

MEMO No CFD/TERMO-30-2000

DATE: April 7, 2000

TITLE

VIRTAUSLASKENTA JA LÄMMÖNSIIRTO - sähkötekni-
selu järjestelmän esiselvitys

AUTHOR(S)

Timo Siikonen ja Ari Miettinen

ABSTRACT

Raportissa tarkastellaan sähkötekni-
selu virtauksen ja lämmönsiirron las-
kenta. Virtausyhtälöiden ratkaisussa oleviin perusongelmiin luodaan lyhyt katsaus.
Tuloksia esitellään yhdelle esimerkkitapaukselle. Lopuksi esitetään suunnitelmia
alan simulointijärjestelmän sekä tutkimuksen ja koulutuksen luomiseksi.

MAIN RESULT

Ehdotus sähkötekni-
selu lämpö- ja virtaustekniseksi tutkimushankkeeksi

PAGES

15

KEY WORDS

CFD, lämmönsiirto, sähkömoottoreiden suunnittelujärjestelmä

APPROVED BY

Timo Siikonen April 7, 2000

VIRTAUSLASKENTA JA LÄMMÖNSIIRTO

1 Tausta

Virtauslaskennan (computational fluid dynamics, CFD) tavoitteena sähköteknisten tuotteiden suunnittelujärjestelmässä on laitteen lämpötilajakauman ennustaminen. Syntyvä lämpö voi siirtyä sähkömoottorista konvektion ja säteilyn avulla. Säteily voi siirtää merkittäviä lämpötehoja vain jos pintalämpötila on riittävän suuri. Pienitehoisilla laitteilla syntyvä lämpö siirtyy luonnollisella konvektiolla ilman aktiivisia jäähdytysjärjestelmiä. Tällöin säteily on merkittävä myös alhaisemmillä pintalämpötiloilla. Suurempitehoisia koneita jäähdytetään, jolloin pääasiallisena lämmönsiirtomuotona on ns. pakotettu konvektio. Jotta siirtyvä lämpöteho voitaisiin laskea, tarvitaan virtausjakauma sähkömoottorin sisällä ja sen ulkopuolella. Lisäksi on simuloitava lämmönjohtuminen itse moottorissa.

Sähkömoottori on geometrialtaan monimutkainen pyörivä virtauslaite. Geometria on hankalin moottorin sisäosissa, jossa on pyörivä roottori ja sen ympärillä paikallaan pysyvä staattori. Pyörimisliikkeen vuoksi virtaus ei edes keskiarvomielessä ole tasapainotilassa, vaan se muuttuu syklistä. Geometrisen monimutkaisuuden lisäksi sähkökoneen pinnat ovat karheita, mikä vaikuttaa virtaukseen ja sitä kautta lämmönsiirtoon. Karheutta ei voida ottaa huomioon laskentamallin geometriassa sen pienipiirteisyyden vuoksi, joten se on mallinnettava.

Moottorin pinnalla lämmönsiirtoa tehostetaan puhaltimen avulla, jolloin kyseessä on pakotettu konvektio. Pinnan muotoilu ja rivoitus vaikuttavat lämmönsiirtoon ja syntyviin painehäviöihin. Helpoin tapa soveltaa virtauslaskentaa moottorien hyötysuhteen parantamiseen liittyykin ulkokuoren muotoiluun, jossa simuloinnin avulla vertaillaan eri geometrioiden aiheuttamia painehäviöitä. Puhaltimen vuoksi virtaus on tässäkin tapauksessa periaatteessa sykkivää, mutta se tasoittuu melko nopeasti, jolloin laskenta on varsin tarkka vaikka virtauksen oletetaan olevan tasapainotilassa.

Sähköteknisten tuotteiden suunnittelujärjestelmän eri osien linkittymistä toisiinsa havainnollistetaan kuvassa 1. Kyseessä on monen erityyppisen fysikaalisen ilmiön muodostama kokonaisuus, josta viimeaikoina on ryhdytty käyttämään nimitystä 'monifysikaalinen ongelma' [1] ja [2]. Sähkö- ja magneettikentillä ei ole suoraa vaikutusta sähkömoottoreiden virtauksiin. Virtausta ajavat voimat liittyvät lämmönkehitykseen q''' ja puhaltimeen sekä vähäisemmässä määrin nosteeseen. Koska pintalämpötiloja ei tunneta, vaan niitä itse asiassa pyritään laskemaan, tarvitaan simuloinnissa myös tieto rakenteiden lämmönkehitysjakaumasta, mikä saadaan sähkö- ja magneettikenttien ratkaisusta (computational electro-magnetics, CEM). Tämä voidaan tietenkin suorittaa yhdessä virtauslaskennan kanssa, mutta koska virtaus ja lämmönjohtavuus rakenteissa ei riipu sähkö- ja magneettikentän suuruudesta, simulointi voidaan suorittaa näiltä osin myös etukäteen ja siirtää lämpösuunnitteluun vain lämmönkehitysjakauma q''' . Sen sijaan rakenteiden lämmönjohtavuuslaskentaa ei yleensä voida erottaa virtauslaskennasta. Virtaussimuloinnin tuloksena saadaan rakenneanalyysiä (computational structural analysis, CSA) varten kuormat.

