

MUISTIO No CFD/MECHA-18-2011 pvm 19. heinäkuuta 2011

OTSIKKO

Standardi k - ϵ -mallin tarkastelu OpenFOAMissa

LAATIJA(T)

Tuomas Turunen

TIIVISTELMÄ

Standardi k - ϵ -mallissa hilassa olevissa vapaan virtauksen alueissa turbulenssi katoaa eikä välttämättä syty enää sen jälkeen. Tarkoituksena on muokata mallia siten, että turbulenssi ei katoa vapaan virtauksen alueella. Tarkoituksena on myös tutustua k - ϵ -mallin yhtälöihin ja niissä esiintyvien termien merkityksiin.

PÄÄKOHDAT

SIVUJA

[14](#)

AVAINSANAT

k epsilon vapaa virtaus OpenFOAM

TARKASTANUT

Timo Siikonen 19. heinäkuuta 2011

Sisältö

1	<i>k</i>-ϵ-mallin parametrit	5
1.1	Yhtälöt	5
1.2	Termien merkitys	5
2	Miten saada <i>k</i> säilymään myös vapaan virtauksen alueella	6
2.1	ϵ :n minimiarvon vaikutus	6
2.2	∇U :sta riippuva suodatin	7
2.3	Turbulentin viskositeetin suodattaminen	11

Taulukko. 1: OpenFOAMin `kEpsilon` turbulenssimallissa esiintyvien vakioiden oletusarvot.

C_1	1,44
C_2	1,92
C_μ	0,09
σ_ϵ	1,3

1 k - ϵ -mallin parametrit

Tässä esitellään lyhyesti OpenFOAMin puristumattoman `kEpsilon`-turbulenssimallin sisältämät yhtälöt ja käydään läpi niissä esiintyviä termejä lähinnä turbulenssin kineettisen energian k kannalta. `kEpsilon` on suuren Reynoldsin luvun malli.

1.1 Yhtälöt

Turbulenssin kineettinen energia ratkaistaan yhtälöstä 1.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (Uk) - \nabla \cdot [(\nu + \nu_T)\nabla k] - \nabla \cdot (U)k = G - \epsilon \quad , \quad (1)$$

missä G on lähdetermi 2

$$G = 2\nu_T \left| \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T) \right|^2 \quad . \quad (2)$$

Turbulenssin kineettisen energian dissipaatio ratkaistaan yhtälöstä 3

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (U\epsilon) - \nabla \cdot (U)\epsilon - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \nabla \epsilon \right] = C_1 G \epsilon / k - C_2 \frac{\epsilon^2}{k} \quad . \quad (3)$$

Yhtälöissä esiintyvä ν_T on turbulentti viskositeetti, joka lasketaan kaavasta 4 Turbulenssin vaikutus virtauskenttään on toteutettu ν_T :n avulla.

$$\nu_T = C_\mu k^2 / \epsilon \quad . \quad (4)$$

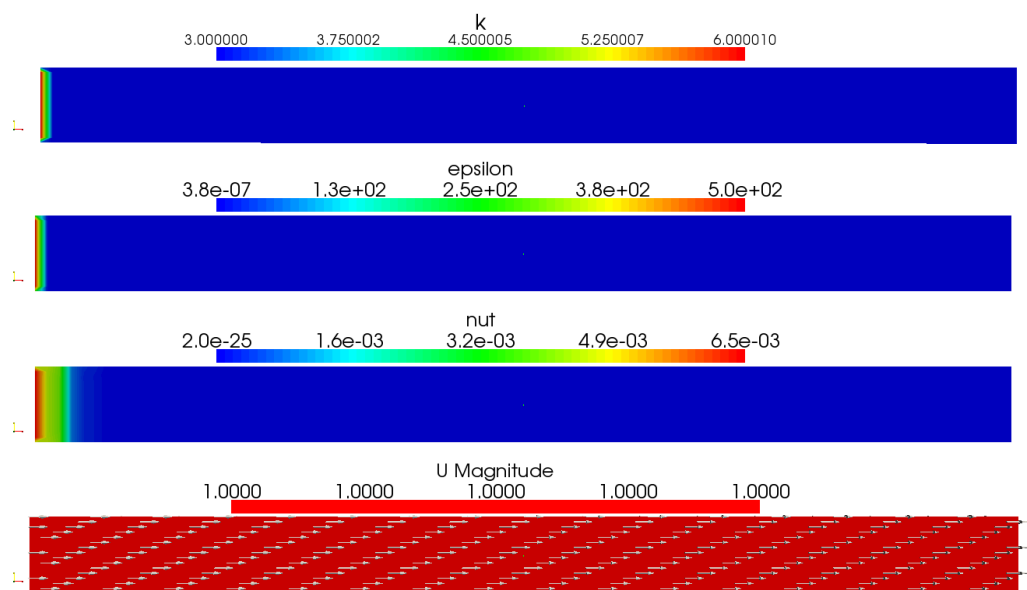
Yhtälöissä esiintyvien vakioiden oletusarvot on esitetty taulukossa 1.

