq 1$, ja vastaavasti pienempi, kun $0 \leq \epsilon_r \leq 1$. Itseisarvoltaan puolipallon polarisoituvuus on aina suurempi.



Kuva 6.6: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen ja transversaalinen polarisoituvuus sekä homogeenisen pallon normalisoitu polarisoituvuus suhteellisen permittiivisyyden funktiona



Kuva 6.7: α_{zn} , α_{tn} ja α_{pn} ϵ_r :n funktiona puolilogaritmisella asteikolla



Kuva 6.8: Puolipallon keskimääräinen normalisoitu polarisoituvuus verrattuna pallon polarisoituvuuteen ϵ_r :n funktiona

6.3 Ideaalijohdepallon polarisoituvuus

Esimerkiksi kuvasta 6.7 voidaan havaita, että suhteellisen permittiivisyyden kasvaessa α_{zn} ja α_{tn} näyttäisivät lähestyvän jotain äärellistä raja-arvoa. Tämä raja-arvo vastaa *ideaalijohtavan* (PEC) puolipallon polaroituvuutta, sillä esimerkiksi väliaineyhtälöstä

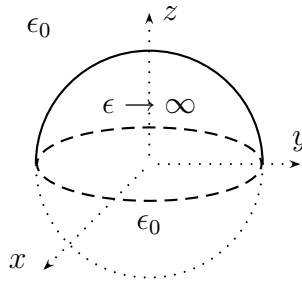
$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

nähdään, että sähkövuontiheyden \mathbf{D} pysymiseksi äärellisenä permittiivisyyden kasvaessa äärettömäksi kappaleen sisäisen sähkökentän on hävitävä, kuten ideaalijohhteessa tapahtuu.

Esimerkiksi johdepallon normalisoiduksi polarisoituvuudeksi saadaan kaavan (3.42) raja-arvona

$$\alpha_{pnPEC} = \lim_{\epsilon_r \rightarrow \infty} 3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = 3. \quad (6.4)$$

Laskettaessa puolipallon polarisoituvuutta tietokoneella, ei suhteelliselle permittiivisyydelle voi antaa ääretöntä arvoa. Ideaalijohdepuolipallon polarisoituvuuteen päästään kuitenkin käsiksi muokkaamalla yhtälöryhmiä (4.31) ja (4.56).



Kuva 6.9: Ideaalijohdepuolipallo

6.3.1 Aksiaalinen polarisoituvuus

Puolipallon aksiaalisen polarisoituvuuden laskemiseksi on ratkaistava lineaarinen yhtälöryhmä, eli jokaisella k :n arvolla on toteuduttava yhtälö (4.31)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [\eta_k(n+1) + \eta_k k \epsilon_{r1} + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k} k \epsilon_{r2}] U_{n,k} \\ = E_e [\eta_k k \epsilon_{r1} - \eta_k + (-1)^{1+k} k \epsilon_{r2} - (-1)^{1+k}] U_{1,k}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

missä

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & k \text{ parillinen} \\ \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}, & k \text{ pariton,} \end{cases} \quad (6.6)$$

ja

$$U_{n,k} = \int_0^1 P_n(\xi) P_k(\xi) d\xi,$$

jotka voidaan laskea analyttisesti kaavalla (4.84).

Jos halutaan ratkaista kertoimet B_n tyhjiössä sijaitsevalle ideaalijohtavalle puolipallolle, on tehtävä raja-arvotarkastelu $\epsilon_{r2} = 1$, $\epsilon_{r1} \rightarrow \infty$, eli

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & k \text{ parillinen} \\ \frac{1}{\epsilon_{r1}} \rightarrow 0, & k \text{ pariton} \end{cases} \quad (6.7)$$

Huomataan, että tarkastelu on tehtävä erikseen parillisille sekä parittomille k :n arvoille, sekä arvolle $k = 0$.

Jos $k = 0$, niin $\eta_0 = 1$, ja $P_0(\xi) = 1$. Tällöin yhtälön (6.5) vasemmalla puolella integraali $U_{n,0}$ on parittomilla n :n arvoilla 0, ja vastaavasti yhtälön oikean puolen hakasulkulauseke häviää kaikilla n :n arvoilla. Saadaan

$$\sum_{n=0,2,4,\dots}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [2(n+1)] \int_0^1 P_n(\xi) d\xi = 0. \quad (6.8)$$

Jos $k = 1, 3, 5, \dots$, niin $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, ja $\eta_k = \frac{1}{\epsilon_1} \rightarrow 0$. Tällöin yhtälö (6.5) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [k + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k} k] U_{n,k} \\ = E_e [2k - 1] U_{1,k}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Jos $k = 2, 4, 6, \dots$, niin $\eta_k = 1$ ja $\epsilon_1 \rightarrow \infty$. Yhtälö (6.5) on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [k \epsilon_1] U_{n,k} = E_e [k \epsilon_1] U_{1,k}, \quad (6.10)$$

eli sievenee lopulta muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} U_{n,k} = E_e U_{1,k}. \quad (6.11)$$

Kun $N = 6500$, ratkaisemalla B_n kaavoista (6.8) (6.9) ja (6.11), saadaan ideaalijohtavan puolipallon normalisoiduksi aksiaaliseksi polarisoituvuudeksi kaavalla (4.105)

$$\alpha_{znPEC} \approx 2,1894. \quad (6.12)$$

6.3.2 Transversaalinen polarisoituvuus

Transversaalisessa tapauksessa yhtälöt ovat muotoa (4.56)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [\eta_k(n+1) + \eta_k k \epsilon_1 + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k} k \epsilon_2] U_{n,k}^1 \\ = E_e [\eta_k k \epsilon_1 - \eta_k + (-1)^{1+k} k \epsilon_2 - (-1)^{1+k}] U_{1,k}^1, \end{aligned} \quad (6.13)$$

missä

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & k \text{ pariton} \\ \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, & k \text{ parillinen,} \end{cases} \quad (6.14)$$

ja integraalit

$$U_{n,k}^1 = \int_0^1 P_n^1(\xi) P_k^1(\xi) d\xi$$

ovat laskettavissa kaavalla (4.86).

Ideaalijohtavan puolipallon tapauksessa $\epsilon_1 \rightarrow \infty$ ja $\epsilon_2 = 1$, joten

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & k \text{ pariton} \\ \frac{1}{\epsilon_1} \rightarrow 0, & k \text{ parillinen} \end{cases} \quad (6.15)$$

Nyt on tarkasteltava erikseen vain parittomat ja parilliset k :n arvot.

Jos $k = 1, 3, 5, \dots$, niin $\eta_j = 1$, ja $\epsilon_1 \rightarrow \infty$. Tällöin yhtälö (6.13) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [k \epsilon_1] U_{n,k}^1 = E_e [k \epsilon_1] U_{1,k}^1, \quad (6.16)$$

mikä sievenee muotoon

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} U_{n,k}^1 = E_e U_{1,k}^1. \quad (6.17)$$

Jos $k = 2, 4, 6, \dots$, niin $\epsilon_1 \rightarrow \infty$, ja $\eta_j = \frac{1}{\epsilon_1} \rightarrow 0$. Tällöin yhtälö (6.13) on muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n a^{-(n+2)} [k + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k}^1 = E_e U_{1,k}^1. \quad (6.18)$$

Kun $N = 6500$, ratkaisemalla B_n kaavoista (6.17) ja (6.18) saadaan ideaalijohtavan puolipallon normalisoiduksi transversaaliseksi polarisoituvuudeksi kaavalla (4.109)

$$\alpha_{tnPEC} \approx 4,4303. \quad (6.19)$$

Johdepuolipallon keskimääräinen normalisoitu polarisoituvuus on tällöin

$$\alpha_{avPEC} = \frac{\alpha_{znPEC} + 2\alpha_{tnPEC}}{3} \approx 3,6833. \quad (6.20)$$

6.4 Magneettijohdepuolipallon polarisoituvuus

Erikoistapauksessa $\epsilon = 0$ kappale toimii *ideaalisena magneettisena johteena* (PMC). Kaavasta (3.42) magneettijohdepuolipallon normalisoiduksi polarisoituvuudeksi saadaan

$$\alpha_{pnPMC} = -\frac{3}{2}. \quad (6.21)$$

Puolipallon tapauksessa yhtälöistä (4.14) ja (4.55) huomataan, ettei arvoa $\epsilon_{r1} = 0$ kuitenkaan voida suoraan sijoittaa yhtälöihin, vaan jouduttaisiin formuloimaan uudet yhtälöt. Kuitenkin, kuten kaksoispuolipallon yhteydessä on huomattiin, pallo voidaan kääntää ympäri polarisoituvuuden arvon muuttumatta (kuva 6.10). Tällöin magneettijohdepuolipallon polarisoituvuus voidaan laskea arvoilla $\epsilon_{r1} = 1$ ja $\epsilon_{r2} = 0$.

Saadaan

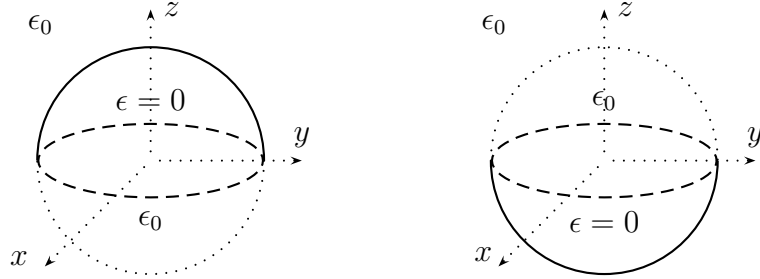
$$\alpha_{znPMC} \approx -2,2152 \quad (6.22)$$

$$\alpha_{tnPMC} \approx -1,3685 \quad (6.23)$$

$$\alpha_{avPMC} \approx -1,6508. \quad (6.24)$$

6.5 Approksimaatiokaava puolipallon polarisoituvuudelle

Matriisiyhtälöiden avulla on voitu ratkaista puolipallon polarisoituvuus ja piirtää sen kuvaajat suhteellisen permittiivisyyden funktiona. Yhtälöiden ratkaisu jokaisella ϵ_r :n arvolla erikseen on kuitenkin hidasta, joten yritetään sovittaa laskettuihin tuloksiin likiarvokaava, josta polarisoituvuus voidaan laskea



Kuva 6.10: Puolipallon kääntäminen ympäri ei vaikuta sen polarisoituvuuteen

nopeasti kohtuullisella tarkkuudella, kun $\epsilon_r \geq 0$. Sovitus haetaan Matlabilla *nlinfit*-funktion avulla.

6.5.1 Aksiaalinen polarisoituvuus

Haetaan puolipallon normalisoidulle aksiaaliselle polarisoituvuudelle, α_{zn} :lle, likiarvokaavaa ns. *Padé-approksimaationa*, eli muodossa

$$\alpha_{zn}(\epsilon_r) \approx \frac{P(\epsilon_r)}{Q(\epsilon_r)}, \quad (6.25)$$

missä $P(\epsilon_r)$ ja $Q(\epsilon_r)$ ovat N -asteisia polynomeja

$$P(\epsilon_r) = \sum_{n=0}^N p_n \epsilon_r^n \quad \text{ja} \quad Q(\epsilon_r) = \sum_{n=0}^N q_n \epsilon_r^n. \quad (6.26)$$

Kertoimet p_n ja q_n voidaan ratkaista sovittamalla kaava aiemmin matriisiyh-tälön avulla ratkaistuihin arvoihin Matlabin avulla. Sovituksen halutaan toimivan positiivisille permittiivisyyden arvoille, eli $\epsilon_r \geq 0$. Huomataan, että 4-asteiset polynomit antavat riittävän tarkan approksimaation. Tällöin

$$\alpha_z(\epsilon_r) \approx \frac{p_4 \epsilon_r^4 + p_3 \epsilon_r^3 + p_2 \epsilon_r^2 + p_1 \epsilon_r + p_0}{q_4 \epsilon_r^4 + q_3 \epsilon_r^3 + q_2 \epsilon_r^2 + q_1 \epsilon_r + q_0}. \quad (6.27)$$

Sovitettavien kerrointen määrää voidaan vähentää kiinnittämällä kaavan antamaan ennalta määrätyt arvot permittiivisyyden arvoilla $\epsilon_r = 0$ (PMC) ja $\epsilon_r \rightarrow \infty$ (PEC). Vastaavat polarisoituvuudet ovat $\alpha_0 \approx -2,21515$ ja $\alpha_\infty \approx$

2,18938. Kaavasta (6.27) nähdään, että

$$\alpha_0 = \frac{p_0}{q_0} \quad (6.28)$$

$$\alpha_\infty = \frac{p_4}{q_4} \quad (6.29)$$

Voidaan valita $q_0 = p_4 = 1$, jolloin kaava (6.27) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \alpha_z(\epsilon_r) &\approx \frac{\epsilon_r^4 + p_3\epsilon_r^3 + p_2\epsilon_r^2 + p_1\epsilon_r + \alpha_0}{\alpha_\infty^{-1}\epsilon_r^4 + q_3\epsilon_r^3 + q_2\epsilon_r^2 + q_1\epsilon_r + 1} \\ &= \frac{\alpha_\infty(\epsilon_r^4 + p_3\epsilon_r^3 + p_2\epsilon_r^2 + p_1\epsilon_r + \alpha_0)}{\epsilon_r^4 + \alpha_\infty q_3\epsilon_r^3 + \alpha_\infty q_2\epsilon_r^2 + \alpha_\infty q_1\epsilon_r + \alpha_\infty} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Lisäksi on oltava $\alpha_{zn}(1) = 0$, jolloin voidaan esimerkiksi määrätä

$$p_1 = -(p_3 + p_2 + \alpha_0 + 1). \quad (6.31)$$

Tällöin polynomilla $P(\epsilon_r)$ on tekijä $\epsilon_r - 1$, ja voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} \alpha_{zn}(\epsilon_r) &\approx \frac{\alpha_\infty(\epsilon_r - 1)[\epsilon_r^3 + (p_3 + 1)\epsilon_r^2 + (p_2 + p_3 + 1)\epsilon_r - \alpha_0]}{\epsilon_r^4 + \alpha_\infty q_3\epsilon_r^3 + \alpha_\infty q_2\epsilon_r^2 + \alpha_\infty q_1\epsilon_r + \alpha_\infty} \\ &= \alpha_\infty(\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_r^3 + a_2\epsilon_r^2 + a_1\epsilon_r - \alpha_0}{\epsilon_r^4 + b_3\epsilon_r^3 + b_2\epsilon_r^2 + b_1\epsilon_r + \alpha_\infty}, \quad \epsilon_r \geq 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\approx -2,21515 \\ \alpha_\infty &\approx 2,18938 \\ a_1 &\approx 6,45198 \\ a_2 &\approx 4,91591 \\ b_1 &\approx 9,48877 \\ b_2 &\approx 12,8989 \\ b_3 &\approx 6,35053. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Sijoittamalla kertoimet (6.33) likiarvokaava (6.32) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\alpha_{zn}(\epsilon_r) \approx 2,18938(\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_r^3 + 4,91591\epsilon_r^2 + 6,45198\epsilon_r + 2,21515}{\epsilon_r^4 + 6,35053\epsilon_r^3 + 12,8989\epsilon_r^2 + 9,48877\epsilon_r + 2,18938}. \quad (6.34)$$

Kuvassa 6.11 on esitetty matriisiyhtälöstä ja approksimaatiokaavasta laskettujen normalisoidujen aksiaalisten polarisoituvuuksien välinen suhteellinen virhe puolilogaritmisellä asteikolla, kun matriisiyhtälössä $N = 200$.

6.5.2 Transversaalinen polarisoituvuus

Vastaavasti puolipallon normalisoidulle transversaalille polarisoituvuudelle, α_{tn} :lle, voidaan sovittaa vastaavanlainen approksimaatioyhtälö, joka on muotoa

$$\alpha_{tn} \approx \alpha_\infty (\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_r^3 + a_2 \epsilon_r^2 + a_1 \epsilon_r - \alpha_0}{\epsilon_r^4 + b_3 \epsilon_r^3 + b_2 \epsilon_r^2 + b_1 \epsilon_r + \alpha_\infty}, \quad \epsilon_r \geq 0. \quad (6.35)$$

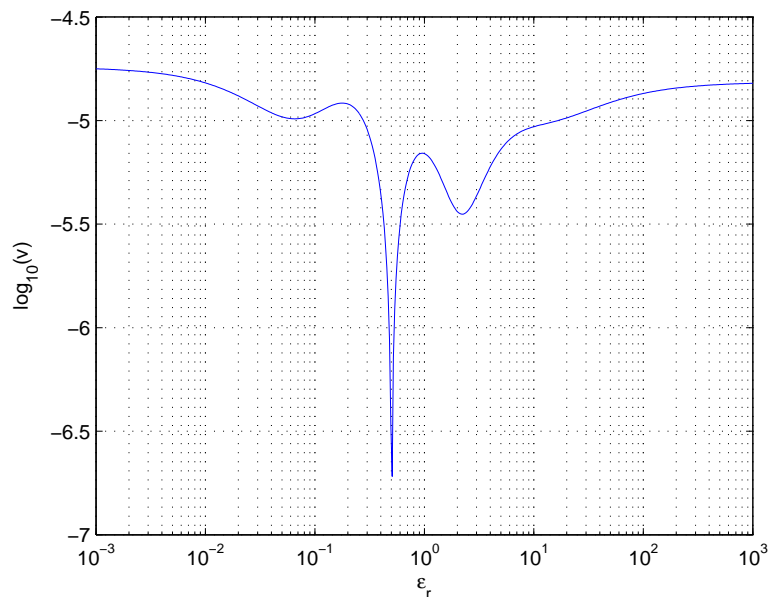
Kertoimiksi saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\approx -1,36853 \\ \alpha_\infty &\approx 4,43030 \\ a_1 &\approx 4,51906 \\ a_2 &\approx 4,05220 \\ b_1 &\approx 16,5759 \\ b_2 &\approx 18,7410 \\ b_3 &\approx 7,71930. \end{aligned} \quad (6.36)$$

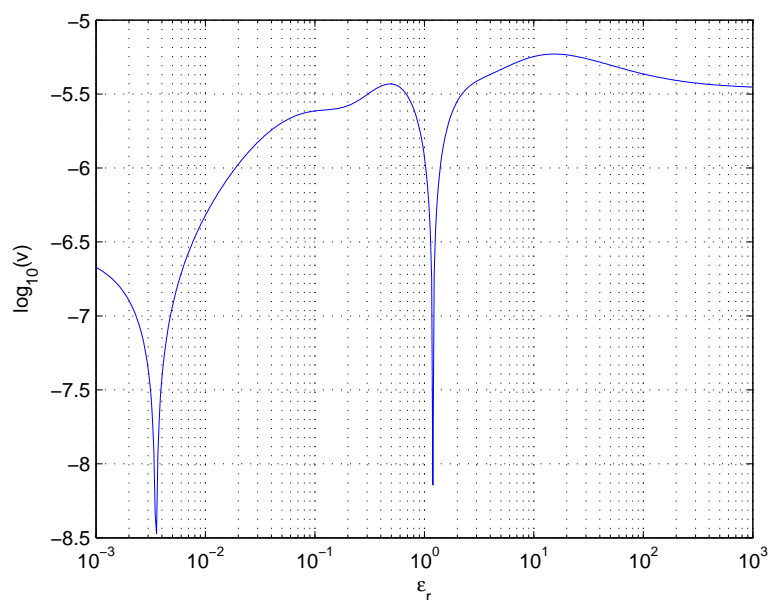
Sijoittamalla kertoimet (6.36) likiarvokaava (6.35) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\alpha_{tn}(\epsilon_r) \approx 4,43030 (\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_r^3 + 4,05220 \epsilon_r^2 + 4,51906 \epsilon_r + 1,36853}{\epsilon_r^4 + 7,71930 \epsilon_r^3 + 18,7410 \epsilon_r^2 + 16,5759 \epsilon_r + 4,43030}. \quad (6.37)$$

Kuvassa 6.12 on esitetty matriisiyhtälöstä ja approksimaatiokaavasta laskettujen normalisoitujen transversaalisten polarisoituvuuksien välinen suhteellinen virhe puolilogaritmisellä asteikolla, kun matriisiyhtälössä $N = 200$.