Seuraavassa tarkastellaan sähkökoneiden lämmönsiirtolaskennan mahdollisuuksia ja niihin vaikuttavia tekijöitä. Aluksi kuvataan simuloitavat ilmiöt, niitä kuvaavat yhtälöt ja yhtälöiden ratkaisutavat. Sen jälkeen tuodaan esille pyörivissä sähköteknisissä laitteissa mallintamiseen liittyviä ongelmia ja erityispiirteitä. Olemassa oleviin kaupallisiin ohjelmistoihin tehdään lyhyt katsaus. Esimerk-

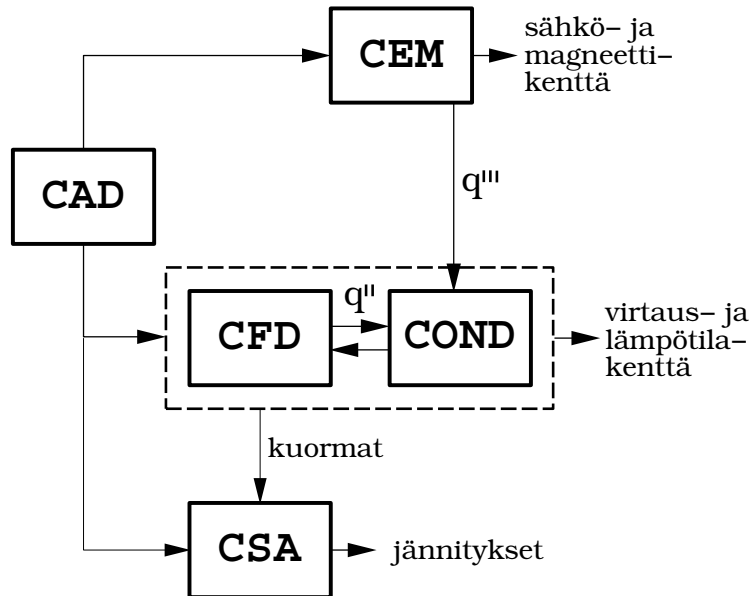


Fig. 1: Suunnittelujärjestelmän eri osien linkittyminen toisiinsa.

kitapauksena käsitellään Lappeenrannan teknillisessä korkeakoulussa parhaillaan menossa olevaa tutkimusta suurnopeuskoneen ilmvälän laskennasta. Lopuksi tehdään ehdotus tutkimuksen suunnittamisesta tällä alueella.

2 Fysikaalinen tausta ja sen mallinnus

2.1 Käytetyt yhtälöt

Virtausta kuvaa Navier-Stokes -yhtälöt, jotka on tunnettu yli 150 vuotta. Yhtälöt voidaan kirjoittaa seuraavaan vektorimuotoon [3], [4]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(F - F_v)}{\partial x} + \frac{\partial(G - G_v)}{\partial y} + \frac{\partial(H - H_v)}{\partial z} = Q \quad (1)$$

missä ratkaistavien suureiden vektori on $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$, ρ on tiheys, $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ on nopeus, E kokonaissisäenergia ja Q lähdetermi, jonka sisältöön palataan myöhemmin. Ns. vuovektoreiden kitkattomat osat ovat

$$F = \begin{pmatrix} \rho \hat{u} \\ \rho u \hat{u} + p \\ \rho v \hat{u} \\ \rho w \hat{u} \\ E \hat{u} + p u \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \rho \hat{v} \\ \rho u \hat{v} \\ \rho v \hat{v} + p \\ \rho w \hat{v} \\ E \hat{v} + p v \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$H = \begin{pmatrix} \rho \hat{w} \\ \rho u \hat{w} \\ \rho v \hat{w} \\ \rho w \hat{w} + p \\ E \hat{w} + pw \end{pmatrix}$$

Yllä p on paine ja \hat{u} , \hat{v} sekä \hat{w} ovat ns. konvektionopeuksia. Karteesisessa koordinaatistossa $\hat{u} = u$, $\hat{v} = v$ ja $\hat{w} = w$. Kokonaissisäenergia E määritellään

$$E = \rho e + \frac{\rho \vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \quad (3)$$

missä e on ominaissisäenergia. Paine ratkaistaan tilayhtälöstä $p = p(\rho, e)$, joka täydelliselle kaasulle (esimerkiksi ilmalle) on

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (4)$$

missä γ on ominaislämpöjen suhde c_p/c_v .

Yhtälön (1) viskoosit vuot ovat

$$\begin{aligned} F_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{pmatrix} \\ G_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{pmatrix} \\ H_v &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

missä jännitystensori on

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{V})\delta_{ij} \right] \quad (6)$$

ja lämpövuoto lasketaan yhteydestä

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (7)$$

Yllä μ on dynaaminen viskositeetti, k lämmönjohtavuus ja T lämpötila.