1.2 Termien merkitys

Aluksi k :n yhtälöstä 1 voidaan todeta, että yhtälön oikealla puolella esiintyvät k :n kokonaismuutoksesta vastaavat termit, G toimii lähteenä ja ϵ nieluna. Vapaan virtauksen alueella, missä nopeusgradientit ovat nolliä, myös lähdetermi G on nolla. Jos halutaan, että turbulenssi säilyy myös vapaan virtauksen alueella, myös ϵ :n tulee mennä nolliin. Näin itseasiassa tapahtuukin mutta ongelmana on, että ϵ ei häviä yhtä nopeasti kuin G , jolloin se ehtii *syödä* k :n pois ennen häviämistään.

Yhtälön 1 vasemmalla puolella esiintyvät termit vastaavat muutoksia ajan ja paikan suhteen. k voi muuttua ajan mukana ($\frac{\partial k}{\partial t}$) ja kulkeutua virran mukana ($\nabla \cdot (Uk)$). Lisäksi k :n kentässä olevat erot tasoittuvat dissipaatiotermin ($\nabla \cdot [(\nu + \nu_T)\nabla k]$) kautta. Viimeinen vasemmalla oleva termi on ilmeisesti helpottamassa iteraatioprosessia. Lopullisessa ratkaisussa nopeuden divergenssi $\nabla \cdot (U)$ on nolla ja termi häviää yhtälöstä.

Kuvasta 1 nähdään, että sekä k että ϵ vaimenevat lähes välittömästi tulovirtauksen arvoista olemattomiin. Vaikka siniselle alueelle laitettaisiin kiinteä pinta, joka aiheuttaisi gradientteja, turbulenssiarvot eivät enää heräisi. Nähdään myös, että nopeus on vakio koko hilan alueella.



Kuva 1: k :n, ϵ :n ja ν_T :n kentät OpenFOAMin kEpsilon-turbulenssimallilla. Alimpana nopeuskenttä tarkasteltavassa tilanteessa.

2 Miten saada k säilymään myös vapaan virtauksen alueella

Tässä kappaleessa esitellään vaihe vaiheelta alkuperäiseen turbulenssimalliin tehdyt muutokset, joiden avulla turbulenssi saadaan säilymään vapaan virtauksen yli. Kunkin muutoksen jälkeen esitetään sen vaikutus mallin toimintaan ja tällä tavoin päädytään aina seuraavaan muutokseen. Samalla pohditaan, mistä muutosten vaikutukset johtuvat.