Kuva 6.11: Matriisiyhtälön ja approksimaatiokaavan välinen suhteellinen virhe aksiaalisen polarisoituvuuden tapauksessa



Kuva 6.12: Matriisiyhtälön ja approksimaatiokaavan välinen suhteellinen virhe transversaalisen polarisoituvuuden tapauksessa

7 Negatiivinen permittiivisyys

7.1 Negatiivisen permittiivisyyden edellytykset

Laajennetaan analyysiä kattamaan myös negatiiviset permittiivisyyden arvot. Tällöin tosin ollaan ristiriitaisessa tilanteessa, sillä täysin staattisten kenttien tapauksessa fysikaaliset permittiivisyyden arvot ovat aina $\epsilon \geq \epsilon_0$. Todellisuudessa permittiivisyys saattaa riippua hyvinkin voimakkaasti taajuudesta, jolloin eritaajuiset kenttäkomponentit kokevat väliaineen eri tavalla. Ilmiötä kutsutaan *dispersioksi* [7, 9]. Esimerkiksi ionisoituneen kaasun, *plasmaan*, tapauksessa voidaan permittiivisyydelle kirjoittaa [16]

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)} \right], \quad (7.1)$$

missä ω_p on *plasmataajuus*, ja ν *törmäystaajuus*. Hyvin korkeilla taajuuksilla $\omega \gg \nu$ plasma on hyvä eriste, ja suhteellista permittiivisyyttä voidaan approksimoida reaalilla mallilla

$$\epsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (7.2)$$

Tällöin pätee $\epsilon_r \leq 1$.

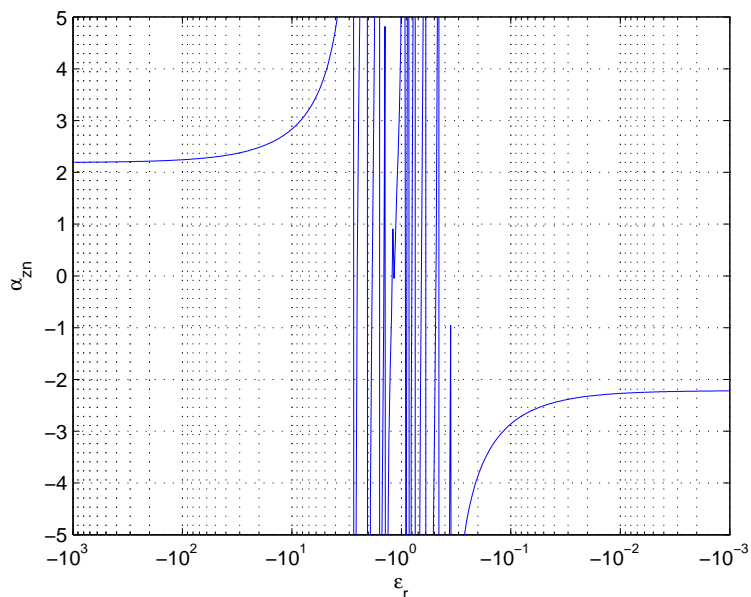
Jos väliaineen permittiivisyys on kompleksinen, aine on häviöllistä. Väliaineen vaimennuskerroin on verrannollinen permittiivisyyden imaginääriosaan. Todellisen, fysikaalisen väliaineen tulee olla *kausaalinen*, jolloin sen permittiivisyyden reaali- ja imaginääriosat riippuvat toisistaan *Kramers-Kronig -relaatioiden* välityksellä [9]

$$\Re\{\epsilon_r(\omega)\} = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im\{\epsilon_r(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (7.3)$$

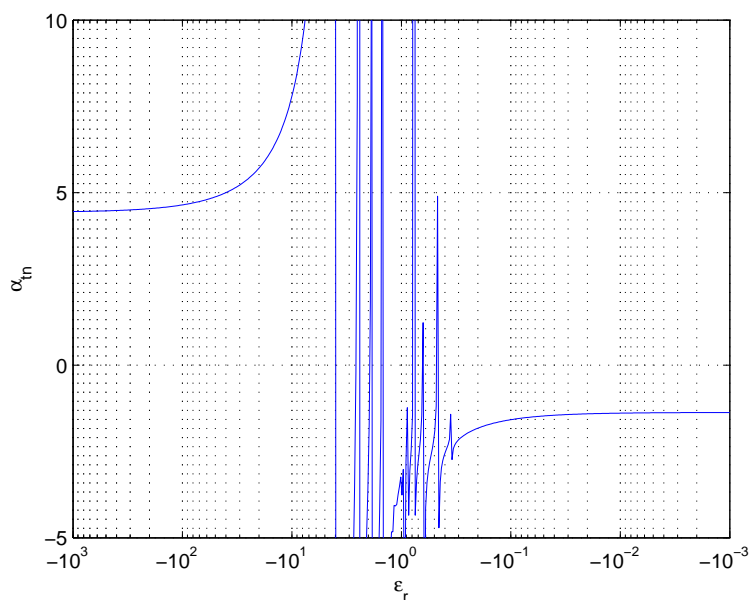
$$\Im\{\epsilon_r(\omega)\} = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\Re\{\epsilon_r(\omega')\} - 1]}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (7.4)$$

missä P tarkoittaa *Cauchyn pääarvoa*.

Oletetaan, että jollain taajuudella ω puolipallon permittiivisyys voisi olla negatiivinen ja reaalinen. Tällöin puolipallon tulee olla aallonpituuteen nähden pieni, jotta sähköstatiikan avulla johdetut yhtälöt pätsivät. Kuvissa 7.1 ja 7.2 on laskettu puolipallon normalisoitu aksiaalinen ja transversaalinen polarisovutus suhteellisen permittiivisyyden ϵ_r funktiona, kun $\epsilon_r \leq 0$. Huomataan, että molemmissa kuvaajissa on $(\epsilon_r = -1)$:n ympäristössä lukuisia singulaarisuuksia. Perehdytään seuraavassa tarkemmin näihin singulaarisuuksiin.



Kuva 7.1: Normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus ϵ_r :n funktiona puolilogaritmisellä asteikolla, kun $\epsilon_r < 0$, $N = 200$



Kuva 7.2: Normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus ϵ_r :n funktiona puolilogaritmisellä asteikolla, kun $\epsilon_r < 0$, $N = 200$

7.2 Potentiaalin singulaarisuus ja staattiset resonanssit

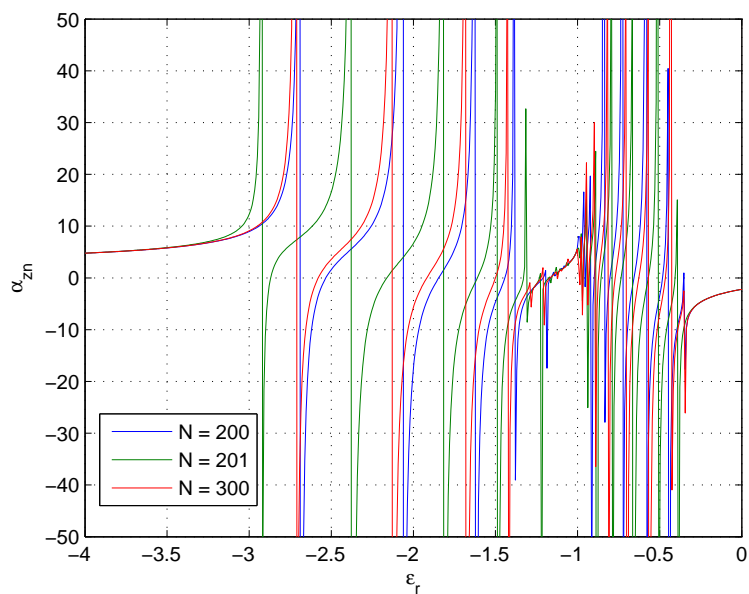
Jos oletetaan, että kappaleen suhteellinen permittiivisyys voi olla negatiivinen, saadaan esille myös niin sanottuja *sähköstaattisia resonansseja* [17, 18], joiden kohdalla kentät ja potentiaalit ovat *singulaarisia*, eli kappaleen vaste saa äärettömän arvon. Numeeriset laskut näiden resonanssien alueella ovat todella epästabiileja. Artikkelissa [17] sähköstaattisia resonansseja tutkitaan kaksiuotteisessa tapauksessa. Artikkelissa [18] johdetaan integraaliyhtälö kyseisiä resonansseja vastaavien permittiivisyyksien laskentaan. Kyseisen integraalin lasketaan ei kuitenkaan paneuduta tämän diplomityön puitteissa.

Kappaleen muoto määrää, millä taajuuksilla, ja näitä vastaavilla permittiivisyyden arvoilla, staattiset resonanssit esiintyvät. Voidaan ajatella, että puolipallon terävät nurkat ja tasainen pohja voisivat vaikuttaa resonansseihin, sillä ne rikkovat pallosymmetrian, minkä jo aiemmin todettiin johtavan Legendren funktioiden epäortogonaalisuuteen, eikä potentiaalille tällöin saatu puhtaan analyttistä ratkaisua. Kokonaisella homogeenisellä pallolla on sen sijaan vain yksi resonanssi. Kuten kaavasta (3.42) nähdään, polarisoituvuus on singulaarinen, kun $\epsilon_r = -2$.

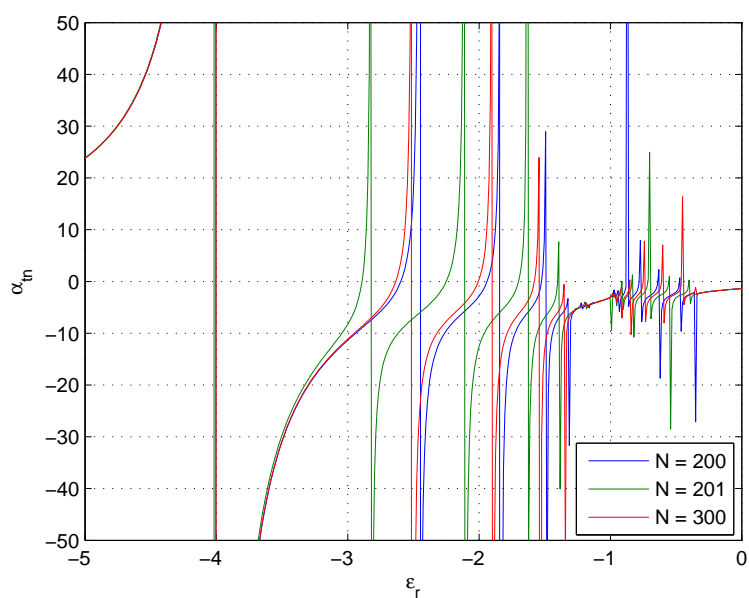
Lasketaan puolipallon polarisoituvuudet tarkemmin pienillä negatiivisilla permittiivisyyden arvoilla. Huomataan, että aksiaalisessa tapauksessa singulaarisuudet rajoittuvat välille $-3 \leq \epsilon_r \leq 0$, ja transversaalissa tapauksessa jota kuinkin välille $-4 \leq \epsilon_r \leq 0$. Ratkaisujen suppeneminen on kuitenkin todella huonoa, ja kuten kuvista 7.3 ja 7.4 huomataan, tuloksissa näkyy voimakasta oskillointia parillisten ja parittomien N :n arvojen välillä. Kuvissa 7.5 ja 7.6 on laskettu vertailutulokset CM:llä, kun tuntemattomien määrä molemmissa tapauksissa on 221597. Nähdään, että myös CM:n tulos osoittaa polarisoituvuuksien singulaarisen käytöksen kyseisillä alueilla. Kuvaajien arvot eivät kuitenkaan osu yksiin, mikä kertoo laskennallisista vaikeuksista kyseisten singulaarisuuksien vuoksi.

Kuvissa 7.7, 7.8 ja 7.9 on esitetty aksiaalisen polarisoituvuuden ratkaisun suppenemista N :n funktiona eri ϵ_r :n arvoilla. Huomataan, että ongelma-alueella olevalla arvolla, $\epsilon_r = -2$, ratkaisu ei näytä suppenevan ollenkaan. Vastaava käytös voidaan havaita myös transversaalissa tapauksessa.

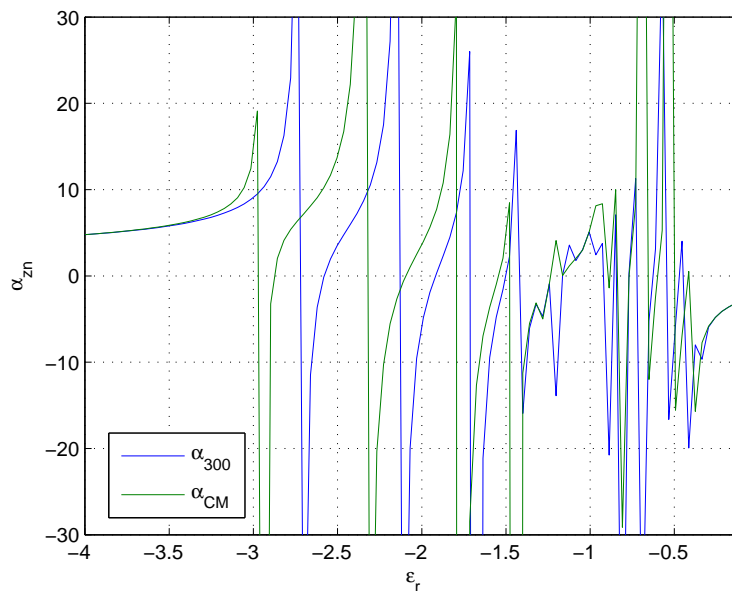
Tutkitaan seuraavassa analyttisesti terävän kulman ja sileän tason vaikutusta potentiaalifunktion singulaarisuuteen.