Virtausta kuvaa siis 5 osittaisdifferentiaaliyhtälöä ja tilayhtälö. Lisäksi on tunnettava aineominaisuudet, viskositeetti ja lämmönjohtavuus. Yhtälöt ovat epälineaarisia ja muodollisestikin monimutkaisia. Numeerisissa ratkaisuisissa päädytään siten iterointiin ja tällöin yhtälöiden monimutkaisuuden vuoksi ne ovat vain approksimatiivisesti linearisoitavissa. Varsinainen hankaluus aiheutuu kuitenkin turbulenssista. Vaikka yhtälöt (1) hyvin asetettujen reunaehtojen kanssa kuvaavatkin virtausta täydellisesti, ovat ratkaisussa esiintyvät pienimmät aika- ja paikkaskaalat suurimpiin verrattuna niin lyhyitä, että yhtälöiden ns. suora ratkaiseminen on mahdollista vain poikkeustapauksissa.

Yleisin turbulenssin kuvaustapa on Reynolds-keskiarvottaminen [5]. Tällöin ylläolevissa yhtälöissä paineen, nopeuden ja muiden suureiden sijaan ratkaistaan niiden aikakeskiarvoja. Keskiarvottaminen tuottaa lisäksi yhtälöihin näennäisiä Reynoldsin jännityksiksi kutsuttuja termejä $\overline{\rho u_i'' u_j''}$, jotka voidaan yhdistää viskooseihin jännityksiin

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{V})\delta_{ij} \right] - \overline{\rho u_i'' u_j''} \quad (8)$$

Reynoldsin jännitykset on mallinnettava, mikä on koko virtauslaskennan heikoin lenkki. Mallinnustapoja on useita, yksinkertaista on käyttää Boussinesq-approksimaatiota, jossa oletetaan Reynoldsin jännitysten käyttäytyvän viskoosien jännitysten tavoin. Tällöin

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = \mu_T \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{V})\delta_{ij} \right] \quad (9)$$

Suuretta μ_T kutsutaan turbulenti- viskositeetiksi tai pyörreviskositeetiksi. Se ei ole viskositeetin kaltainen aineominaisuus, vaan se lasketaan turbulenssimallien avulla. Näistä yleisin on $k - \epsilon$ -malli, joka kuitenkin tiedetään epätarkaksi useissa virtausilanteissa. Myös lämmön johtuminen on mallinnettava ja Boussinesq-approksimaation turbulenti viskositeettia vastaa turbulenti lämmönjohtavuus k_T . Tämän yksinkertaisin mallinnustapa perustuu Prandtin lukua Pr vastaavan turbulentin Prandtin luvun Pr_T käyttöön. Kokonaisuudessaan lämpövojo voidaan tällöin laskea yhteydestä

$$\vec{q} = -(k + k_T)\nabla T = -\left(\mu \frac{c_p}{Pr} + \mu_T \frac{c_p}{Pr_T}\right) \nabla T \quad (10)$$

missä c_p on ominaislämpökapasiteetti. Turbulenttia lämmönjohtavuutta varten on myös kehitetty omia malleja, jotka vastaavat turbulentin viskositeetin mallinnusta. Tällöin ei erillistä turbulentin Prandtin luvun käsitettä tarvita.

Kaikkein monimutkaisimmissa lähestymistavoissa mallinnetaan Reynoldsin jännitykset ja turbulenti lämpövojo suoraan differentiaaliyhtälöillä. Kuitenkin monimutkaisissa virtaus tapauksissa, joissa tapahtuu massiivista virtauksen irtoamista, kaikki Reynolds-keskiarvotettuihin yhtälöihin perustuvat mallit ovat osoittautuneet epätarkoiksi. Tämän vuoksi on viime aikoina myös teknillisissä sovelluksissa ryhdytty käyttämään sellaista turbulenssin kuvaustapaa, jossa osa turbulenssin spektristä kuvataan ajasta riippuvana ilmiönä. Tällaiset laskentatavat ovat voimakkaan tutkimuspanoksen kohteina. Yleensä tämän tyyppistä simulointia nimitetään isojen pyörteiden menetelmäksi (large-eddy-simulation, LES), vaikka viime aikoina on esitetty muitakin lähestymistapoja. Virtauslaskennan heikoin lenkki on kuitenkin tällöinkin turbulenssin mallinnus, joka joudutaan tekemään osalle turbulenssin spektristä [6].

Virtausratkaisuun liittyy rakenteissa tapahtuva lämmönjohtuminen, jossa lähtökohtana on energian säilymisyyhtälö. Itse asiassa yhtälöryhmässä (1) viides yhtälö kuvaa saman periaatteen virtaavalle väliaineelle. Soveltamalla kyseistä yhtälöä kiinteälle aineelle saadaan

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot k \nabla T = q''' \quad (11)$$

missä q''' on lämmönkehitys tilavuusyksikköä kohden. Yhtälöt (1) ja (11) liittyvät toisiinsa reunaehtona olevan lämpövuon q'' kautta. Koska yleensä lämpövuota tai rakenteen pintalämpötilaa, jonka avulla lämpövojo voidaan laskea, ei tunneta, on rakenteen lämpötilajakauma laskettava yhdessä virtausjakauman kanssa. Lämmönjohtavuusyhtälön (11) ratkaiseminen on yksinkertaista,