2.1 ϵ :n minimiarvon vaikutus

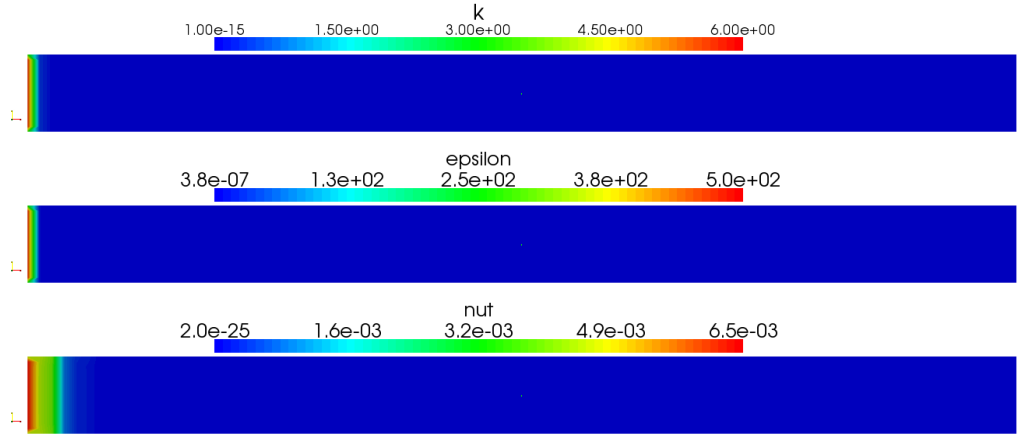
Koodissa on asetettu ϵ :lle (positiivinen) alaraja ϵ_0 . Jos se päästettäisiin nolnaan, turbulentin viskositeetin yhtälö 4 kaatuisi nolalla jakoon. Miniarvon vuoksi k :n yhtälössä esiintyy aina nielu, joka jatkuvasti pienentää k :n arvoa.

Nielu voidaan poistaa yhtälöstä vähentämällä k :n yhtälössä ϵ :sta sen minimiarvo ϵ_0 . Selkeyden vuoksi jätetään jatkossa nopeuden divergenssin sisältävä termi ja aikaderivaatta pois. Näin keskitytään siihen, minkälaiseen lopputulokseen yhtälöillä päädytään ja jätetään iteraatioprosessi vähemmälle huomiolle. Yhtälö 1 saadaan muotoon. 5

$$\nabla \cdot (Uk) - \nabla \cdot [(\nu + \nu_T)\nabla k] = G - (\epsilon - \epsilon_0) \quad . \quad (5)$$

Kuvassa 2 on tulokset laskennoista, joissa on käytetty yhtälön 5 mukaista turbulenssimallia. Tulokset eivät eroa millään tavalla alkuperäisellä turbulenssimallilla saaduista tuloksista. Tarkempi tarkastelu osoittaa, että ϵ :n arvo on rajoitettu arvoon $1 \cdot 10^{-15}$. Tehdystä muutoksesta huolimatta k :n arvo ehtii kulua loppuun ennen ϵ :n riittävää pienenemistä.

Nostamalla ϵ :n alarajaa selvästi tehty ratkaisu voisi toimia. Tällöin k :n yhtälössä vaikuttava dissipaatio olisi kuitenkin systemaattisesti uuden alarajan verran pienempi, mikä vaikuttaisi tuloksiin kaikkialla laskenta-alueessa.



Kuva 2: k :n, ϵ :n ja ν_T :n kentät laskennasta, jossa k :n yhtälössä ϵ :sta on vähennetty sen pienin sallittu arvo.

2.2 ∇U :sta riippuva suodatin

Ongelmana on siis se, että nopeusgradienttien hävitessä turbulenssin kineettisen energian dissipaatio jatkaa vaikutustaan, jolloin turbulenssin kineettinen energia häviää. Näin ollen ϵ :n vaikutus täytyisi saada loppumaan nopeammin nopeusgradienttien poistuttua, jotta se ei ehtisi kuluttaa k :ta loppuun.

Ongelma voidaan ratkaista suodattimella, joka estää ϵ :n vaikutuksen nopeusgradienttien ollessa tiettyä rajaa pienempiä. Lisäämällä suodatin f saadaan k :n yhtälö muotoon

$$\nabla \cdot (Uk) - \nabla \cdot [(\nu + \nu_T)\nabla k] = G - (\epsilon - \epsilon_0)f \quad . \quad (6)$$

Koska k :n tuotto on verrannollinen suureeseen $S = |\frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T)|^2$, valitaan että $f = f(S)$.

Seuraavaksi täytyy päättää, miten suodatin toimii. Oleellista on tietää, milloin lähde häviää k :n yhtälöstä eli millä S arvoilla G voidaan katsoa riittävän pieneksi.