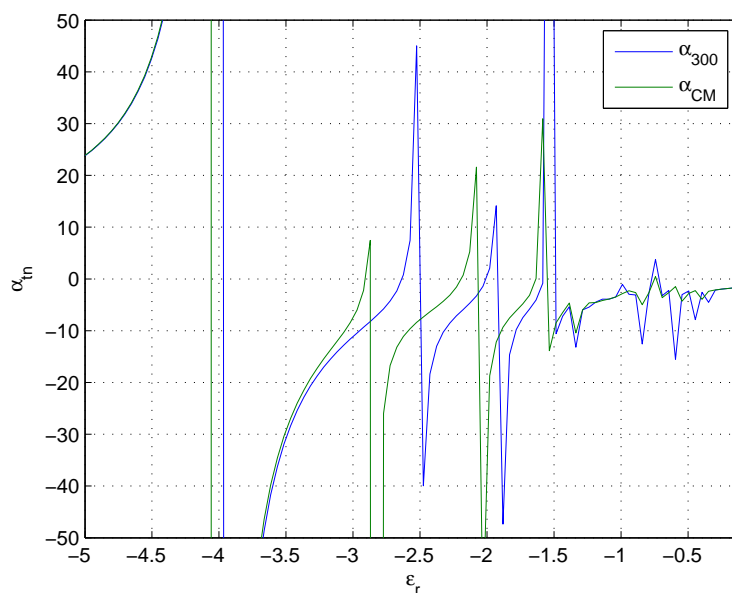
Kuva 7.3: Normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, singulaarisuuksia negatiivisilla ϵ_r :n arvoilla



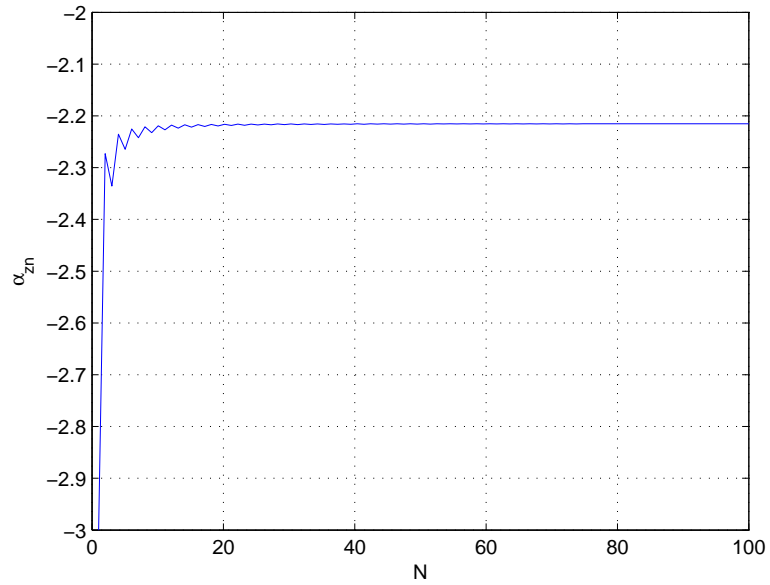
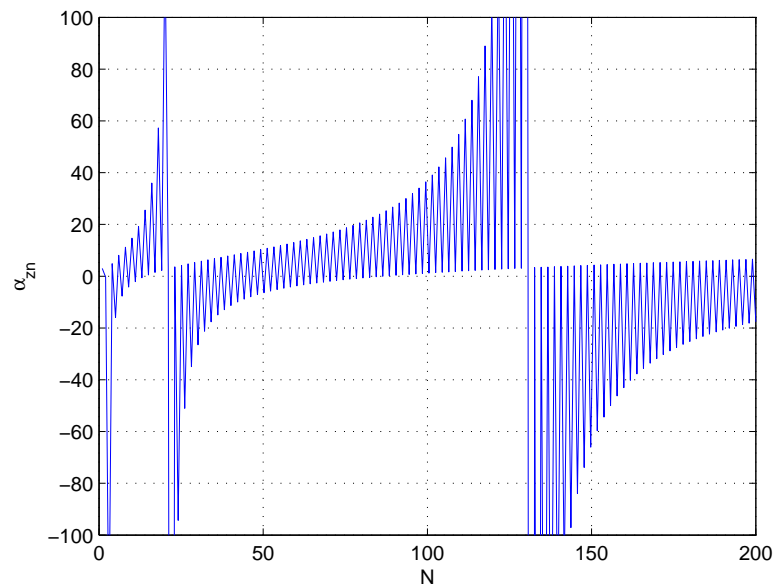
Kuva 7.4: Normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus

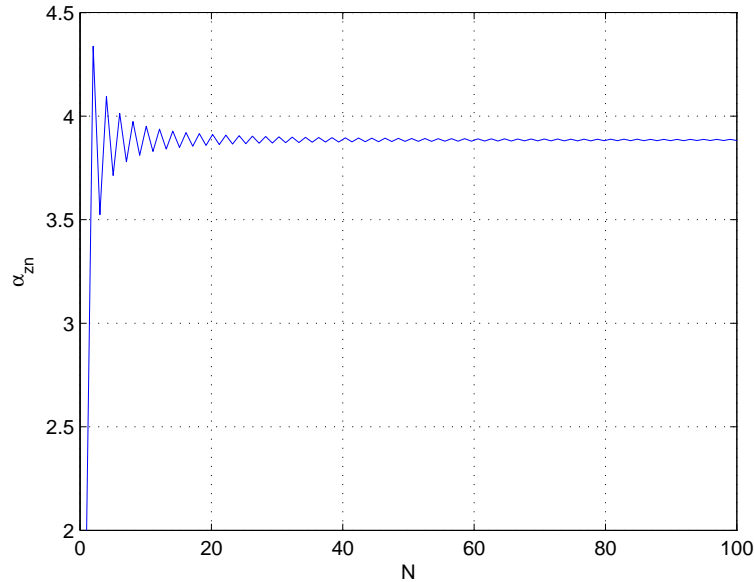


Kuva 7.5: Normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, vertailuna CM:llä laskettu polarisoituvuus



Kuva 7.6: Normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus, vertailuna CM:llä laskettu polarisoituvuus

Kuva 7.7: Aksiaalinen polarisoituvuus: ratkaisun suppeneminen, $\epsilon_r = 0$ Kuva 7.8: Aksiaalinen polarisoituvuus: ratkaisun suppeneminen, $\epsilon_r = -2$



Kuva 7.9: Aksiaalinen polarisoituvuus: ratkaisun suppeneminen, $\epsilon_r = -5$

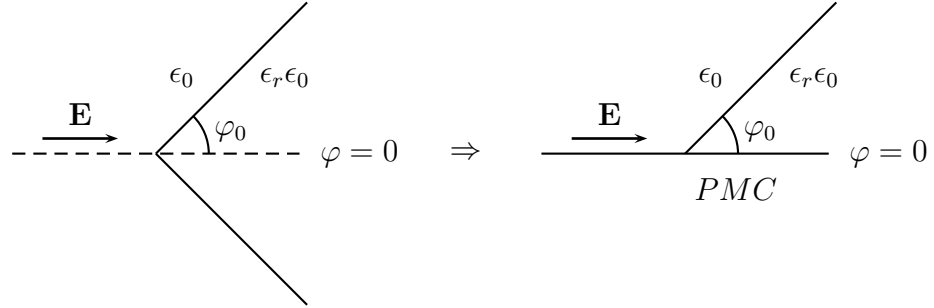
7.2.1 Suorakulmaisen kiilan aiheuttama singularisuus

Jos kahden dielektrisen väliaineen rajapinta on kiilamainen, on tunnettua, että sähkökenttä kiilan kärjessä on mahdollisesti singulaarinen [19, 20]. Puolipallon tapauksessa pallon ja ympäröivän väliaineen välille muodostuu paikallisesti 90° kulma. Tilanne on pyörähdyssymmetrinen, ja puolipallon kehän kaarevuussäde pallon nurkkaan nähden on suuri, joten sitä voidaan analysoida kaksiulotteisesti artikkelien [19] ja [20] tapaan.

Asetetaan 90° kiila polaarikoordinaatistoon symmetrisesti kulman $\varphi = 0$ suhteen. Tällöin rajapinta sijaitsee kulmassa $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{4}$. Ulkoisen sähkökentän orientaation perusteella voidaan muodostaa kaksi ortogonaalista tilannetta, jotka voidaan tarkastella erikseen. Yleinen kenttä on lineaarikombinaatio näistä kahdesta kenttäkomponentista.

Symmetrinen tilanne

Symmetrisessä tilanteessa potentiaalifunktio on symmetrinen tason $\varphi = 0$ suhteen. Tällöin taso $\varphi = 0$ toteuttaa magneettijohteen rajapintaehdon, eli sähkökenttä on tason suuntainen.



Kuva 7.10: Symmetrinen tilanne. Taso $\varphi = 0$ voidaan ajatella korvattavan mängeettijohdetasolla

Potentiaalifunktio voidaan kirjoittaa [20]

$$\phi_1 = A\rho^t \cos(t\varphi), \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \quad (7.5)$$

$$\phi_2 = B\rho^t \cos[t(\pi - \varphi)], \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}, \quad (7.6)$$

ja vastaavat sähkökentän lausekkeet ovat

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1 = -\mathbf{u}_\rho A t \rho^{t-1} \cos(t\varphi) + \mathbf{u}_\varphi A \rho^{t-1} t \sin(t\varphi) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla\phi_2 = -\mathbf{u}_\rho B t \rho^{t-1} \cos[t(\pi - \varphi)] - \mathbf{u}_\varphi B \rho^{t-1} t \sin[t(\pi - \varphi)] \quad (7.8)$$

Rajapinnalla $\varphi = \varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ täytyy sähkökentän tangentialikomponentin sekä sähkövuontiheyden normaalikomponentin olla jatkuvia. Soveltamalla sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuusehtoa yhtälöihin (7.7) ja (7.8) voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_2(\varphi_0),$$

mistä seuraa

$$-A t \rho^{t-1} \cos\left(t\frac{\pi}{4}\right) = -B t \rho^{t-1} \cos\left(t\frac{3\pi}{4}\right). \quad (7.9)$$

Merkitään $\alpha = t\frac{\pi}{4}$, jolloin

$$A \cos \alpha = B \cos 3\alpha. \quad (7.10)$$

B :lle saadaan

$$B = A \frac{\cos \alpha}{\cos 3\alpha}. \quad (7.11)$$

Vastaavasti, sähkövuontiheyden, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, normaalikomponentin jatkuvuuden,

$$\epsilon_r \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_2(\varphi_0),$$

perusteella saadaan

$$\epsilon_r A \rho^{t-1} t \sin\left(t \frac{\pi}{4}\right) = -B \rho^{t-1} t \sin\left(t \frac{3\pi}{4}\right) \quad (7.12)$$

Jälleen, merkitsemällä $\alpha = t \frac{\pi}{4}$ voidaan kirjoittaa

$$\epsilon_r A \sin \alpha = -B \sin 3\alpha. \quad (7.13)$$

Sijoittamalla B yhtälöstä (7.11) ja jakamalla $A \sin \alpha$:lla saadaan

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= -\frac{\cos \alpha}{\cos 3\alpha} \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} \\ &= -\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha)} \frac{\sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1)}{\sin \alpha} \\ &= -\frac{4[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)] - 1}{1 - 4[\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)]} \\ &= \frac{1 - 2 - 2 \cos 2\alpha}{1 - 2 + 2 \cos 2\alpha} \\ &= \frac{1 + 2 \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Tällöin

$$\cos 2\alpha = \frac{1 \epsilon_r - 1}{2 \epsilon_r + 1}. \quad (7.15)$$

Kirjoittamalla takaisin auki $\alpha = t \frac{\pi}{4}$ saadaan parametrille t yhtälö

$$\cos\left(t \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 \epsilon_r - 1}{2 \epsilon_r + 1}. \quad (7.16)$$

Nähdään, että t riippuu suhteellisesta permittiivisyydestä, ja sillä on ääretön määrä ratkaisuja. Fysikaaliset ratkaisut kuitenkin edellyttävät, että $t \geq 0$. Ratkaiseva arvo on pienin mahdollinen positiivinen t :n arvo, joka voidaan lausua arkuskosinin päähaaran avulla

$$t = \frac{2}{\pi} \arccos\left(\frac{1 \epsilon_r - 1}{2 \epsilon_r + 1}\right). \quad (7.17)$$

Potentiaalifunktion etäisyysriippuvuus kulmasta on muotoa ρ^t , mutta sähkökentän muotoa ρ^{t-1} . Tällöin, jos $t < 1$, sähkökenttä on singulaarinen. Jos

suhteelliselle permittiivisyydelle sallitaan negatiivisia arvoja, seuraa ongelmia myös potentiaalifunktiossa. Tämä nähdään yhtälöstä (7.16). Reaalisilla kullilla kosini saa arvoja väliltä $[-1,1]$, eli voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \leq 1 \\ -2 &\leq \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \leq 2 \\ -2\epsilon_r - 2 &\leq \epsilon_r - 1 \leq 2\epsilon_r + 2 \\ \epsilon_r &\leq -3, \quad \epsilon_r \geq -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Jos $-3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$, parametri $t = a + jb$ on kompleksinen, jolloin myös potentiaali ja sähkökenttä ovat kompleksisia. Potentiaali kiilan sisällä on tällöin muotoa

$$\begin{aligned} \phi_1 &= A\rho^{a+jb} \cos[(a + jb)\varphi] \\ &= A\rho^a \rho^{jb} [\cos(a\varphi) \cos(jb\varphi) + \sin(a\varphi) \sin(jb\varphi)] \\ &= A\rho^a e^{jb \ln \rho} [\cos(a\varphi) \cosh(b\varphi) - j \sin(a\varphi) \sinh(b\varphi)] \\ &= A\rho^a [\cos(b \ln \rho) + j \sin(b \ln \rho)] [\cos(a\varphi) \cosh(b\varphi) - j \sin(a\varphi) \sinh(b\varphi)], \end{aligned} \tag{7.18}$$

eli lähellä nurkkaa, $\rho = 0$, kenttä värähtelee äärettömän nopeasti. Tämä tekee numeeriset laskut permittiivisyyden arvoilla $-3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$ hyvin hankaliksi, jollei täysin mahdottomiksi. Sama havainto on tehty artikkelissa [21].

Antisymmetrinen tilanne

Antisymmetrisessä tapauksessa potentiaalifunktio on antisymmetrinen tason $\varphi = 0$ suhteen. Tällöin vastaava sähkökenttä on kohtisuorassa tasoa vastaan, ja taso toteuttaa ideaalijohteen ehdon.

Potentiaalifunktio on muotoa

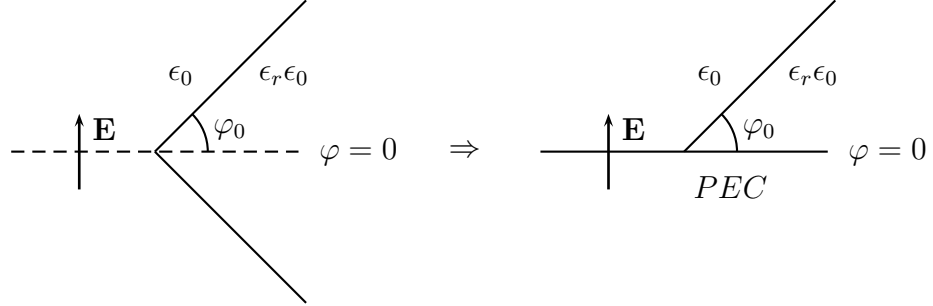
$$\phi_1 = A\rho^t \sin(t\varphi), \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \tag{7.19}$$

$$\phi_2 = B\rho^t \sin[t(\pi - \varphi)], \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}, \tag{7.20}$$

ja vastaavat sähkökentät ovat

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1 = -\mathbf{u}_\rho A t \rho^{t-1} \sin(t\varphi) - \mathbf{u}_\varphi A \rho^{t-1} t \cos(t\varphi) \tag{7.21}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla\phi_2 = -\mathbf{u}_\rho B t \rho^{t-1} \sin[t(\pi - \varphi)] + \mathbf{u}_\varphi B \rho^{t-1} t \cos[t(\pi - \varphi)] \tag{7.22}$$



Kuva 7.11: Antisymmetrinen tilanne. Taso $\varphi = 0$ voidaan ajatella korvattavan ideaalijohdetasolla

Merkitään jälleen $\alpha = t\varphi_0 = t\frac{\pi}{4}$. Sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuusehdosta,

$$\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_2(\varphi_0),$$

saadaan

$$A \sin \alpha = B \sin 3\alpha. \quad (7.23)$$

B :lle saadaan

$$B = A \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}. \quad (7.24)$$

Vastaavasti sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehdon,

$$\epsilon_r \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_e(\varphi_0),$$

perusteella voidaan kirjoittaa

$$-\epsilon_r A \cos \alpha = B \cos 3\alpha. \quad (7.25)$$

Tällöin

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= -\frac{\sin \alpha \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - 2 \cos 2\alpha}{1 + 2 \cos 2\alpha} \end{aligned} \quad (7.26)$$

ja

$$\cos 2\alpha = \cos \left(t\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1 - \epsilon_r}{2\epsilon_r + 1}. \quad (7.27)$$

Merkittävin t :n arvo voidaan ratkaista yhtälöstä

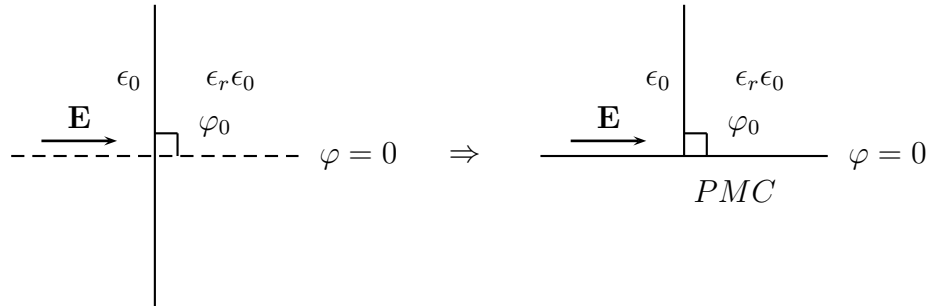
$$t = \frac{2}{\pi} \arccos \left(-\frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right). \quad (7.28)$$

Kuten symmetrisessäkin tapauksessa, jos $-3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$, parametri t on kompleksinen.

7.2.2 Tasaisen pinnan aiheuttama singularisuus

Myös tasainen pinta, tässä tapauksessa puolipallon pohja, saattaa aiheuttaa ongelmia erikoistapauksessa $\epsilon_r = -1$. Analysoidaan tasoa kiilana, jossa rajapinnan kulma $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$. Tällaisen kulman voidaan ajatella sijaitsevan tason jokaisessa pisteessä.

Symmetrinen tilanne



Kuva 7.12: Symmetrinen tilanne

Kirjoitetaan potentiaalifunktio muodossa

$$\phi_1 = A\rho^t \cos(t\varphi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (7.29)$$

$$\phi_2 = B\rho^t \cos[t(\pi - \varphi)], \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (7.30)$$

ja vastaavat sähkökentän lausekkeet ovat

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1 = -\mathbf{u}_\rho A t \rho^{t-1} \cos(t\varphi) + \mathbf{u}_\varphi A \rho^{t-1} t \sin(t\varphi) \quad (7.31)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla\phi_2 = -\mathbf{u}_\rho B t \rho^{t-1} \cos[t(\pi - \varphi)] - \mathbf{u}_\varphi B \rho^{t-1} t \sin[t(\pi - \varphi)] \quad (7.32)$$

Soveltamalla sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuusehtoa,

$$\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_2(\varphi_0),$$

yhtälöihin (7.31) ja (7.32) saadaan

$$A \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) = B \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right). \quad (7.33)$$

Toisaalta, sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehdon,

$$\epsilon_r \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_e(\varphi_0),$$

perusteella saadaan

$$\epsilon_r A \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) = -B \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right). \quad (7.34)$$

Huomataan, etteivät yhtälöt (7.33) ja (7.34), mielivaltaisilla ϵ_r :n ja t :n arvoilla, voi olla yhtä aikaa voimassa. Pienin mahdollinen t :n arvo, joka toteuttaa rajapintaehdot on $t = 1$. Tällöin $\cos(t\frac{\pi}{2}) = 0$, ja jää jäljelle vain yhtälö (7.34). Saadaan

$$A = -\frac{B}{\epsilon_r}. \quad (7.35)$$

Erikoistapauksessa $\epsilon_r = -1$ molemmat yhtälöistä (7.33) ja (7.34) voivat kuitenkin toteutua. Tällöin t voi tämän analyysin perusteella saada minkä tahansa arvon. Numeerisissa laskuissa ilmenee potentiaalin kuvaajissa puolipallon tasaisella pinnalla voimakasta värähtelyä paikan suhteen.