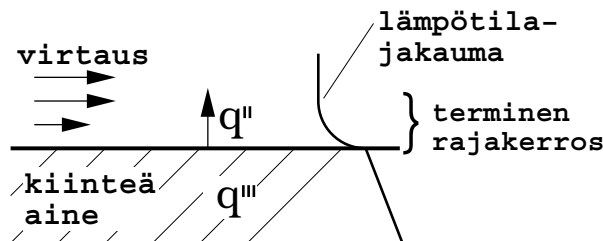


Fig. 2: Kiinteän aineen lämmönjohtuminen ja virtausratkaisu linkittyvät toisiinsa pinnan lämpövuon q'' välityksellä.

mikäli aineominaisuudet ρ , c_p ja k tunnetaan. Kuvaan on hahmoteltu myös tyypillinen lämpötilajakauma. Virtauksessa lämpötilan (kuten myös nopeuksien) gradientti on hyvin suuri kiinteän pinnan lähellä. Tämä vaatii laskentahilan tihentämistä tällä alueella, ns. rajakerroksessa. Juuri rajakerrosten kuvaamisen vuoksi virtausratkaisussa käytetystä laskentahilasta tulee hyvin tiheä ja ratkaisu vaatii suurta tietokonekapasiteettia. Kokonaisuudessaan voidaan todeta virtauksen olevan kaikista simuloinnin osa-alueista hankalin ja ylivoimaisesti eniten laskentaresursseja vaativa. Viime kädessä pääsyynä tähän on turbulenssi, mutta myös muut virtauslaskennalle tyypilliset piirteet. Yhtälöiden epälineaarisuuden vuoksi iterointi on hankalaa ja edellyttää usein iterointiparametrien virittelyä. Siitä huolimatta laskenta usein 'kaatuu' ja sitä on jatkettava uusilla parametrien arvoilla. Virtaussimuloinnin onnistunut suorittaminen vaatii aina tekijältään varsin suurta asiantuntemusta.

2.2 Simulointitavat

Edellä jo todettiin, että lämmönjohtuminen rakenteissa on laskettava yhtä aikaa virtausratkaisun kanssa, mutta sähkö- ja magneettikenttien simulointi voidaan yleensä suorittaa erikseen. Poikkeuksen saattavat muodostaa transientit, koneen käynnistyminen tai pysähtyminen, mutta ilmeisesti kytkentä on tällöinkin heikko ja merkitykseltään marginaalinen.

Virtaus- ja lämmönsiirron laskenta voidaan suorittaa kahdella tavalla, staattisena tai dynaamisena. Edellisessä tavassa lasketaan tasapainotilan virtausta. Useimmiten tämä tapa on jossain määrin approksimatiivinen, ts. virtauksella ei todellisuudessa tällöin ole pyörivässäkään koordinaatistossa tasapainotilaa. Joskus laskentatapaa nimitetään kvasistaattiseksi, erityisesti simuloitaessa roottoria ja staattoria yhtä aikaa. Tällöin niiden välistä, todellisuudessa ajasta riippuvaa, reunaehto on approksimoitava jollain tavoin. Joskus saatetaan laskea pelkkää roottoriosaa, johon nimitys 'staattinen laskenta' soveltuu parhaiten.

Transienttitilanteissa, ja periaatteessa aina monimutkaisen pyörivän virtauslaitteen ollessa kyseessä, virtaus on ajasta riippuvaa. Yhtälö (1) on tällöin ratkaistava ajan suhteen tarkasti. Laskenta-aika muodostuu tällöin hyvin pitkäksi eikä sitä voida käyttää päivittäisessä suunnittelutyössä vielä vuosiin. Ajasta riippuvissa tilanteissa turbulenssin mallinnus olisi luontevaa tehdä isojen pyörteiden menetelmällä, jolloin laskentaresursseja kuluu vielä enemmän kuin Reynolds-keskiarvotetuilla yhtälöillä, joilla taas turbulenssimallien toimivuus on suurempi ongelma. Ajan suhteen tarkat analyysit saattavat toimia suunnittelussa apuna, mutta ne vaativat yleensä vielä supertietokoneen laskentatehoa.

Käytännön työssä on siis käytettävä staattista (tai kvasistaattista) lähestymistapaa. Tällöin laskenta suoritetaan pyörivässä koordinaatistossa ja yhtälöihin (1) tulee lisätermiä. Lähdetermillä Q

mallinnetaan pyörimisliikkeestä aiheutuva keskeiskiihtyvyys $-\vec{\Omega} \times \vec{V}$, missä $\vec{\Omega}$ on laitteen pyörimisnopeus. Esimerkiksi olettamalla pyörimisen tapahtuva x -akselin ympäri ($\vec{\Omega} = \Omega \vec{i}$) saadaan $Q = [0, 0, \rho\Omega w, -\rho\Omega v, 0]^T$ Myös konvektionopeuksissa on otettava pyörimisliike huomioon

$$\begin{aligned}\hat{u} &= u \\ \hat{v} &= v + \Omega z \\ \hat{w} &= w - \Omega y\end{aligned}\tag{12}$$