Tarkastellaan termien suuruusluokkia. Oletetaan, että

$$\begin{aligned} k &= \mathcal{O}(1)\dots\mathcal{O}(10^4) & \text{ja} \\ \epsilon &= \mathcal{O}(10^3)\dots\mathcal{O}(10^8) \end{aligned}$$

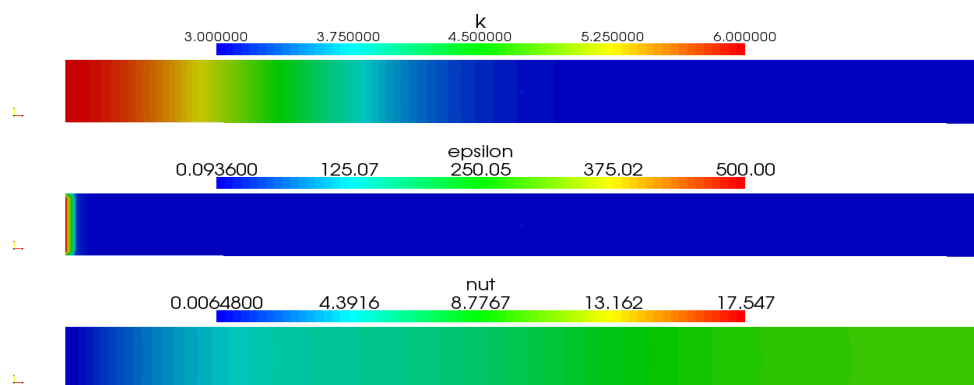
Päätetään lisäksi, että turbulenssin tuotto on merkityksetöntä, kun $G < \mathcal{O}(10^{-2})$ eli sadasosa pienimmistä oletetuista k :n arvoista. Näin saadaan yhtälöiden 2 ja 4 avulla ehto

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(G) &= \mathcal{O}(\nu_T) \cdot \mathcal{O}(S) < \mathcal{O}(10^{-2}) \\ &\frac{\mathcal{O}(k^2)}{\mathcal{O}(\epsilon)} \cdot \mathcal{O}(S) < \mathcal{O}(10^{-2}) & (7) \\ &\frac{\mathcal{O}(10^8)}{\mathcal{O}(10^3)} \cdot \mathcal{O}(S) < \mathcal{O}(10^{-2}) \\ &\mathcal{O}(S) < \mathcal{O}(10^{-7}) \end{aligned}$$

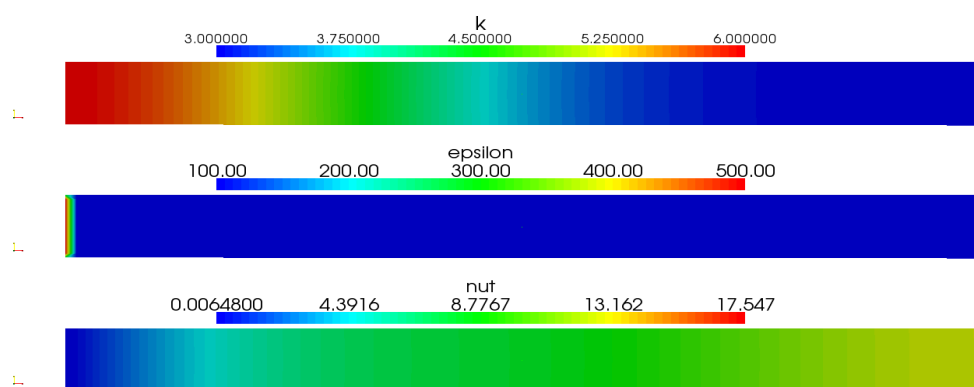
Lisätään siis k :n yhtälöön suodatinfunktio

$$f(S) = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } S \leq 10^{-7} \\ \frac{S - 10^{-7}}{10^{-7}} & , \text{ jos } 10^{-7} < S < 2 \cdot 10^{-7} \\ 1 & , \text{ jos } S \geq 2 \cdot 10^{-7} \end{cases} \quad (8)$$