Antisymmetrinen tilanne

Potentiaalifunktio on muotoa

$$\phi_1 = A\rho^t \sin(t\varphi), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (7.36)$$

$$\phi_2 = B\rho^t \sin[t(\pi - \varphi)], \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (7.37)$$

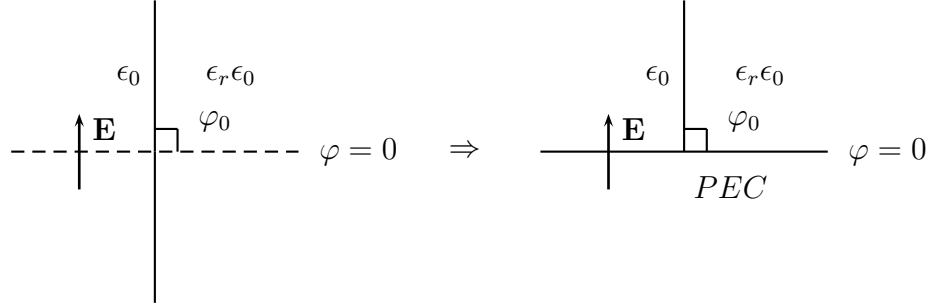
ja vastaavat sähkökentät ovat

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1 = -\mathbf{u}_\rho A t \rho^{t-1} \sin(t\varphi) - \mathbf{u}_\varphi A \rho^{t-1} t \cos(t\varphi) \quad (7.38)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla\phi_2 = -\mathbf{u}_\rho B t \rho^{t-1} \sin[t(\pi - \varphi)] + \mathbf{u}_\varphi B \rho^{t-1} t \cos[t(\pi - \varphi)] \quad (7.39)$$

Soveltamalla sähkökentän tangentialikomponentin jatkuvuusehtoa,

$$\mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\rho \cdot \mathbf{E}_2(\varphi_0),$$



Kuva 7.13: Antisymmetrinen tilanne

yhtälöihin (7.38) ja (7.39) saadaan

$$A \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) = B \sin\left(t\frac{\pi}{2}\right). \quad (7.40)$$

Sähkövuontiheyden normaalikomponentin jatkuvuusehto,

$$\epsilon_r \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_1(\varphi_0) = \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{E}_e(\varphi_0),$$

johtaa yhtälöön

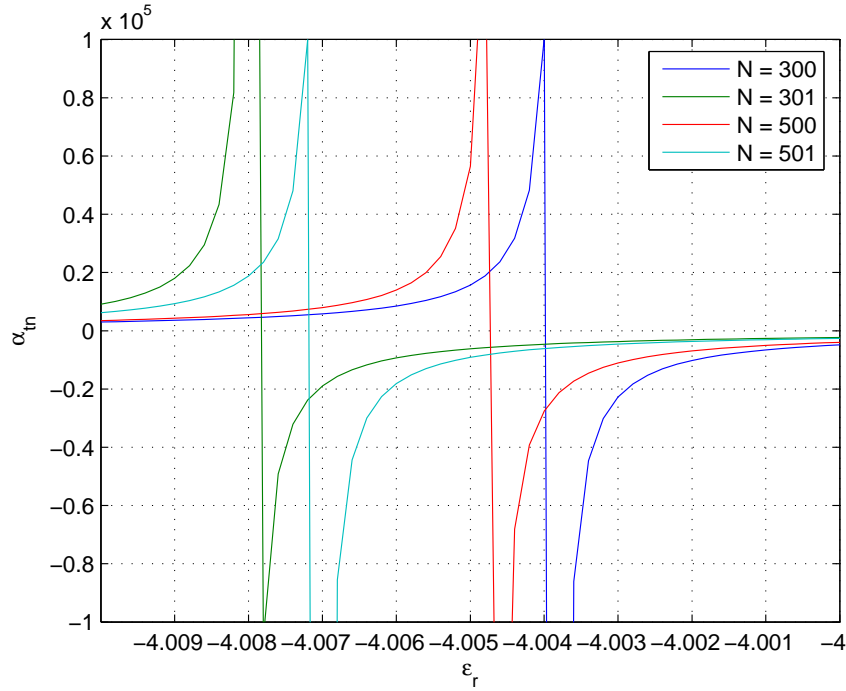
$$-\epsilon_r A \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right) = B \cos\left(t\frac{\pi}{2}\right). \quad (7.41)$$

Tässäkään tapauksessa yhtälöt (7.40) ja (7.41) eivät yleisessä tapauksessa voi toteutua yhtäaikaaisesti. Jos $t = 1$, vain yhtälö (7.40) jää jäljelle, ja saadaan $A = B$.

Erikoistapauksessa $\epsilon_r = -1$ yhtälöt kuitenkin voivat toteutua millä tahansa parametrin t arvolla.

7.3 Vertailu ellipsoidiin

Yhtälöt (7.16) ja (7.27) ennustavat potentiaalin singulaarisen käytöksen suhteellisen permittiivisyyden arvoilla $-3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$ sekä aksiaalisessa, että transversaalissa tapauksessa. Kuvasta 7.4 kuitenkin huomataan, että transversaalisen polarisoituvuuden tapauksessa yksi resonansseista sijaitsee tuon välin ulkopuolella, melko tarkasti kohdassa $\epsilon_r = -4$. Kuvassa 7.14 on laskettu tarkemmin transversaalista polarisoituvuutta permittiivisyyden $\epsilon_r = -4$ läheisyydessä. Huomataan, että kyseinen resonanssi on saatu paikallistettua kahden merkisevän numeron tarkkuudella.



Kuva 7.14: Normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus, käyttäytyminen $\epsilon_r = -4$ läheisyydessä

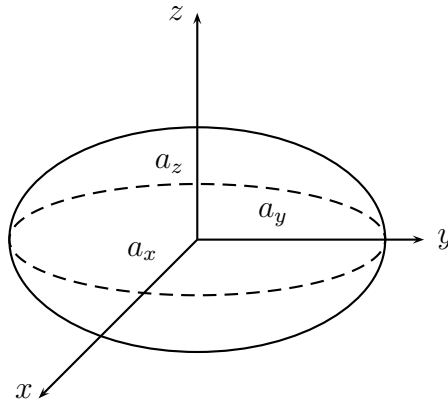
Kyseinen singulaarisuus ei siis kuitenkaan voi olla puolipallon terävien nurkkien aiheuttama. Voidaan kuitenkin ajatella, että jokaisella kappaleella on jokin sen geometriaan liittyvä perusresonanssi, kuten pallon tapauksessa permittiivisyyden arvolla $\epsilon_r = -2$. Pallon lisäksi myös ellipsoidit ovat geometrioita, joille Laplacen yhtälö voidaan ratkaista analyyttisesti, ja näiden polarisoituvuusdyadit voidaan laskea analyyttisesti [7]. Puolipallon voidaan ajatella etäisesti muistuttavan ellipsoidin erikoistapausta, *oblaattia sferoidia*, kuva 7.15, kun puoliakseleiksi valitaan $a_x = a_y = a$ ja $a_z = \frac{a}{2}$.

Oblaatin sferoidin transversaalinen polarisoituvuus saadaan kaavasta [7]

$$a_t = \frac{4\pi a_x a_y a_z \epsilon_0}{3} \frac{\epsilon_r - 1}{1 + N_t(\epsilon_r - 1)}, \quad (7.42)$$

missä *depolarisaatiokerroin*

$$N_t = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1 + e^2}{e^3} (e - \tan^{-1} e) \right], \quad (7.43)$$

Kuva 7.15: Oblaatti sferoidi, $a_x = a_y > a_z$

missä

$$e = \sqrt{\frac{a_x^2}{a_z^2} - 1}. \quad (7.44)$$

Polarisoituvuus (7.42) on singulaarinen, jos

$$1 + N_t(\epsilon_r - 1) = 0,$$

eli

$$\epsilon_r = 1 - \frac{1}{N_t}.$$

Kyseessä olevalle oblaatille sferoidille saadaan $e = \sqrt{3}$, jolloin $N_t \approx 0,2364$, ja $\epsilon_r \approx -3,23 < -3$.

Vastaavasti aksiaalinen polarisoituvuus on singulaarinen, jos

$$\epsilon_r = 1 - \frac{1}{N_z},$$

missä

$$N_z = \frac{1 + e^2}{e^3} (e - \tan^{-1} e). \quad (7.45)$$

Saadaan $\epsilon_r \approx -0,897$.

Transversaalissa tapauksessa nähdään, että kun kappaleen kentän suuntainen, transversaalinen mitta on suurempi kuin kenttää vasten kohtisuora, aksiaalinen mitta, siirtyy singulaarisuus negatiivisemmalle permittiivisyydelle, kuin pallon tapauksessa, jossa molemmat mitat, aksiaalinen ja transversaalinen, ovat yhtä suuret. Vastaavasti aksiaalisessa tapauksessa, jossa kentän

suuntainen mitta on pienempi kuin kenttää vasten kohtisuora mitta, oblaatin sferoidin polarisoituvuuden singulaarisuus sijaitsee palloon verrattuna positiivisemmalla permittiivisyydellä.

Oblaatin sferoidin transversaalisen polarisoituvuuden singulaarisuus ei siis sijaitse terävän nurkan aiheuttamien singulaarisuuksien alueella $-3 \geq \epsilon_r \geq -\frac{1}{3}$. Voidaan ajatella, että puolipallo vastaa muodoltaan vääristynyttä ellipsoidia siten, että kyseinen singulaarisuus olisi siirtynyt vieläkin negatiivisemmalle permittiivisyydelle, eli arvon $\epsilon_r = -4$ läheisyydessä havaittu stabiili singulaarisuus liittyisi tähän puolipallon transversaalisen ja aksiaalisen dimension suhteeseen.

Aksiaalisessa tapauksessa vastaava, dimensioiden aiheuttama polarisoituvuuden singulaarisuus liittyisi siis positiivisempaan permittiivisyyden arvoon kuin $\epsilon_r = -2$. Tällöin ollaan nurkan aiheuttamien singulaarisuuksien alueella, eikä yksittäinen singulaarisuus erotu joukosta. Dimensioihin liittyvän staattisen resonanssin pohdinta jää kuitenkin teoreettiselle ajatustasolle, eikä sitä pystytä tässä yhteydessä analyttisesti todistamaan.

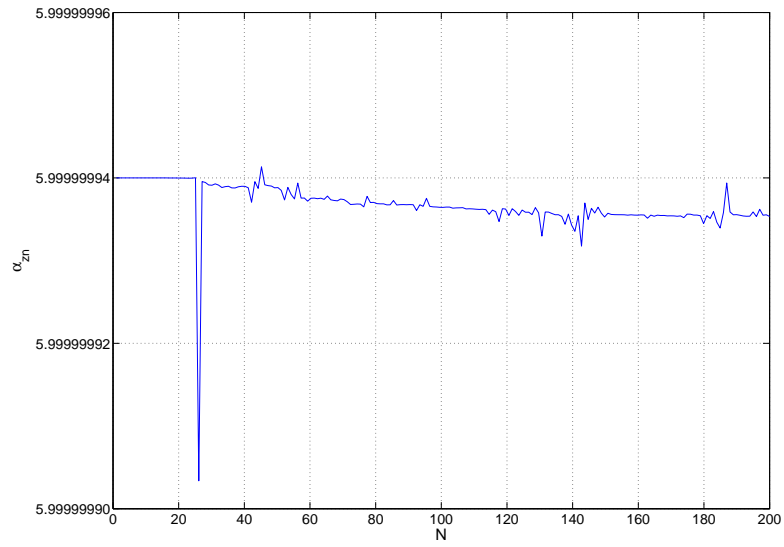
7.4 Vastakkaismerkkiset permittiivisyydet

Tasaisen pinnan analyysin yhteydessä huomattiin, että permittiivisyyden arvo $\epsilon_r = -1$ on kiinnostava erikoistapaus. Laskettaessa polarisoituvuuksia yhtälöiden (4.31) ja (4.56) avulla, tulos näyttäisi yllättäen suppenevan, tosin Matlab ilmoittaa isoilla N :n arvoilla syntyvien matriisien olevan pahasti singulaarisia, eikä tuloksiin välttämättä voi luottaa. Hyvin pienillä N :n arvoilla sen sijaan yhtälöryhmällä näyttäisi olevan tarkka ratkaisu. Kuvissa 7.16 ja 7.17 on esitetty tulosten suppeneminen sekä aksiaalisessa, että transversaalisisessa tilanteessa. Saadaan $\alpha_{zn} \approx 6$ ja $\alpha_{tn} \approx -3$.

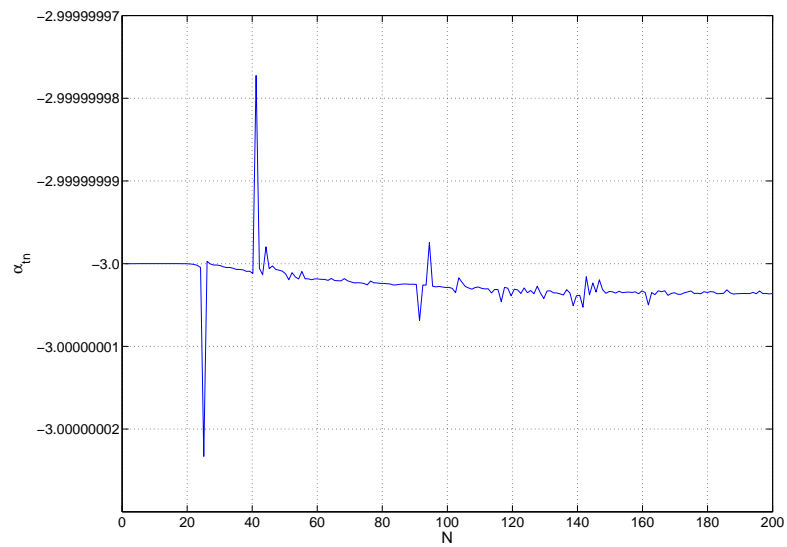
Vastaava tilanne syntyy kaksoispuolipallon tilanteessa, jos valitaan $\epsilon_{r1} = \epsilon_r$ ja $\epsilon_{r2} = -\epsilon_r$ (ks. kuva 7.18). Tällaisen tyhjiössä sijaitsevan kaksoispuolipallon polarisoituvuus havaitaan permittiivisyyden arvosta ϵ_r riippumattomaksi. Normalisoiduksi aksiaaliseksi polarisoituvuudeksi saadaan $\alpha_{zn} \approx 3$ ja transversaaliseksi $\alpha_{zn} \approx -1,5$. Ero edellä oleviin puolipallon tuloksiin syntyy, kun normalisoinnin yhteydessä tulos jaetaan puolipalloon nähden kaksinkertaisella tilavuudella. Huomataan, että kyseiset arvot vastaavat tarkalleen homogeenisen ideaalijohde-, sekä magneettijohdepallon polarisoituvuuksia, ks. (6.4) ja (6.21). Huomataan myös, että kyseisenlaisen kaksoispuolipallon keskimääräinen normalisoitu polarisoituvuus

$$\alpha_{av} = \frac{2\alpha_{tn} + \alpha_{zn}}{3} = 0,$$

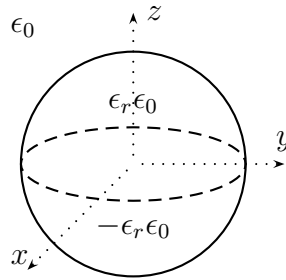
eli keskimäärin kyseinen pallo ei aiheuttaisi minkäänlaista vastetta.