Tässä on käytetty karteesisia nopeuskomponentteja (u, v, w) , jolloin yhtälöiden muoto on yksinkertaisin mahdollinen. Usein käytetään pyörivässä koordinaatistossa siihen liittyviä sylinterikoordinaatiston nopeuskomponentteja. Tällöin laskentaperiaate on sama kuin edellä, mutta yhtälöt ja reunaehdot monimutkaisemmat. Esimerkiksi lähde-termi sisältää näennäisiä keskipako- ja Coriolisvoimia kuvaavat lausekkeet keskeisvoiman asemesta ja tasainen tulovirtaus on lausuttava pyörivän koordinaatiston nopeuksien avulla.

Käytännön simulointityö on suoritettava pitkälle tulevaisuuteenkin tasapainotilan laskentana. Laskenta-aika on murto-osa ajan suhteen tarkasta analyysistä. Kvasistaattisessa laskennassa voidaan pyörivä osa laskenta-aluetta sijoittaa eri asentoihin staattoriin nähden, jolloin saadaan approksiimaatio pyörimisen aikana tapahtuvalle virtauskentän sykliselle muuttumiselle.

2.3 Ratkaisumenetelmät

Virtausta ja lämmönsiirtoa kuvaavat taseyhtälöt voidaan ratkaista elementti- tai kontrollitulavuusmenetelmällä [7]. Näistä viimeksimainittu on yleisempi tapa ja sitä sovelletaan lähes kaikissa kaupallisissa ohjelmissa, mm. FLUENTissa [8] ja CFX:ssä [9]. Aikaisemmin virtauslaskennassa sovellettiin paljon differenssimenetelmää, mutta tämä on hankalaa monimutkaisten geometrioiden yhteydessä. Kontrollitulavuus- ja elementtimenetelmät kuuluvat jäännösmenetelmien (method of weighted residuals) luokkaan ja ovat siten sukua toisilleen. Itse asiassa kumpaakin tapaa käyttäen voidaan tuottaa eräissä tapauksissa aivan samat diskreetit yhtälöt. Toisaalta kontrollitulavuusmenetelmä redusoituu suorakulmaisella (esimerkiksi karteesisella) laskentahilalla differenssimenetelmäksi.

Rakenneanalyysissä käytetään käytännössä yksinomaan elementtimenetelmää, vaikka periaatteessa voitaisiin käyttää kontrollitulavuusmenetelmää. Joissakin virtauslaskentakoodissa on nesteen ja rakenteen vuorovaikutusta mallinnettaessa näin tehtykin. Sähkö- ja magneettikenttien laskennassa kumpikin menettelytapa on yleisessä käytössä. Magneto-hydrodynamikassa ratkaistaan sekä Navier-Stokes että Maxwellin yhtälöitä ja monia virtausimulointiohjelmaa on laajennettu tälle alueelle. Lämmönjohtavuusyhtälö ratkeaa helposti kummallakin menetelmällä. Kaikkein hankalimmaksi ratkaistavaksi on osoittautunut virtauskenttä, mikä viime kädessä aiheutuu turbulenssin kuvauksen hankaluudesta. Elementtimenetelmällä Navier-Stokes -yhtälöiden ratkaisu onnistui tyydyttävästi vasta 1980-luvulla ns. stabiloitujen elementtimenetelmien tullessa käyttöön. Historiallisista syistä ratkaisumenetelmien kehitys on pääosin keskittynyt kontrollitulavuusmenetelmään. Kaupallisista virtausratkaisijoista elementtimenetelmää sovelletaan FIDAPissa [10] ja FLOWTRANissa [11], kun taas yleisimmin tällä hetkellä käytetyissä FLUENTissa ja CFX:ssä käytetään kontrollitulavuusmenetelmää.

Virtausratkaisun kannalta ratkaisumenetelmää oleellisempi piirre on käytetty laskentahila, joka voi olla joko rakenteellinen tai rakenteeton (kuvat 3 ja 4). Koska virtauslaskenta kehittyi alunpe-