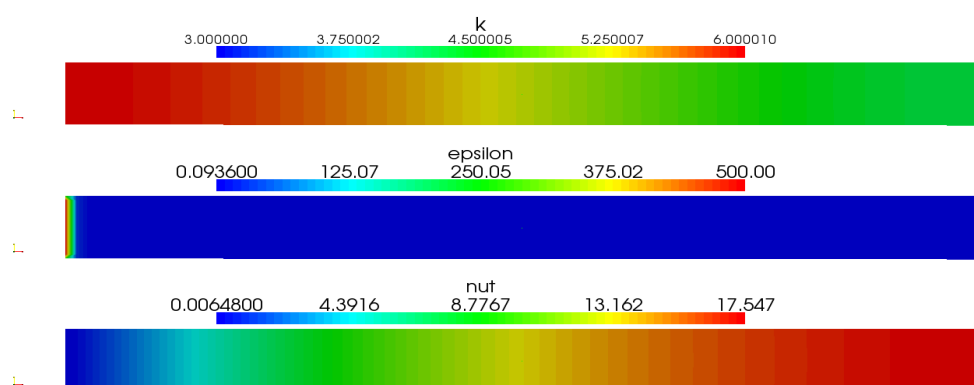
Kuvista 3-5 nähdään, että ϵ :n suodattaminen ei yksinään riitä. Jos ϵ pienenevät lähelle nollaa mutta k :n arvot eivät, turbulentti viskositeetti ν_T saa suuria arvoja. Yhtälön 6 mukainen yhtälö johtaa siis ensinnäkin liian suuriin ν_T :n arvoihin. Lisäksi diffuusiokertoimen kasvaminen alavirtaan mentäessä aiheuttaa mielenkiintoisen ilmiön: kohtaan, jossa ν_T kasvaa voimakkaasti syntyy vyöhyke, jossa tieto k :n arvoista ei pääse kunnolla leviämään virran mukana. Tämä johtuu siitä, että suuremman ν_T :n puolella olevat arvot painottuvat uutta k :ta ratkaistaessa. Alla on pohdittu ilmiötä analyttisesti.



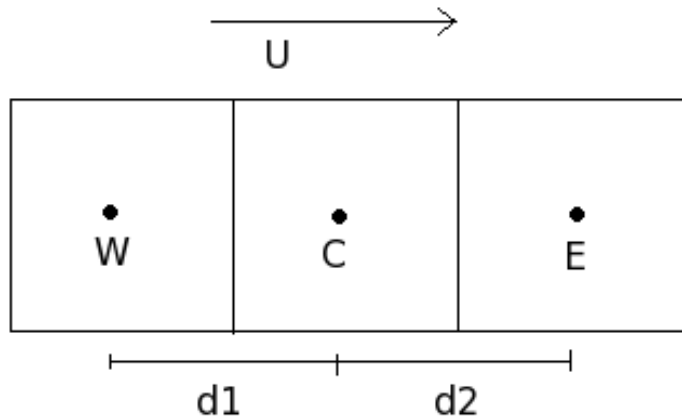
Kuva 3: k :n, ϵ :n ja ν_T :n kentät 1000 iteraatiokierroksen jälkeen laskennasta, jossa k :n yhtälössä ϵ :in vaikutus on suodatettu pois, kun nopeusgradientti $\nabla U < 10^{-7}$.



Kuva 4: k :n, ϵ :n ja ν_T :n kentät 2000 iteraatiokierroksen jälkeen laskennasta, jossa k :n yhtälössä ϵ :in vaikutus on suodatettu pois, kun nopeusgradientti $\nabla U < 10^{-7}$.



Kuva 5: k :n, ϵ :n ja ν_T :n kentät 10 000 iteraatiokierroksen jälkeen laskennasta, jossa k :n yhtälössä ϵ :in vaikutus on suodatettu pois, kun nopeusgradientti $\nabla U < 10^{-7}$.



Kuva 6: Yksiulotteinen hila.

Kirjoitetaan konvektio- ja diffuusiotermit yksiulotteiselle hilalle. Käytetyt alaindeksit ovat kuvan 6 mukaiset. Olettamalla tilavuusvirta ϕ vakioksi konvektiotermi saadaan OpenFOAMin upwind-diskretoinnin mukaan muotoon

$$\Sigma_{N_f}(\phi_f k_f) = \phi k_C - \phi k_W \quad , \quad (9)$$

missä N_f on kopin seinien lukumäärä ja alaindeksi f tarkoittaa suuren arvoa seinällä. Jos k :n diffuusiokerroin $\Gamma_k = \nu + \nu_T$ interpoloidaan keskeisdifferenssillä ja kopin seinän normaalin suuntainen gradientti lasketaan koppien keskipisteissä olevien arvojen erotuksen avulla, saadaan diffuusiotermi muotoon

$$\Sigma_{N_f} [\Gamma_f (\nabla k)_f] = \frac{\Gamma_E + \Gamma_C}{2} \cdot \frac{k_E - k_C}{d_2} + \frac{\Gamma_C + \Gamma_W}{2} \cdot \frac{k_C - k_W}{d_1} \quad . \quad (10)$$