Kuva 7.16: Normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, ratkaisun suppeneminen, $\epsilon_r = -1$



Kuva 7.17: Normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, ratkaisun suppeneminen, $\epsilon_r = -1$



Kuva 7.18: Kaksoispuolipallo, joka permittiivisyydet ovat toistensa vastalukuja

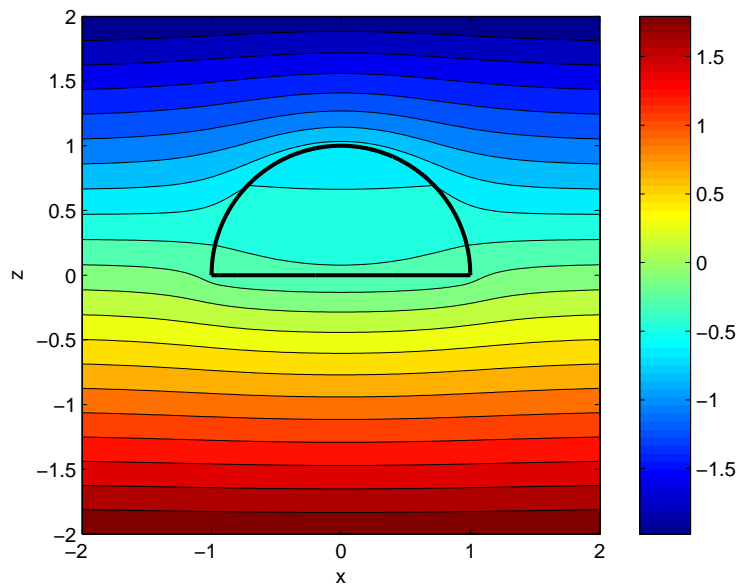
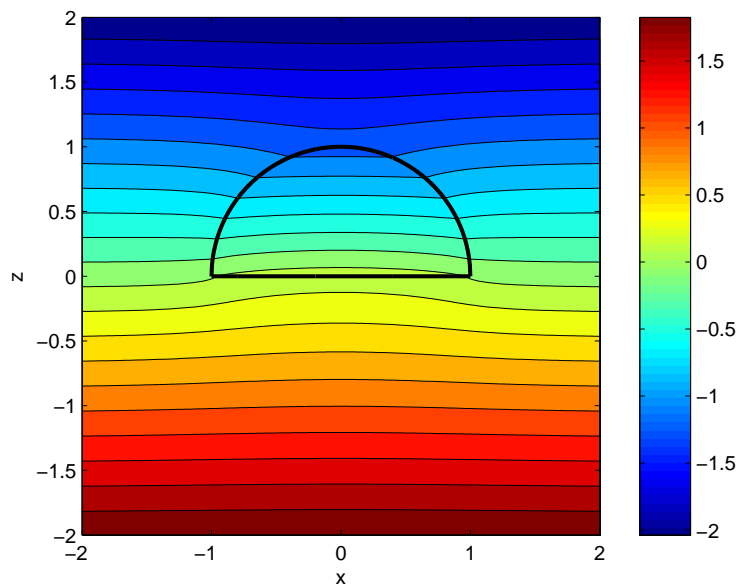
7.5 Potentiaalijakaumat

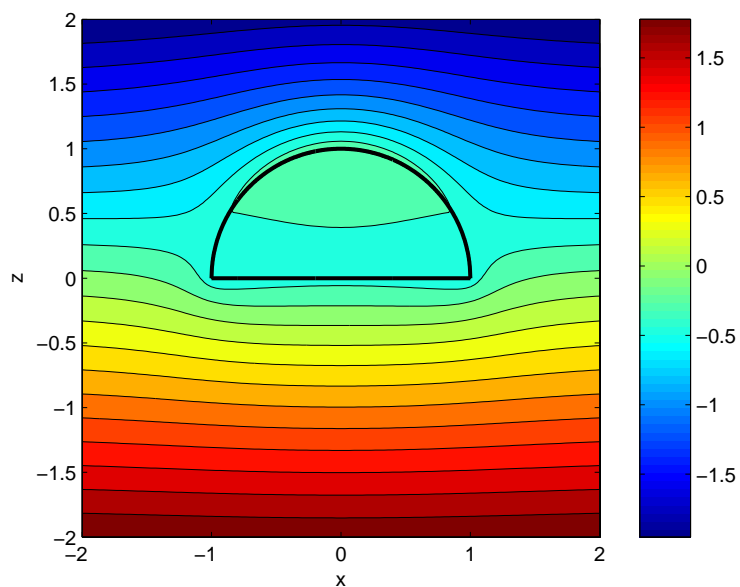
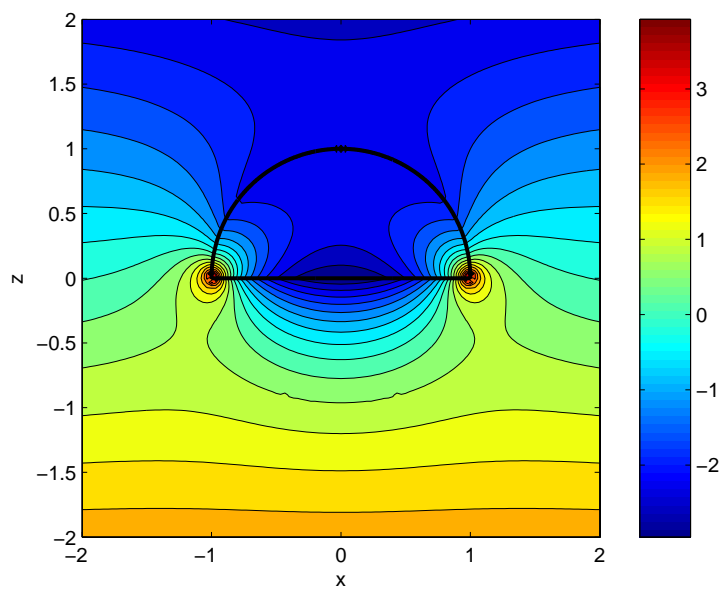
Aksiaalisen ulkoisen sähkökentän tapauksessa potentiaalifunktio on ratkaistavissa yhtälöistä (4.3)-(4.5) ja transversaalissa tapauksessa yhtälöistä (4.45)-(4.44). Piirretään poikkileikkauskuva xz -tasossa puolipallon ja tätä ympäröivän alueen potentiaali-jakaumasta. Erityisesti kiinnostavat jakaumat negatiivisilla permittiivisyyksillä staattisten resonanssien kohdalla.

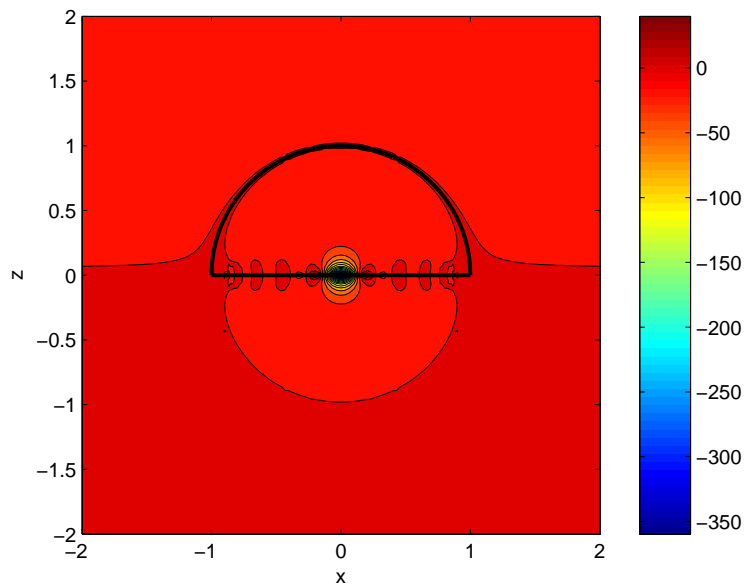
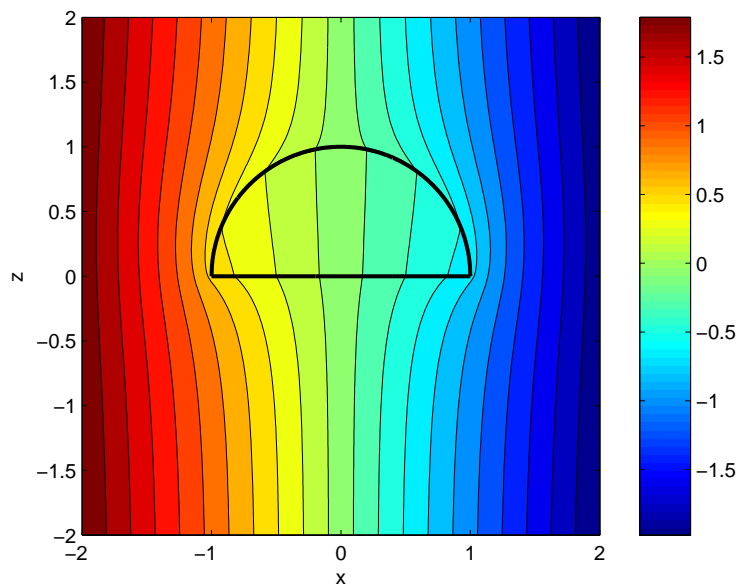
Kuvissa 7.19 - 7.23 on esitetty potentiaali aksiaalisen, sekä kuvissa 7.24 - 7.26 transversaalisen sähkökentän tapauksessa eri puolipallon permittiivisyyden arvoilla, kun matriisiyhtälössä $N = 300$. Positiivisilla permittiivisyyksillä potentiaalin nähdään käyttäytyvän kauniisti. Myöskään itseisarvoltaan suurilla, negatiivisilla permittiivisyyksillä ei ole ongelmia, ja ratkaisu saadaan suppenemaan. Sen sijaan ongelma-alueella $-3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$ puolipallon nurkkiin ilmestyy singulaarisuuksia. Nähdään, että potentiaalin arvo paikallisesti on suurempi kuin ulkoisen herätekentän. Varsinaisiin potentiaalin lukuarvoihin ei tällöin kuitenkaan voida luottaa, mutta voitaneen uskoa, että potentiaalin jakauman muoto vastanee todellisuutta.

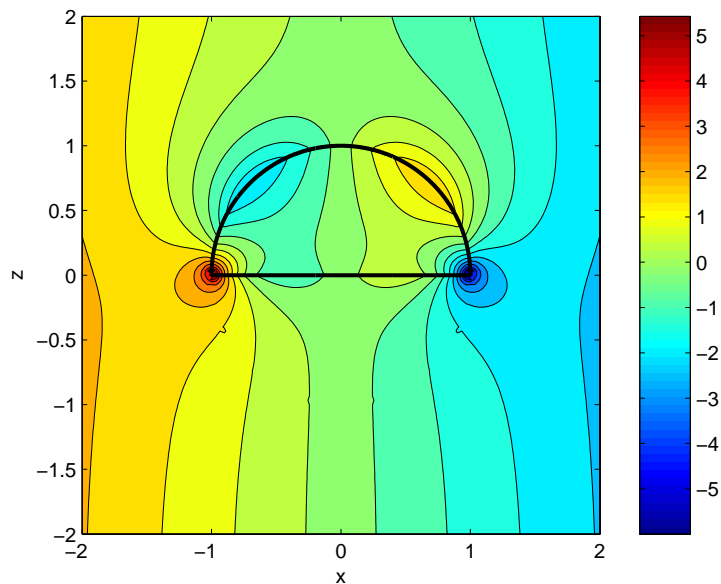
Tilanne $\epsilon_r = -1$ on mielenkiintoinen. Kuvista 7.23 ja 7.26 nähdään, että singulaarisuudet ovat kerääntyneet puolipallon tasaiselle pohjapinnalle, kuten luvun 7.2.2 perusteella voitiin odottaakin.

Kuvassa 7.27 on potentiaali-jakauma transversaalissa tilanteessa, kun $\epsilon_r = -4$. Kyseisen permittiivisyyden arvon läheisyydessä havaittiin laskennan kannalta melko stabiili singulaarisuus. Huomataan, että maksimit syntyvät ainoastaan puolipallon nurkkiin, ja tilanne muistuttaa lähinnä hieman vääristynyttä dipolin potentiaali-jakaumaa. Vertailuna kuvassa 7.28 on kokonaisen homogeenisen pallon potentiaalin jakauma, kun permittiivisyys lähestyy arvoa $\epsilon_r = -2$.

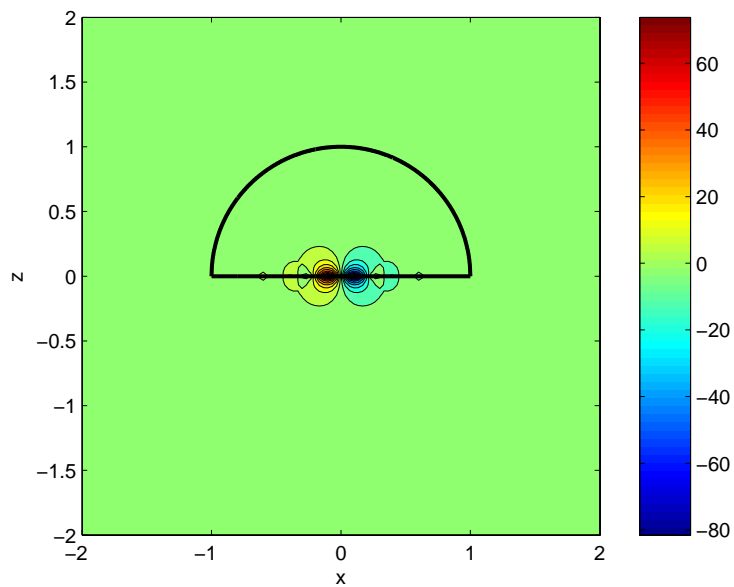
Kuva 7.19: Aksiaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = 5$ Kuva 7.20: Aksiaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = 0,5$

Kuva 7.21: Aksiaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = -10$ Kuva 7.22: Aksiaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = -2$

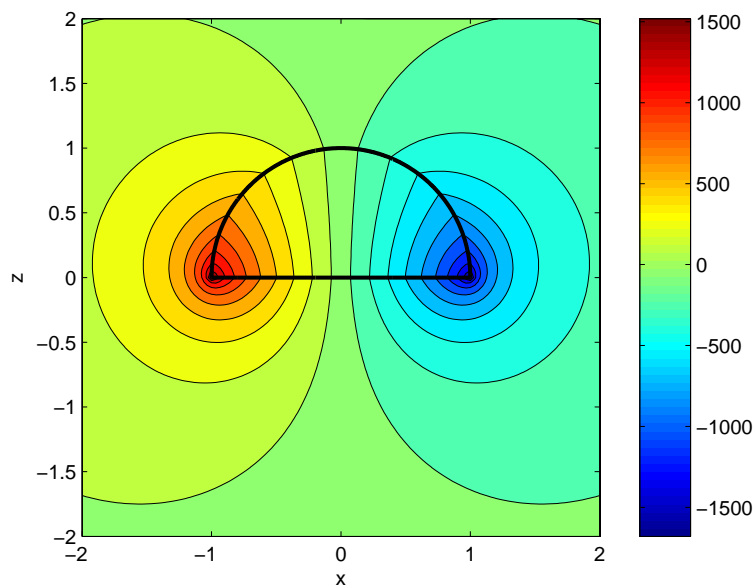
Kuva 7.23: Aksiaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = -1$ Kuva 7.24: Transversaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = 5$



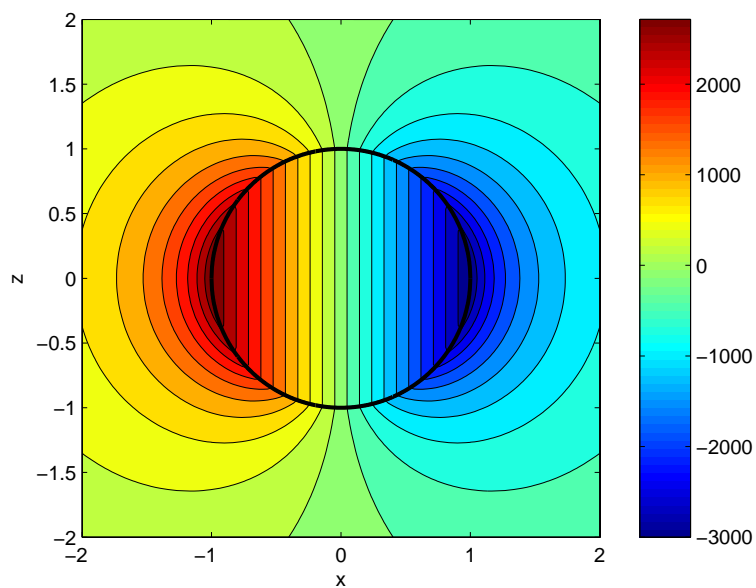
Kuva 7.25: Transversaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = -2$



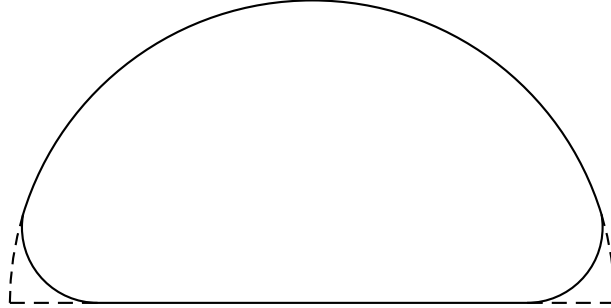
Kuva 7.26: Transversaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = -1$



Kuva 7.27: Transversaalinen tilanne, potentiaali xz -tasossa, $\epsilon_r = -4$



Kuva 7.28: Homogeenisen pallon potentiaali transversaaliossa xz -tasossa, $\epsilon_r \rightarrow -2$



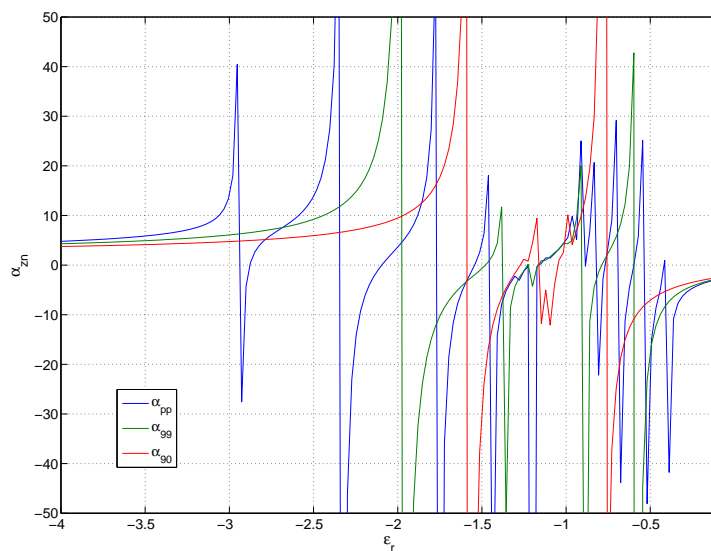
Kuva 7.29: Puolipallon nurkan pyöristys

7.6 Puolipallon kulmien pyöristäminen

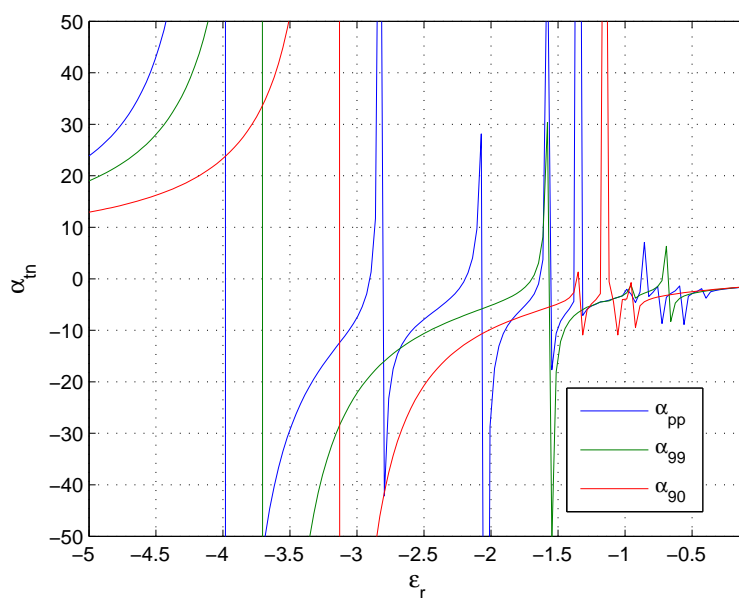
Puolipallon terävien nurkkien vaikutusta polarisoituvuuden singulaarisuuksiin voidaan tutkia numeerisesti CM:n avulla pyöristämällä kulmia siten, ettei nurkkaan enää muodostu terävää suorakulmaista kiilaa. Pyöristetään terävää nurkkaa siten, että ensin jäljelle jäävän kappaleen tilavuus on likimain 99% alkuperäisen puolipallon tilavuudesta. Tehdään tämän jälkeen suurempi pyöristys, jonka jälkeen alkuperäisestä tilavuudesta on jäljellä enää 90%.