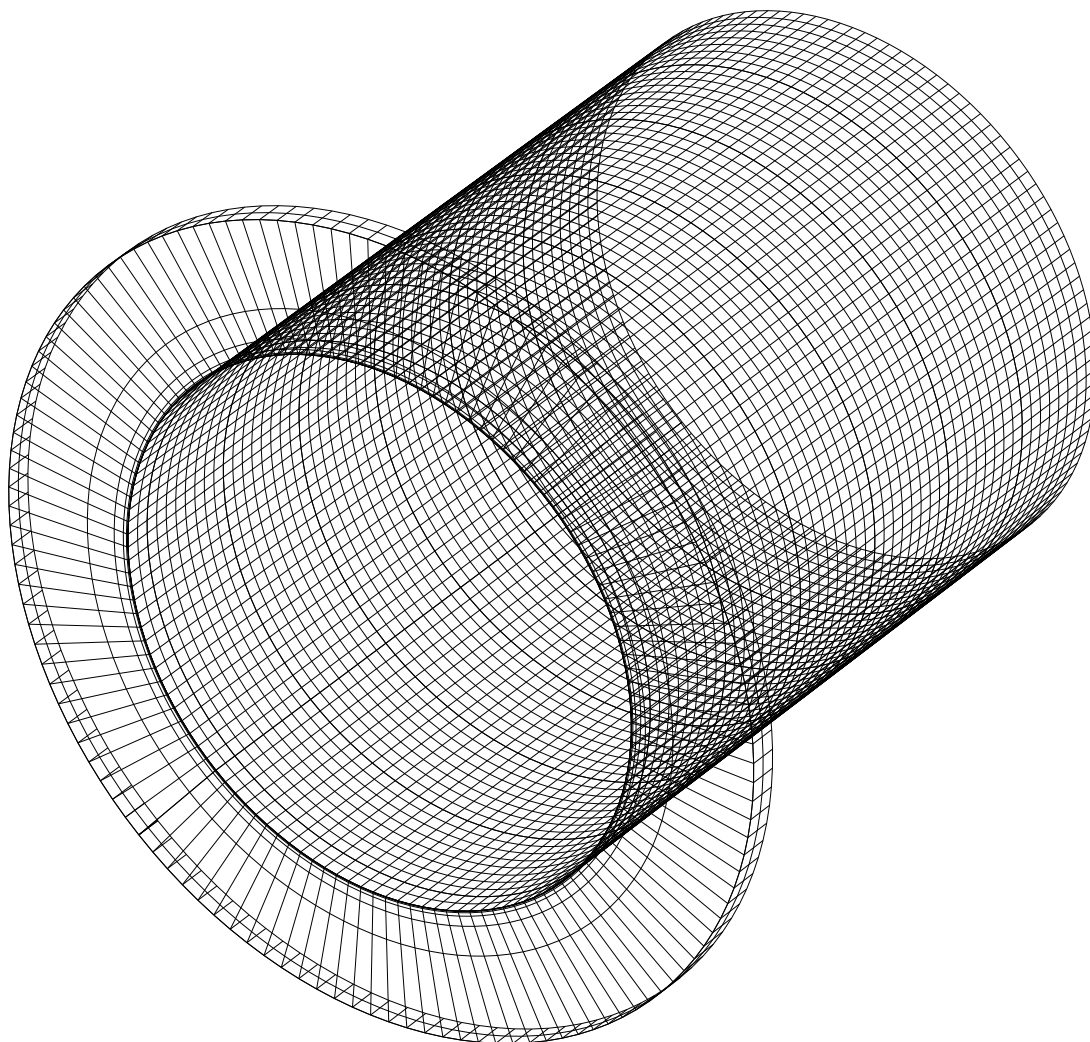


Fig. 3: Rakenteellinen laskentahila (sähkömoottorin ilmaväli).

rin differenssimenetelmän pohjalta, myös kontrollitulavuusmenetelmässä ryhdyttiin soveltamaan samantyyppisiä ratkaisualgoritmeja, jolloin päädytään rakenteelliseen hilaan. Virtauksen luonteen vuoksi (esimerkiksi rajakerrosten kuvaus) myös ratkaisuun liittyvä numeerinen virhe on pienempi ja turbulenssin mallinnus helpompaa rakenteellisen hilan tapauksessa. Tällä hetkellä suuntaus on kohti hybridihiloja, joissa kauempana pinnoista käytetään tetraedrejä ja pintojen lähellä tarkempia heksaedrejä tai niiden tilalla helpommin käsiteltäviä prismoja. Rakenteettomaan hilaan perustuvan virtausratkaisijan yhteydessä voidaan tietenkin käyttää myös rakenteellista laskentahilaa, koska menettely sallii täysin mielivaltaisen laskentatilavuuksien järjestyksen ja muodon.

Monimutkaisen geometrian ollessa kyseessä rakenteellinen hila on jaettava useaan lohkoon ja eräissä tapauksissa tilanne on niin monimutkainen, että laskenta-alueen diskretointi onnistuu kunnolla vain rakenteettomalla hilalla soveltaen tetraedrejä ja kahdessa dimensiossa kolmioita. Useimpiin kaupallisiin ohjelmistoihin on olemassa rakenteetonta hilaa käyttävät versiot, mutta on syytä korostaa, että tällä saralla ohjelmat ovat vieläkin kehittymässä ja niiden suorituskyky tai fyysikaalisten ilmiöiden mallinnus ei ole perinteistä rakenteellista hilaa soveltavien versioiden tasolla. Rakenteettomaan hilaan liittyy myös adaptiivisuus, jonka avulla voidaan automaattisesti tihentää