Jos nyt oletetaan k_E ja k_W tunnetuiksi ja merkitään yksinkertaisuuden vuoksi

$$A = \frac{\Gamma_C + \Gamma_W}{2d_1} \quad (11)$$

$$B = \frac{\Gamma_E + \Gamma_C}{2d_2} \quad (12)$$

voidaan tarkastella, miten Γ_k :n muutos vaikuttaa ratkastavaan k_C :n arvoon. Kun lähteitä tai nieluja ei ole, k :n yhtälöksi tulee

$$k_E B + k_C (A - B) - k_W A + k_C \phi - k_W \phi = 0 \quad . \quad (13)$$

Ratkaisemalla tästä k_C :n saadaan

$$k_C = \frac{k_W (A + \phi) - k_E B}{A + \phi - B} \quad (14)$$

Alavirran puolella olevat arvot painottuvat enemmän kuin ylävirran puolen arvot, kun

$$B > A + \phi \quad . \quad (15)$$

Jos koppien pituus on vakio $d_1 = d_2 = d$, ehto voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\Gamma_E - \Gamma_W}{2d} > \phi \quad . \quad (16)$$

Yhtälöstä 16 nähdään, että mitä enemmän Γ_k eli ν_T kasvaa alavirtaan mentäessä, sitä enemmän alavirran arvot painottuvat. Riittävällä iteroimisella virtauskentän pitäisi lopulta muodostua oikeanlaiseksi. Kuvasta 5 kuitenkin nähdään, että vielä 10000 iteraatiokierroksen jälkeenkään k :n arvot eivät ole tasaantuneet koko hilan alueella. Vertailukohtana todettakoon, että ilman suodatinta suoritettut laskennat vaativat 200 iteraatiokierrosta konvergenssin saavuttamiseen.

2.3 Turbulenttin viskositeetin suodattaminen

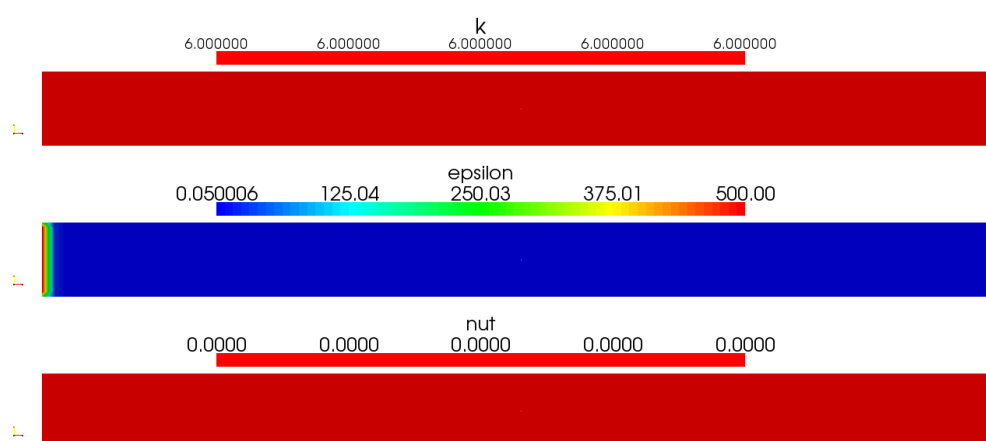
Jotta mallia olisi järkevää käyttää, täytyy ν_T :n arvot saada pysymään järkevissä rajoissa. Tähän päästään ainakin asettamalla ν_T :lle yläraja ja *leikkaamalla* rajan ylittävät arvot. Toinen tapa on asettaa myös ν_T :lle suodatin, joka estää sen vaikutuksen, kun nopeusgradientit poistuvat.