Kuvista 7.30 ja 7.31 havaitaan hieman yllättäen, että kulmien pyöristyksen jälkeenkin polarisoituvuuksien kuvaajissa näkyy useita singulaarisuuksia. Alueen, jolla singulaarisuudet esiintyvät, nähdään kuitenkin kaventuvan, ja mitä enemmän kulmia pyöristetään, sitä kapeammalla alueella singulaarisuudet sijaitsevat. Kulmien pyöristäminen saa puolipallon muistuttamaan yhä enemmän oblaattia sferoidia, ja kuvasta 7.31 voidaankin nähdä, että uloin ($\epsilon_r = -4$):ssä sijainnut singulaarisuus on siirtynyt lähelle oblaatin sferoidin arvoa, $\epsilon_r \approx -3,23$, joka voitiin laskea kaavasta (7.42).

Kuten todettiin, singulaarisuuksia on pyöristyksen jälkeenkin useita. Ilmeisesti voidaan todeta, että mikä tahansa poikkeama pallo- tai ellipsoidigeometriasta, saa aikaan sen, että kappaleen vasteen singulaarisuudet ovat jakautuneet useille permittiivisyyksille.



Kuva 7.30: Puolipallon nurkan pyöristyksen vaikutus aksiaaliseen polarisoi-
vuuteen



Kuva 7.31: Puolipallon nurkan pyöristyksen vaikutus transversaaliseen polari-
soituvuuteen

7.7 Singulaarisuuksien määrittäminen ominisarvoyhtälöstä

Potentiaalin sarjakehitelmän kertoimien ratkaisua varten jouduttiin muodostamaan matriisiyhtälö, joka polarisoituvuuksien kuvaajia laskettaessa joudutaan ratkaisemaan jokaisella permittiivisyyden arvolla uudelleen. Polarisoituvuuden singulaarisuus johtuu tällöin kyseisen matriisin singulaarisuudesta. Tällöin kyseinen matriisiyhtälö voidaan yrittää saada *yleistetyn ominisarvoyhtälön* muotoon,

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{Bx},$$

jonka ominisarvoina λ saadaan suoraan singulaarisuuksia aiheuttavat permittiivisyyden arvot.

7.7.1 Aksiaalinen tilanne

Aksiaalisen polarisoituvuuden tapauksessa ratkaistavana on matriisiyhtälö (4.32). Nyt

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & k \text{ parillinen} \\ \frac{1}{\epsilon_r}, & k \text{ pariton.} \end{cases}$$

Pyritään saamaan ϵ_r -riippuvuus ulos matriisin alkioista. Kaavasta (4.33) nähdään, että parillisilla k

$$\begin{aligned} M_{kn} &= a^{-(n+2)} [(n+1) + k\epsilon_r + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k} \\ &= a^{-(n+2)} [(n+1) + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k} + a^{-(n+2)} (k\epsilon_r) U_{n,k} \\ &= M_{1kn} + \epsilon_r M_{2kn}. \end{aligned}$$

Vastaavasti parittomilla k

$$\begin{aligned} M_{kn} &= a^{-(n+2)} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (n+1) + k + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k \right] U_{n,k} \\ &= a^{-(n+2)} [k + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k} + a^{-(n+2)} \left[\frac{1}{\epsilon_r} (n+1) \right] U_{n,k} \\ &= M_{3kn} + \frac{1}{\epsilon_r} M_{4kn}. \end{aligned}$$

Kerrotaan matriisin M parittomat rivit ϵ_r :llä. Vastaavasti joudutaan yhtälön oikealla puolella parittomat alkiot jakamaan ϵ_r :llä. Matriisiyhtälö (4.32) saadaan muotoon

$$\tilde{M}\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{A}},$$

mikä auki kirjoitettuna on muotoa

$$\begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0N} \\ \epsilon_r M_{10} & \epsilon_r M_{11} & \dots & \epsilon_r M_{1N} \\ M_{20} & M_{21} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_r M_{N0} & \epsilon_r M_{N1} & \dots & \epsilon_r M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \frac{1}{\epsilon_r} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{\epsilon_r} A_N \end{bmatrix}, \quad (7.46)$$

missä N on oletettu parittomaksi. Tällöin matriisi \tilde{M} voidaan jakaa ϵ_r -riippuvuuden perusteella kahteen osaan

$$\tilde{M} = L_1 - \epsilon_r L_2, \quad (7.47)$$

missä

$$L_{1kn} = \begin{cases} a^{-(n+2)} [(n+1) + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k}, & k \text{ parillinen} \\ a^{-(n+2)}(n+1)U_{n,k}, & k \text{ pariton,} \end{cases} \quad (7.48)$$

ja

$$L_{2kn} = \begin{cases} -a^{-(n+2)}kU_{n,k}, & k \text{ parillinen} \\ -a^{-(n+2)} [k + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k}, & k \text{ pariton.} \end{cases} \quad (7.49)$$

Singulaarisessa tapauksessa matriisiyhtälö antaa vasteen ilman herätettä. Tutkitaan siis tilannetta

$$\tilde{M}\mathbf{B} = 0,$$

jolloin yhtälön (7.47) perusteella voidaan kirjoittaa

$$L_1\mathbf{B} = \epsilon_r L_2\mathbf{B}, \quad (7.50)$$

mikä on muodoltaan yleistetty ominisarvoyhtälö, jonka ratkaisut, ominisarvot ϵ_r , ovat ratkaistavissa Matlabin avulla.

Täten laskettuna ominisarvoksi tulee myös negatiivinen äärettömyys, mikä on virheellinen tulos, sillä aiemmat raja-arvotarkastelut osoittivat, että ratkaisu suppenee myös ideaalijohteen tapauksessa, eli permittiivisyyden lähestyessä positiivista tai negatiivista äärettömyyttä. Virheellinen ominisarvo johtuu luultavasti siitä, että matriisiin on otettu mukaan alkioita arvoilla $k = 0$ ja $n = 0$. Kyseisiä alkoita, eli matriisin ensimmäistä riviä ja ensimmäistä saraketta ei todellisuudessa tarvita.

Kuvassa 7.32 on esitetty aksiaalisen tapauksen ominisarvot laskettuna matriisin koolla $N=100$. Suurimman osan ominisarvoista huomataan kasaantuvat arvon $\epsilon_r = -1$ ympärille. Ominisarvoja laskemalla voidaan helposti tutkia

reunimmaisten singulaarisuuksien käyttäytymistä matriisin koon N funktiona. Kuvassa 7.33 on esitetty aksiaalisen tapauksen 10 pienintä ominaisarvoa, ja kuvassa 7.34 10 suurinta. Huomataan, ettei tälläkään menetelmällä saada singulaarisuuksia kiinni.

7.7.2 Transversaalin tilanne

Transversaalin polarisoituvuuden tapauksessa matriisiyhtälön (4.57) parilliset rivit kerrotaan ϵ_r :llä. Tämän jälkeen menettelemällä kuten aksiaalisessa tapauksessa saadaan vastaava ominaisarvoyhtälö

$$L_1 \mathbf{B} = \epsilon_r L_2 \mathbf{B},$$

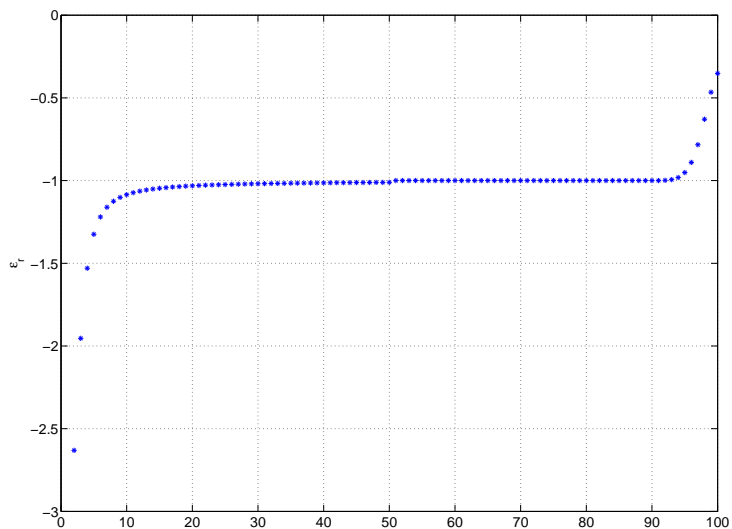
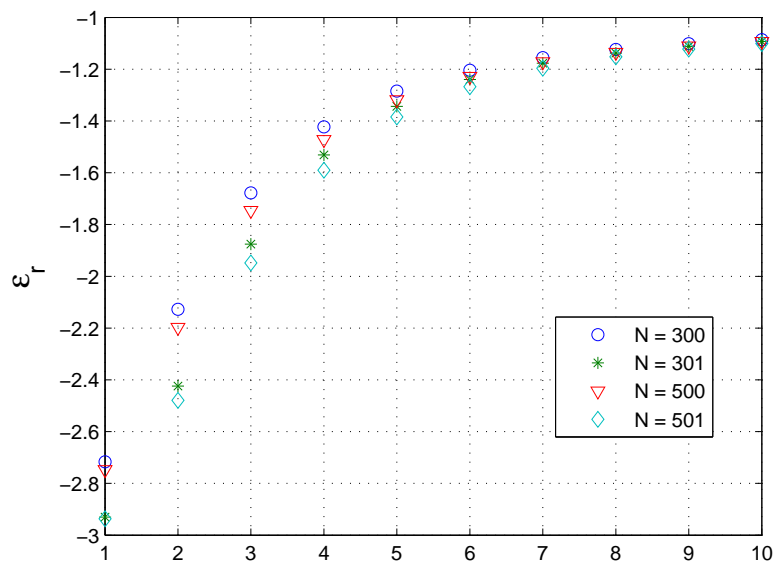
missä

$$L_{1kn} = \begin{cases} a^{-(n+2)} [(n+1) + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k}^1, & k \text{ pariton} \\ a^{-(n+2)}(n+1)U_{n,k}^1, & k \text{ parillinen,} \end{cases} \quad (7.51)$$

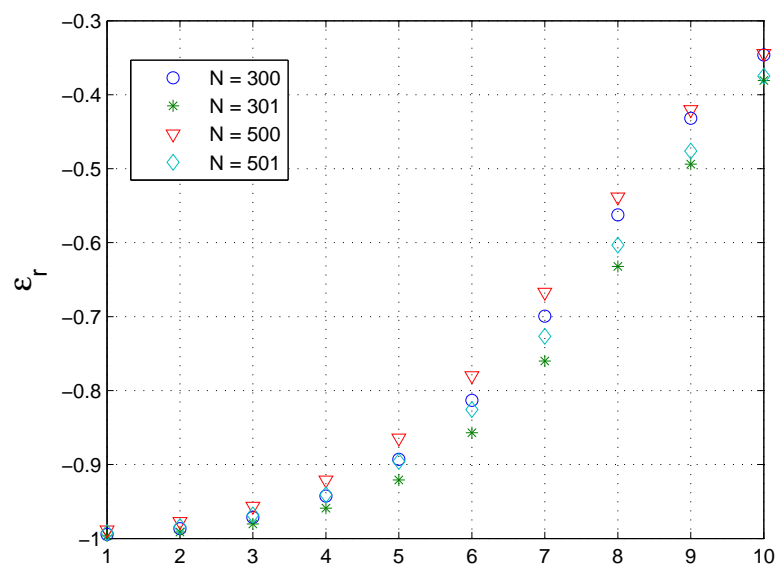
ja

$$L_{2kn} = \begin{cases} -a^{-(n+2)}kU_{n,k}^1, & k \text{ pariton} \\ -a^{-(n+2)} [k + (-1)^{n+k}(n+1) + (-1)^{n+k}k] U_{n,k}^1, & k \text{ parillinen.} \end{cases} \quad (7.52)$$

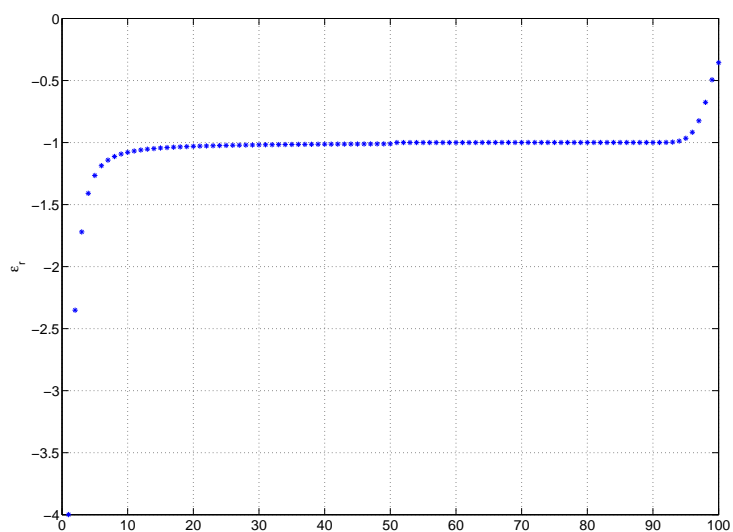
Kuvassa 7.35 on esitetty transversaalinen tapauksen ominaisarvot laskettuna matriisin koilla $N=100$. Kuvissa 7.36 ja 7.37 on esitetty transversaalisen tapauksen 10 pienintä ja 10 suurinta ominaisarvoa laskettuna eri matriisin koilla N . Muut ominaisarvot vaihtuvat matriisin koon mukana, mutta pienimmän ominaisarvon huomataan pysyvän melko hyvin arvon $\epsilon_r = -4$ lähetyvillä. Tämä antaa mahdollisuuden saada kyseinen singulaarisuus jäljitettyä vielä tarkemmin kuin aiemmin. Kuvassa 7.38 on esitetty ensimmäisen ominaisarvon käyttäytyminen matriisin koon N funktiona. Nähdään, että singulaarisuus sijaitsee neljän merkitsevän numeron tarkkuudella arvossa $\epsilon_r \approx -4,006$.

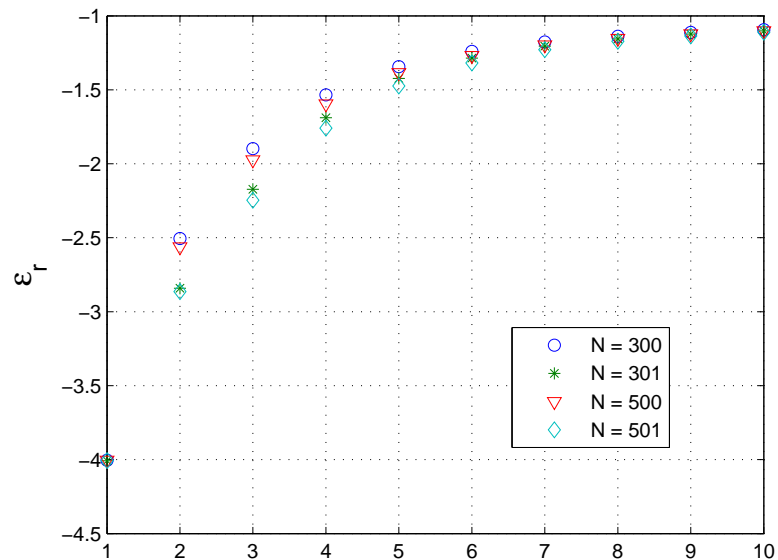
Kuva 7.32: Matriisin ominaisarvot aksiaalisessa tilanteessa, $N = 100$ 

Kuva 7.33: Aksiaalinen tilanne: 10 pienintä ominaisarvoa

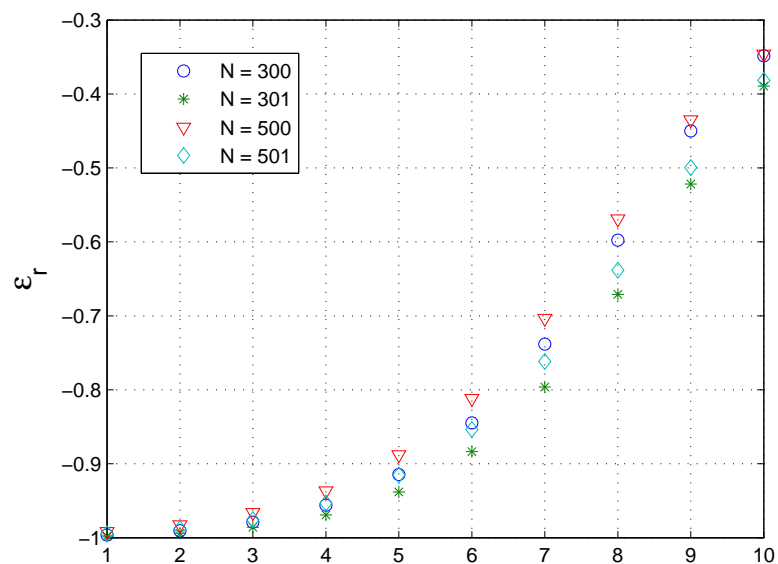


Kuva 7.34: Aksiaalinen tilanne: 10 suurinta ominaisarvoa

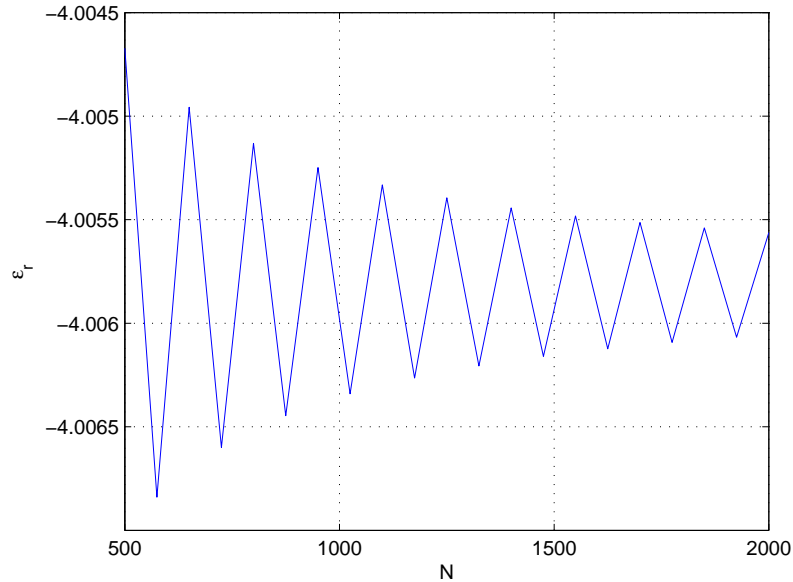
Kuva 7.35: Matriisin ominaisarvot transversaalissa tilanteessa, $N = 100$



Kuva 7.36: Transversaalin tilanne: 10 pienintä ominaisarvoa



Kuva 7.37: Transversaalin tilanne: 10 suurinta ominaisarvoa



Kuva 7.38: Transversaalin tilanne, ensimmäinen ominaisarvo matriisin koon N funktiona

7.8 Häviöt

Tähän menessä on laskettu puolipallon polarisoituvuutta negatiivisilla permittiivisyyden arvoilla sillä oletuksella, että permittiivisyys on reaalinen. Tämä ei kuitenkaan johda täysin fysikaalisiin tuloksiin, sillä pienillä negatiivisilla permittiivisyyksillä saadaan äärellisellä herätteellä ääretön vaste. Puhtaat singulaarisuudet ovat kuitenkin mahdollisia vain paperilla.