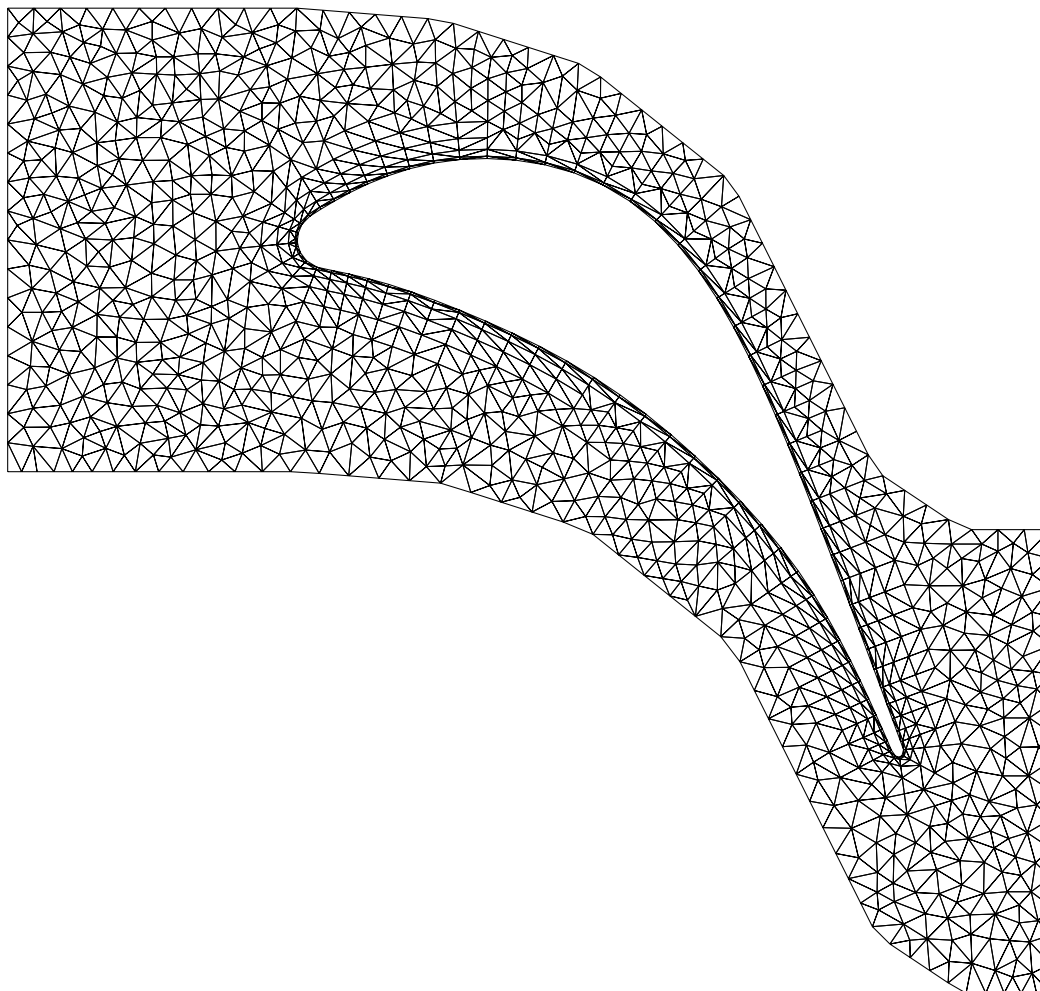


Fig. 4: Rakenteeton laskentahila.

hilaa tarvittavissa kohdissa. Tavoitteena on päästä tulevaisuudessa järjestelmään, jossa geometrian luonti on lähes automaattista ja simuloinnin suorittajan ei tarvitse puuttua laskentahilan generointiin.

3 Kaupallisten ohjelmistojen tilanne

Virtaussimulointiin on nykyisin käytössä lukuisia hyvätasoisia kaupallisia ohjelmistoja. Suomessa käytetään yleisimmin Fluent Inc:n ohjelmistoja, FLUENTin eri versioita ja jossain määrin FIDAP-ohjelmaa. Toinen merkittävä ohjelmistotalo on AEA Technology, jolla on FLUENTia vastaava ohjelmisto CFX. Kuten edellä todettiin, nämä ohjelmat perustuvat kontrollitulavuusmenetelmään ja kummastakin on olemassa rakenteettomiin hiloihin perustuva versio. AEA Technologylla on myös pyöriviin virtauslaitteihin, lähinnä turbokoneisiin, soveltuva erityisohjelma CFX-TASCflow [9]. Ohjelmaa on viime aikoina ryhdytty käyttämään myös sähkömoottoreiden virtaussimulointeihin.

CFX ja FLUENT on suunniteltu ns. yleisiksi virtausratkaisijoiksi. Niissä on melko monipuolisia fysikaalisia malleja mm. palamista varten. Erilaiset virtaustilanteet ovat kuitenkin niin paljon toisistaan poikkeavia, vaativat spesifistä esikäsittelyä ja tulosten tulkintaa, että useassa tapaukses-

sa parempi ja ehdottomasti tehokkaampi tapa on käyttää kyseiselle alueelle räätälöityä ohjelmistoa, josta TASCflow on eräs esimerkki. Myös FLUENTin päälle on rakennettu ainakin elektronikkakomponenttien jäähdytykseen ja sekoitustankkien laskentaan tarkoitetut versiot. CFX:ssä ja FLUENTissa on mahdollista myös rakentaa käyttäjän omia fysikaalisia malleja. Kummassakaan ei ole toistaiseksi sähkö- ja magneettikenttien laskentaa, mutta periaatteessa käyttäjä voisi ohjelmoida niitä kuvaavat yhtälöt. Ohjelmissa ei ole myöskään rakenteen kuvausta, joten niiden tulokset voidaan siirtää rakenneanalyysiin vain tapauksissa, joissa rakenteen muodonmuutosten vaikutus virtaukseen voidaan olettaa heikoksi.