Koska järkevä yläraja ν_T :lle riippuu virtaustilanteesta eikä sitä voida laskea pelkän k :n perusteella, valitaan näistä lähestymistavoista suodatinfunktio. Myös alkuperäisessä mallissa ν_T :n arvot menivät nolnaan, mikä puhuu sen puolesta, että valitulla tavalla on mahdollista laskea. Tällöin kuitenkin käytännössä vapaan virtauksen alueella virtaus lasketaan laminaarina, vaikka k :n arvot poikkeavatkin nollasta!

Muutetaan ν_T :n yhtälö 4 muotoon

$$\nu_T = f(S) \cdot C_\mu k^2 / \epsilon \quad . \quad (17)$$

Kuvasta 7 nähdään, että nyt turbulenssi säilyy myös vapaan virtauksen alueessa.



Kuva 7: k :n, ϵ :n ja ν_T :n kentät laskennasta, jossa k :n yhtälössä ϵ :sta on vähennetty sen pienin sallittu arvo.

Liite: Laskentaparametrit

Laskennassa käytettiin OpenFOAMin `simpleFoam`-ratkaisijaa. Alla on esitetty laskennassa käytetyn hilan tiedot ja reunaehdot ja parametrit

Hila

Käytetty hila oli kaikkialla tasavälinen ja suorakulmainen.

- virtauksen suunnassa
 - pituus: 50 m
 - koppeja: 80 kpl
 - kopin koko: 0,625 m
- virtauksen suunnassa
 - pituus: 4 m
 - koppeja: 15 kpl
 - kopin koko: 0,26667 m

Reunaehdot

Hilan ylä- ja alareunoilla käytettiin symmetriareunaehto. Sisäänvirtausreunalla annettiin nopeudelle, k :lle ja ϵ :lle arvot taulukon 2 mukaan ja paineelle nolla-gradienttiehto. Ulosvirtausreunalla paineelle annettiin arvo $p = 0Pa$ ja nopeudelle, k :lle ja ϵ :lle nollagradienitiehdot.

Taulukko. 2: Laskennassa käytetyt reunaehdot sisäänvirtausreunalla.

U	1 m/s
k	$6m^2/s^2$
ϵ	$500m^2/s^3$

Parametrit

Alla on esitetty ratkaisijan lukemat tiedostot. *fvSolution*

```

solvers
{
  p
  {
    solver          PCG;
    preconditioner  DIC;
    tolerance       1e-22;
    relTol          0.001;
  }

  U
  {
    solver          PBiCG;
    preconditioner  DILU;
    tolerance       1e-22;
    relTol          0;
  }

  k
  {
    solver          PBiCG;
    preconditioner  DILU;
    //preconditioner diagonal;
//agglomerator    faceAreaPair;
    tolerance       1e-06;
    relTol          0;
  }

  epsilon
  {
    solver          PBiCG;
    preconditioner  DILU;
    tolerance       1e-06;
    relTol          0.1;
  }
}

SIMPLE
{
  nNonOrthogonalCorrectors 0;
}

relaxationFactors
{
  p          0.3;
  U          0.7;
  k          0.5;
  epsilon    0.7;
}

```

fvSchemes

ddtSchemes

```
{
  default      steadyState;
}

gradSchemes
{
  default      Gauss linear;
  grad(p)      Gauss linear;
  grad(U)      Gauss linear;
}

divSchemes
{
  default      none;
  div(phi,U)   Gauss QUICK;
  div(phi,k)   Gauss QUICK;
  div(phi,epsilon) Gauss QUICK;
  div((nuEff*dev(grad(U).T()))) Gauss linear;
}

laplacianSchemes
{
  default      none;
  laplacian(nuEff,U) Gauss linear uncorrected;
  laplacian((1|A(U)),p) Gauss linear uncorrected;
  laplacian(DkEff,k) Gauss linear uncorrected;
  laplacian(DepsilonEff,epsilon) Gauss linear uncorrected;
}

interpolationSchemes
{
  default      linear;
  interpolate(U) linear;
}

snGradSchemes
{
  default      corrected;
}

fluxRequired
{
  default      no;
  P            ;
}
}
```