Todellisuudessa esimerkiksi terävien nurkkien aiheuttamia singulaarisuuksia vaimentaa se, ettei mikään kulma koskaan voi olla äärettömän terävä. Negatiivisilla permittiivisyyksillä merkittävimmäksi vaimennuksen aiheuttajaksi nousevat kuitenkin väliaineen *kausaalisuudesta* seuraavat häviöt. Jos permittiivisyyden reaaliosa jollain taaajuudella menee negatiiviseksi, nähdään, että tästä seuraa epäfysikaalinen vaste, joten tällöin myös vaimennusta aiheuttavan imaginääriosan täytyy olla nolasta poikkeava. Permittiivisyyden reaali- ja imaginääriosan riippuvuutta toisistaan kuvattiin Kramers–Kronig –relaatioiden, (7.3) ja (7.4), avulla.

Imaginääriosan vaikutusta polarisoituvuuden singulaarisuuteen voidaan tarkastella esimerkiksi homogeenisen pallon tapauksessa. Pallon normalisoitu polarisoituvuus saatiin kaavasta (3.42). Jos permittiivisyys on kompleksiluku,

muotoa $\epsilon_r = \epsilon'_r \pm j\epsilon''_r$, missä ϵ'_r ja ϵ''_r ovat reaalisia, saadaan polarisoituvuus muotoon

$$\alpha_n = 3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = 3 \frac{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2 + \epsilon_r' - 2}{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2 + 4\epsilon_r' + 4} \pm j \frac{9\epsilon_r''}{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2 + 4\epsilon_r' + 4}.$$

Singulaarisuus seuraa nimittäjän nollakohdasta. On siis oltava

$$\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2 + 4\epsilon_r' + 4 = 0,$$

mistä seuraa ehto

$$\epsilon_r'' = \pm \sqrt{-(\epsilon_r'^2 + 4\epsilon_r' + 4)}.$$

Ainoa reaalinen ratkaisu yhtälölle on $\epsilon_r'' = 0$ ja $\epsilon_r' = -2$. Nähdään, että jos permittiivisyys on kompleksinen, eli $\epsilon_r'' \neq 0$, polarisoituvuuden singulaarisuus häviää.

Puolipallon tapauksessa analyttinen tarkastelu ei kuitenkaan ole mahdollista, joten tutkitaan häviöitä laskennallisesti. Lisätään permittiivisyyteen imaginääriosaa, jonka oletetaan pysyvän vakiona, ja lasketaan normalisoidun aksiaalisen polarisoituvuuden kuvaaja permittiivisyyden reaaliosan funktiona. Nähdään, että imaginääriosan tulee olla kohtalaisen suuri, ennen kuin sen vaikutus näkyy kuvaajassa. Tämä vastaa merkittäviä häviöitä. Sama ilmiö on havaittavissa myös transversaalisisä tapauksessa.

Artikkelissa [21] on laskettu sirontaa 90° kulmasta FDTD-menetelmällä, kun materiaalin magneettinen *permeabilisuus* $\mu = \mu_r \mu_0$ on negatiivinen. Efektiivisesti vaikutus on sama kuin negatiivisella permittiivisyydellä, laskenta ei supene suhteellisen permeabilisuuden arvoilla $-3 \leq \mu_r \leq -\frac{1}{3}$. Kyseisessä artikkelissakin on päädytty toteamaan, että häviöiden on oltava merkittäviä, ennen kuin ratkaisu saadaan suppenemaan.

Kuvissa 7.39, 7.40 ja 7.41 on esitetty normalisoidun aksiaalisen polarisoituvuuden reaali- ja imaginääriosien kuvaajat permittiivisyyden reaaliosan funktiona eri imaginääriosan arvoilla. Suuntaa-antavasti voidaan sanoa, että, jos $\epsilon_r'' \geq 0,01\epsilon_r'$, alkavat singulaarisuudet pyöristyä, mutta ratkaisun suppenemisen ehtona on, että imaginääriosan tulee olla vähintään samaa suuruusluokkaa kuin reaaliosakin. Ratkaisun suppenemista on tutkittu kuvissa 7.42, 7.43 ja 7.44.

Todellisuudessa dispersio vaikuttaa myös imaginääriosaan, jolloin sekin on taajuudesta riippuva. Lisäksi kausaalisuus edellyttää, että reaali- ja imaginääriosat riippuvat toisistaan. Eräs approksimaatio permittiivisyydelle on optisilla taajuuksilla metalleille käytetty *Drude-malli* [7]

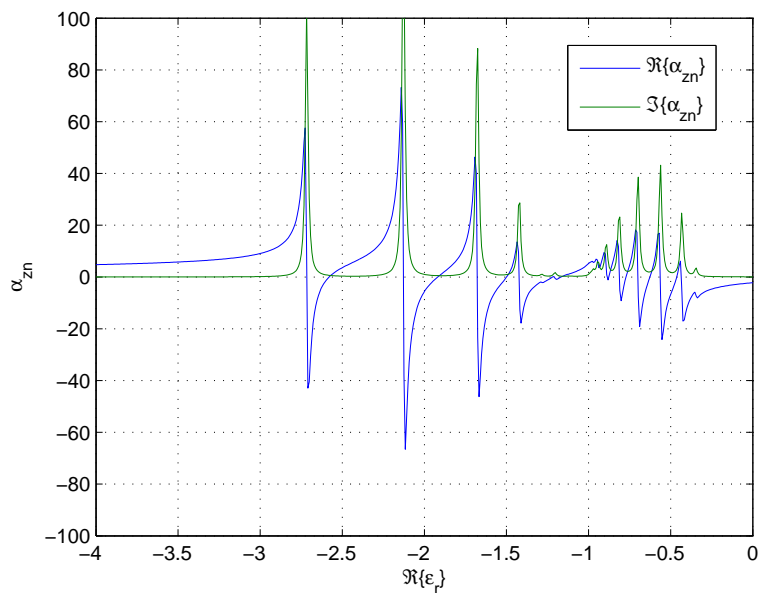
$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty - \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\nu}, \quad (7.53)$$

missä ω_p on *plasmataajuus* ja ν on *törmäystaajuus*.

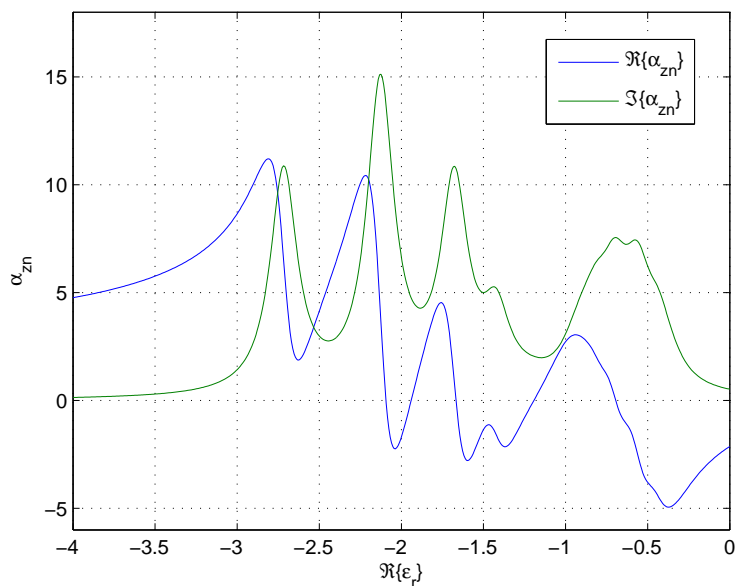
Esimerkiksi alumiinille voidaan olettaa [22] $\hbar\omega_p = 15$ eV, ja $\hbar\nu = 0,6$ eV, joista taajuuksiksi voidaan laskea $\omega_p \approx 2,2789 \cdot 10^{16} \frac{1}{s}$ ja $\nu \approx 9,1156 \cdot 10^{14} \frac{1}{s}$. Lisäksi $\epsilon_\infty = 1$. Kuvassa 7.45 on esitetty mallista (7.53) lasketut alumiinin suhteellisen permittiivisyyden reaali- ja imaginaariosa. Nähdään, että hyvin korkeilla taajuuksilla löytyy alue, jossa permittiivisyyden reaaliosa on negatiivinen, ja saa arvot ongelma-alueella $-3 \leq \epsilon'_r \leq -\frac{1}{3}$.

Homogeenisen pallon tapauksessa polarisoituvuus oli singulaarinen permittiivisyyden arvolla $\epsilon_r = -2$. Alumiinin tapauksessa nähdään, että permittiivisyyden reaaliosa saa arvon $\epsilon'_r = -2$ likimäärin taajuudella $\omega \approx 1,3 \cdot 10^{16} \frac{1}{s}$. Kuvassa 7.46 on laskettu alumiinipallon normalisoitu polarisoituvuus. Nähdään, että singulaarisuus on vaimentunut, mutta polarisoituvuus saa silti todella suuria arvoja.

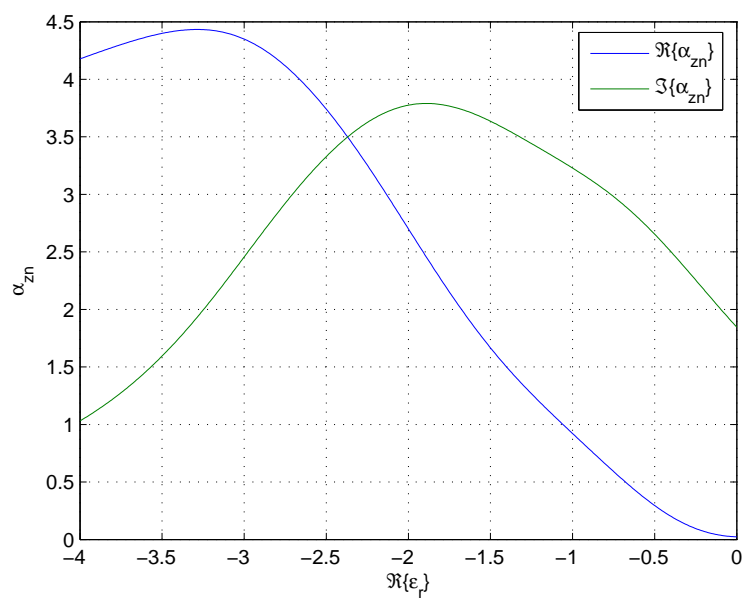
Kuvissa 7.47 ja 7.48 on laskettu alumiinisen puolipallon normalisoidut aksiaalinen ja transversaalinen polarisoituvuus taajuuden funktiona käyttämällä Drude-mallin avulla laskettua permittiivisyyttä. Nähdään, että kuvaajat ovat jatkuvia, ja ratkaisu saadaan suppenemaan. Transversaalisen polarisoituvuuden kuvaajan huomataan muistuttavan homogeenisen pallon kuvaajaa, tosin polarisoituvuuden maksimi on nyt likimäärin taajuudella $\omega \approx 1 \cdot 10^{16} \frac{1}{s}$, jolloin $\epsilon'_r \approx -4$.



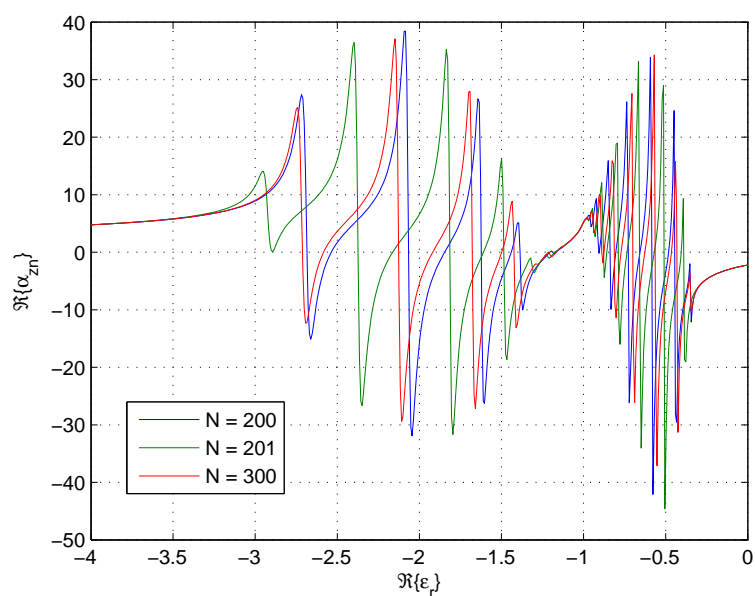
Kuva 7.39: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, $\epsilon_r'' = 0,01$, $N = 300$



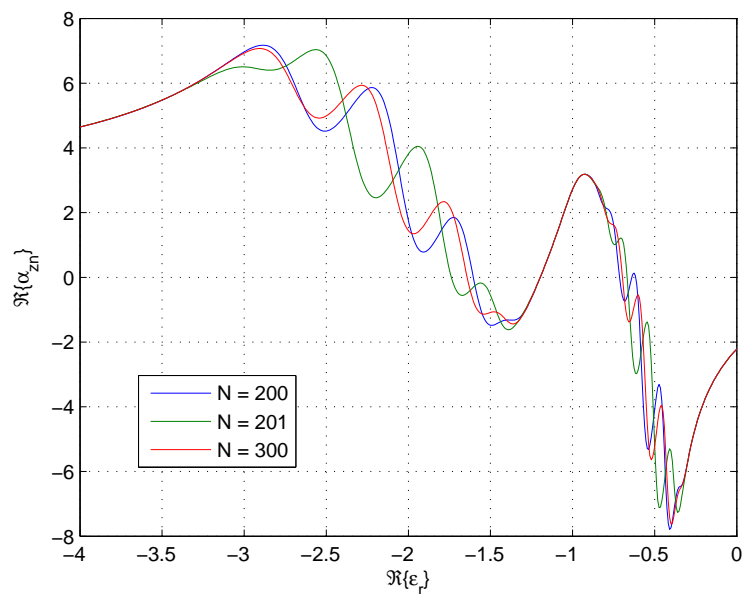
Kuva 7.40: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, $\epsilon_r'' = 0,1$, $N = 300$



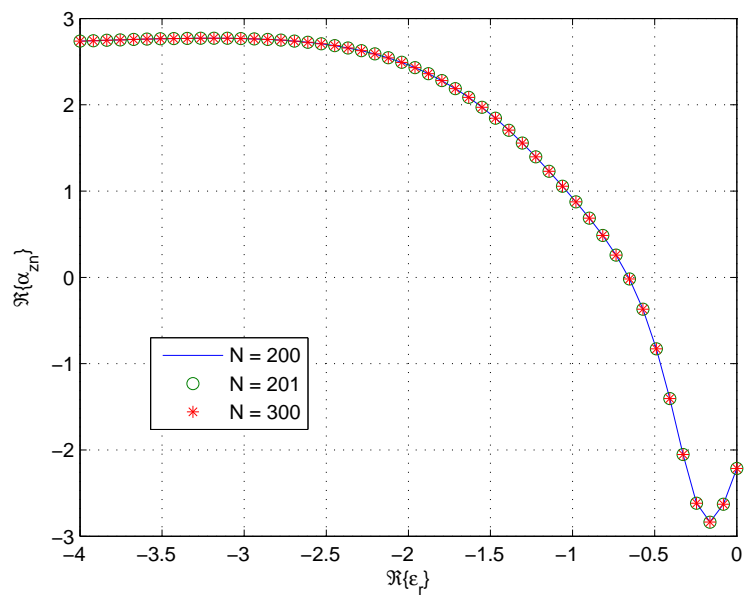
Kuva 7.41: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, $\epsilon_r'' = 1$, $N = 300$



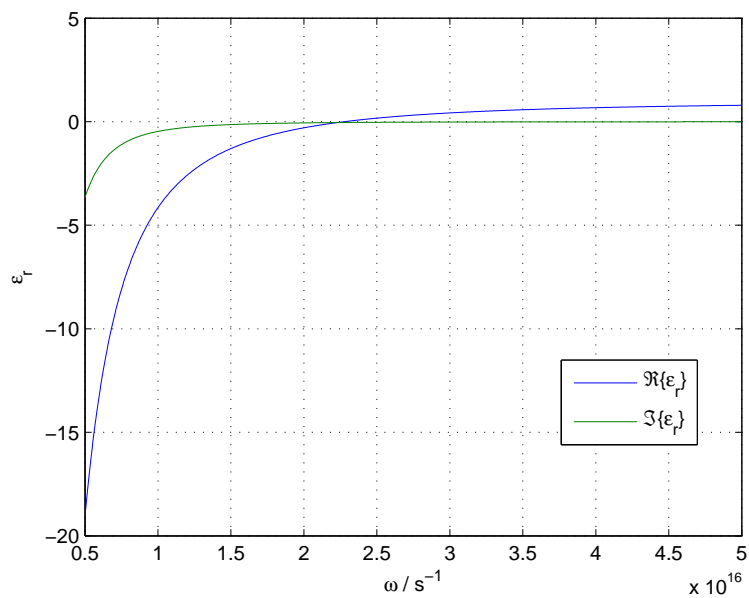
Kuva 7.42: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, $\epsilon_r'' = 0,01\epsilon_r'$



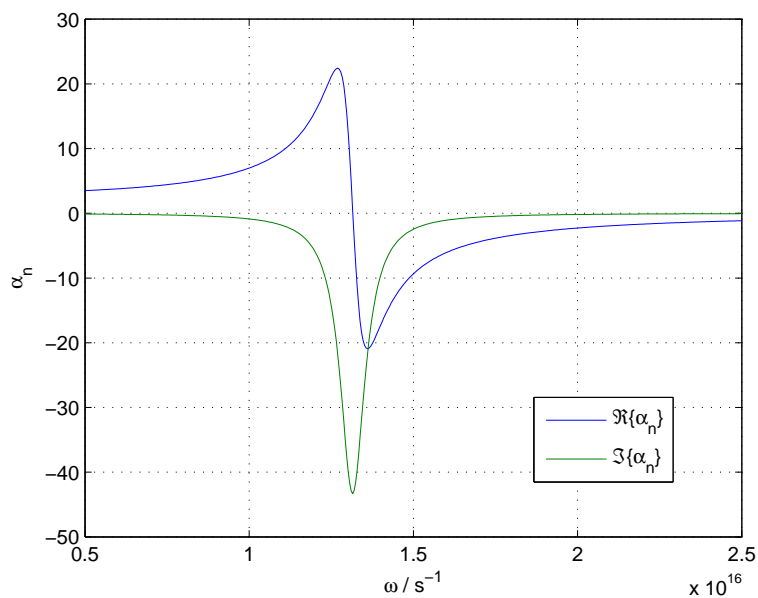
Kuva 7.43: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, $\epsilon_r'' = 0,1\epsilon_r'$



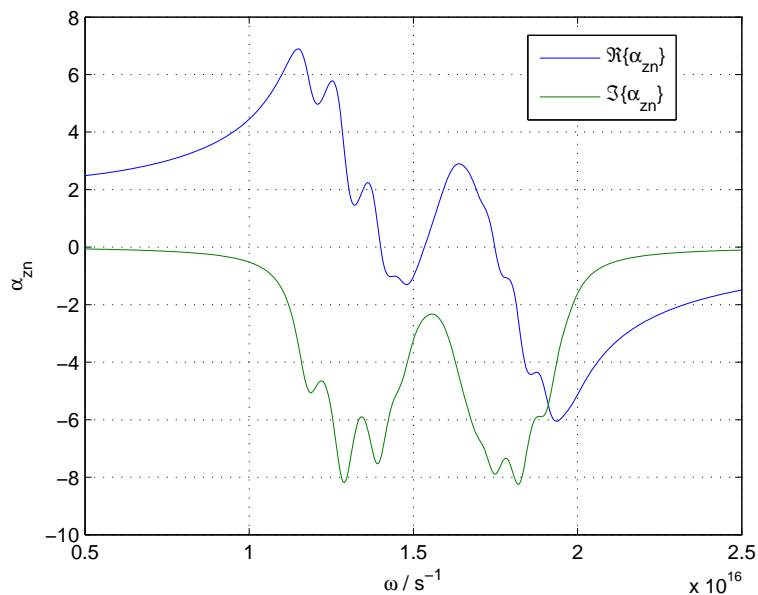
Kuva 7.44: Puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus, $\epsilon_r'' = \epsilon_r'$



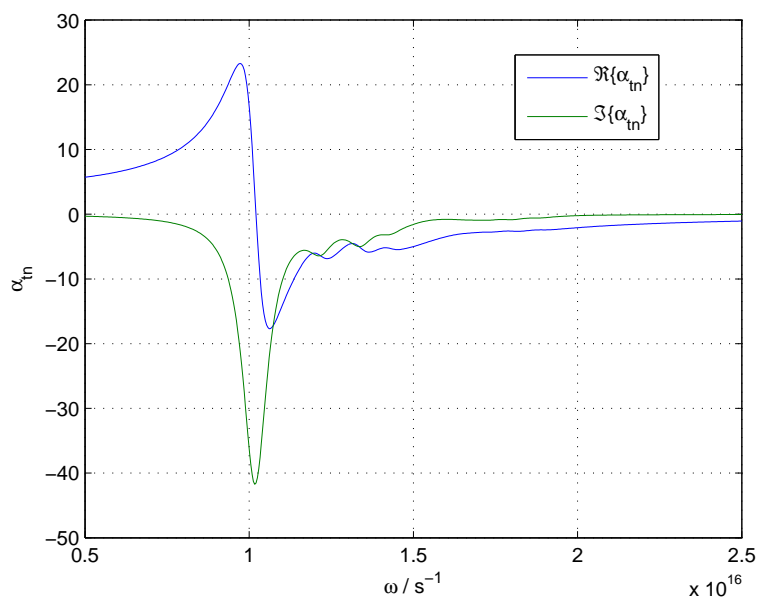
Kuva 7.45: Alumiinin suhteellinen permittiivisyys taajuuden ω funktiona laskettuna Drude-mallin avulla



Kuva 7.46: Alumiinisen pallon normalisoitu polarisoituvuus taajuuden funktiona



Kuva 7.47: Alumiinisen puolipallon normalisoitu aksiaalinen polarisoituvuus taajuuden funktiona, $N = 300$



Kuva 7.48: Alumiinisen puolipallon normalisoitu transversaalinen polarisoituvuus taajuuden funktiona, $N = 300$

8 Yhteenveto

Diplomityön tavoitteena oli selvittää homogeenisen, puolipallon muotoisen kappaleen vaste staattiseen sähkökenttään. Käytännöllinen parametri tämän kuvaamiseen oli kappaleen polarisoituvuus, joka pystytään laskemaan analyytisesti, jos sähköstaattisen potentiaalifunktion ratkaisu tunnetaan koko avaruudessa. Puolipallon tapauksessa avaruus jouduttiin jakamaan kolmeen osaan: pallon ulkopuoliseen, ja pallon sisällä yläpuoliseen ja alapuoliseen osaan. Tämä yleistettiin niin sanotuksi kaksoispuolipallon tilanteeksi, jossa pallo oli jaettu kahteen puoliskoon, joilla oli eri permittiivisyydet. Kaksoispuolipallo ei enää ollut pallosymmetrinen, joten jouduttiin muodostamaan ulkoisen herätekentän suunnan mukaan kaksi erikoistapausta: aksiaalinen ja transversaalinen.

Potentiaalin ratkaisua lähdettiin hakemaan sarjamuodossa, kun tunnettiin, että potentiaalin tuli toteuttaa Laplacen yhtälö. Yhtälö voitiin separoida pallokoordinaatistossa, ja sen yleinen ratkaisu tunnettiin, eli potentiaali voitiin esittää kaksinkertaisena summana. Pallon sisäinen materiaalarajapinta aiheutti kuitenkin sen, että sähkökenttä oli epäjatkuva pallon sisällä, jolloin sarjakehitelmän termit eivät enää olleet ortogonaalisia, vaan jokaisella termillä oli kytkentä jokaiseen muuhun termiin. Tällöin haluttiin momenttimenetelmän kaltaisesti muodostaa matriisiyhtälö, eli koota N :n lineaarisen yhtälön ryhmä, jossa jokainen yhtälö sisälsi summan, jossa oli N termiä.

Epäortogonaalisuus aiheutui Legendren polynomeista ja liittofunktioista, joten Galerkinin menetelmän tavoin juuri vastaavat funktiot valittiin niin sanotuiksi testifunktioiksi, joiden avulla saatiin muodostettua haluttu yhtälöryhmä, joka lopulta kirjoitettiin matriisiyhtälöksi, joka ratkaistiin numeerisesti Matlabin avulla. Kaikille matriisin alkioille saatiin kuitenkin analyttiset lausekkeet.

Positiivisilla permittiivisyyden avulla polarisoituvuuden arvo saatiin suppenemaan hyvin matriisin koolla $N \geq 200$. Vastaavat vertailutulokset laskettiin numeerisesti elementtimenetelmää soveltavan Comsol Multiphysics -ohjelman avulla, jolla tilanne pystyttiin kohtuullisella vaivalla mallintamaan kaksiulotteisesti, jolloin säästettiin tietokoneen muistia ja laskenta-aikaa. Tulokset täsmäsivät hyvin. Myös ideaalijohdepuolipallolle voitiin johtaa omat yhtälönsä.

Negatiivisilla permittiivisyyksillä seurasi ongelmia välillä $3 \leq \epsilon_r \leq -\frac{1}{3}$: Polarisoituvuus oli singulaarinen, eikä ratkaisua saatu suppenemaan. Analyytisesti pystyttiin osoittamaan, että ongelmien ilmentymisen juuri kyseisellä alueella johtui puolipallon terävistä nurkista. Lisäksi permittiivisyyden arvolla $\epsilon_r = -1$ puolipallon tasaisella pohjapinnalla esiintyi voimakkaita potentiaalin singularisuuksia.

Transversaaliosuudessa tapauksessa esiintyi lisäksi singulaarisuus arvolla $\epsilon_r \approx -4$, joka laskennallisesti käyttäytyi paremmin kuin muut singulaarisuudet, joten se pystyttiin jäljittämään tarkemmin. Singulaarisuuden pääteltiin aiheutuvan puolipallon muodosta, ja tätä perusteltiin vertaamalla tapausta oblaattiin sferoidiin, jonka polarisoituvuus voitiin laskea analyttisesti. Aksiaaliosuudessa muodosta aiheutuva perussingulaarisuus kuitenkin hukkui nurkkien aiheuttamien singulaarisuuksien sekaan.

Singulaarisuuksia aiheuttavia permittiivisyyden arvoja pystyttiin myös laskemaan suoraan ominaisarvoytälöstä, kun alkuperäistä matriisiyhtälöä muokattiin sopivasti. Ratkaisun suppenemattomuus tosin näkyi selvästi tässäkin tapauksessa.

Lopuksi tarkasteltiin, mitkä olivat negatiivisen permittiivisyyden fysikaaliset edellytykset, ja todettiin, että materiaalin kausaalisuus edellyttää häviöitä, joita mallinnettiin permittiivisyyden imaginääriosan avulla. Nähtiin, että kun imaginääriosana oli riittävän suuri, singulaarisuudet vaimenivat, ja ratkaisu saatiin suppenemaan. Negatiivinen permittiivisyys on tosin mahdollinen ainoastaan dynaamisessa tilanteessa, jossa sähkökenttä värähtelee nopeasti ajan funktiona. Tällöin syntyy kytkentä myös magneettikenttään, ja kenttien yhteisvaikutuksena lähtee etenemään sähkömagneettinen aalto. Laskennassa jätettiin kuitenkin huomiotta mahdollinen magneettikentän vaikutus. Häviölliseen, johdettavaan materiaaliin indusoituu muuttuvan magneettikentän seurauksena niin sanottuja pyörrevirtoja, jotka taas synnyttävät uusia sähkö- ja magneettikenttiä, joilla saattaa olla oma vaikutuksensa kappaleen vasteeseen. Induktion mallinnus on kuitenkin hyvin hankalaa ja staattisessa tarkastelussa täysin mahdotonta.

Vaikka työn lopputulosta voi pitää onnistuneena ja tavoitetta saavutettuna, jää silti avoimeksi, saadaanko singulaarisuuksia vastaavat permittiivisyydet määritettyä matemaattisesti. Kaikesta päätellen tulisi soveltaa jotain uutta menetelmää, sillä ainakaan käytetty, analyttisiin funktioihin perustuva menetelmä, eikä elementtimenetelmä saaneet ratkaisua suppenemaan. Eräs tutkimisen arvoinen mahdollisuus olisi laskea artikkelissa [18] esiteltyä integraaliyhtälöä.

Puolipallon pohjapinnalle syntyneet singulaarisuudet permittiivisyyden arvolla $\epsilon_r = -1$ olivat erikoinen ilmiö. Yleistettynä tapauksena voisi tutkia tarkemmin potentiaalin ja sähkökentän käyttäytymistä tasomaisella materiaali-rajapinnalla, jossa $\epsilon_1 = -\epsilon_2$, sekä staattisessa, että dynaamisessa tilanteessa. Dynamiikassa vastaavanlainen rajapinta esiintyy täydellisen linssin [6], sekä metamateriaalianteloresonaattorien [23, 24] yhteydessä, ja on voitu laskennallisesti osoittaa, että kentät jäävät pitkäksi aikaa värähtelemään kyseiselle ra-

japinnalle.

Puolipallon vasteen selvittämiseksi ei siis ollut ainakaan välitöntä käytännön tarvetta, vaan kyseessä oli enemmänkin osa perustutkimusta, joka pyrkii paneutumaan sähköisten ilmiöiden taustoihin, ja jopa etsimään uusia ilmiöitä. Olisi tietysti mielenkiintoista nähdä, voidaanko tässä saatuja tuloksia hyödyntää lopulta jonkin käytännön sovellutuksen suunnittelussa.

Viitteet

- [1] J. Venermo, A. Sihvola, "Dielectric Polarizability of Circular Cylinder," *J. Electrostat.*, vol. 63, pp. 101–117, February 2005.
- [2] A. Sihvola, P. Ylä-Oijala, S. Järvenpää, J. Avelin, "Polarizabilities of Platonic Solids," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 52, no. 9, pp. 2226–2233, September 2004.
- [3] H. Wallén, A. Sihvola, "Polarizability of Conducting Sphere–Doublets Using Series of Images," *J. Appl. Phys.*, vol. 96, no. 4, pp. 2330–2335, August 2004.
- [4] M. Pitkonen, "Polarizability of the Dielectric Double–Sphere," *J. Math. Phys.*, accepted for publication.
- [5] V. G. Veselago, "The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of ϵ and μ ," *Sov. Phys. Usp.*, vol. 10, no. 4, pp. 509–514, 1968.
- [6] J. B. Pendry, "Negative Refraction Makes a Perfect Lens," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, no. 18, pp. 3966–3969, October 2000.
- [7] A. Sihvola, "Electromagnetic Mixing Formulas and Applications," London: IEE 1999, pp. 14-23, 26-28, 41-42, 63-67, 201.
- [8] I. Lindell, A. Sihvola, "Sähkömagnetinen kenttäteoria: 1. Staattiset kentät," 4. painos, Helsinki: Otatieto 2002, p. 37, 53, 66-70.
- [9] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics," 3rd ed., New York: John Wiley & Sons Inc. 1999, pp. 95-110, 151-154, 157-159, 309-316, 333-335.
- [10] J. Vanderlinde, "Classical Electromagnetic Theory," Chichester: John Wiley & Sons Inc. 1993, pp. 119-120, 155-159.
- [11] M. Abramowitz, I. A. Stegun, "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables," New York 1970: Dover Publications, Inc., pp. 332-338.
- [12] Z. L. Wang, J. M. Cowley, "Surface Plasmon Excitation for Supported Metal Particles," *Ultramicroscopy* vol. 21, no. 1, pp. 77-94, 1987
- [13] Z. L. Wang, J. M. Cowley, "Size and Shape Dependence of the Surface Plasmon Frequencies for Supported Metal Particle Systems," *Ultramicroscopy* vol. 23, no. 1, pp. 97-108, 1987.
- [14] J. Aizpurua, A. Rivacoba, S. P. Apell, "Electron-energy Losses in Hemispherical Targets," *Phys. Rev. B*, vol. 54, no. 4, pp. 2901-2909, July 1996.

- [15] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products" 4th. edition, USA 1980: Academic Press, p. 795.
- [16] I. Lindell, "Radioaaltojen eteneminen," Helsinki: Otatieto 2000, p. 21.
- [17] G. Shvets, Y. A. Urzhumov, "Engineering the Electromagnetic Properties of Periodic Nanostructures Using Electrostatic Resonances," *Phys. Rev. Lett.* vol. 93, no. 24, article 243902, December 2004.
- [18] D. R. Fredkin, I. D. Mayergoyz, "Resonant Behavior of Dielectric Objects (Electrostatic Resonances)," *Phys. Rev. Lett.* vol. 91, no. 25, article 253902, December 2003.
- [19] J. Meixner, "The Behavior of Electromagnetic Fields at Edges," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-20, no. 4, pp. 442-446, July 1972.
- [20] J. Van Bladel, "Field Singularities at Metal-Dielectric Wedges," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, no. 4, pp.450-455, April 1985.
- [21] A. A. Sukhorukov, I. V. Shadrivov, Y. S. Kivshar, "Wave Scattering by Metamaterial Wedges and Interfaces," *Int. J. Numer. Model.* vol. 19, pp. 105-117, March 2006.
- [22] C. F. Bohren, D. R. Huffman, "Absorption and Scattering of Light by Small Particles," New York: John Wiley & Sons Inc. 1998, p. 255.
- [23] N. Engheta, "An Idea for Thin Subwavelength Cavity Resonators Using Metamaterials with Negative Permittivity and Permeability," *IEEE Antennas Wireless Propagat. Lett.*, vol. 1, pp. 10-13, 2002.
- [24] S. A. Tretyakov, S. I. Maslovski, I. S. Nefedov, M. K. Kärkkäinen, "Evanescent Modes Stored in Cavity Resonators with Backward-wave Slabs," *Mircrowave Opt. Tech. Lett.*, vol. 38, no. 3, pp. 153-157, July 2003.