Viime aikoina on ryhdytty puhumaan ns. monifysikaalisista ongelmista. Kuvassa 1 esitetty suunnittelujärjestelmä muodostaa tyypillisen 'monifysikaalisen' kokonaisuuden. Yleisimmin lienee tarkasteltu nesteen ja rakenteen vuorovaikutusta. Tällöin virtauksen ja rakenteen ratkaisut linkitetään dynaamisesti yhteen. Virtausratkaisusta saadaan rakenteen kuormitusjakauma, jonka avulla voidaan ratkaista muodonmuutokset. Tämän jälkeen on virtauspuolella laskentahilan deformeduttava uuden pinnan mukaiseksi. Laskenta muodostuu melko raskaaksi erityisesti, jos tilanne on ajasta riippuva. Silloin jokaisen aika-askeleen sisällä on suoritettava edelläkuvattu rakenne- ja virtausratkaisujen välinen iterointi. Esimerkkinä edelläkuvatun kaltaisesta tutkimusprojektista on NASA Lewis tutkimuskeskuksen ja Centric Engineering Inc:n välinen yhteistyö, jossa tarkoituksena on simuloida turbokoneita [1]. ITM-projektissa, jossa osallistuvat tahot ovat ABB, Volvo ja Chalmersin teknillinen korkeakoulu, liitetään yhteen virtausratkaisu ja sähkömagneettisten kenttien ratkaisu elementtimenetelmää hyödyntäen [2]. ITM-projektin esittelystä ei käy täysin selville onko kyseessä olemassaolevien ohjelmien yhdistäminen vai kokonaan uusi ohjelmisto, jossa samantyyppisellä menetelmällä ratkaistaan kumpikin osa-alue. Tilanne on kuitenkin monimutkainen ja kummallekin ratkaisualueelle on kehittynyt oma formalisminsa, jolloin erillisten ohjelmien yhdistäminen on todennäköisesti helpompi tapa.

Edelläolevissa projekteissa ei käsitelty kaikkien kolmen osa-alueen kuvausta eikä tällä hetkellä ole tiedossa onko projekteissa jo syntynyt sovelluskelpoisia ohjelmistoja. Valmiita paketteja, joissa tarjotaan kuvaus kaikille kolmelle eri osa-alueelle, on tiedossa kaksi: ESI Groupin PAM-SYSTEM [12] ja ANSYS Inc:n ANSYS/Mechanical, ANSYS/FLOTRAN ja ANSYS/Emag -kokonaisuus [11]. Näistä PAM-SYSTEM on autoteollisuudelle tarkoitettu suunnittelujärjestelmä, joka sisältää mm. kolaritilanteen simuloinnin. FLOTRAN on yleiskäyttöinen virtauslaskentaohjelmisto, jonka käyttö on Suomessa toistaiseksi ollut vähäistä. Kokonaisuudessaan ANSYS-paketti vaikuttaa kaupallisista suunnittelujärjestelmistä kaikkein valmiimmalta, mutta koska monifysikaalisten ongelmien simulointi on vasta varsin nuorta, on kaikkeen tarjontaan tällä alueella suhtauduttava varauksellisesti.

4 Tarkkuusvaatimuksista

Tarkastellaan seuraavaksi suunnittelujärjestelmään liittyviä erilaisia vaatimuksia. Edellä kaupallisia ohjelmistoja ja eräitä tutkimusprojekteja tarkasteltaessa oli lähtökohtana kaikkien ilmiöiden yhtäaikainen simulointi. Tässä yhteydessä ei ole mahdollista kartoittaa onko tällaiseen kokonaisuuden simulointiin edes tarvetta, mutta on todettava kaupallisesti saatavia vaihtoehtoja olevan tois- taiseksi varsin vähän. Mikäli kokonaisuudesta puhutaan, on myös otettava huomioon, että ainakin joissain tapauksissa kokonaisuuden hyvyyden ratkaisee eri osien toimivuus: yksi heikko lenkki ku- van 1 kokonaisuudessa voi periaatteessa pilata lopputuloksen. Monifysikaalisisten ongelmien rat- kaisussa on suuri mahdollisuus juuri siihen, että ohjelmiston kehittäjäorganisaation asiantuntemus ei kata samalla tavoin kaikkia eri osa-alueita.

Ilmeisesti useimmiten, tosin ei aina, monifysikaaliset kytkennät ovat sen verran heikkoja, että las- kennan eri vaiheet voidaan tehdä erikseen ja rakentaa tiedonsiirtolinkit eri ohjelmien välille. Täl- löin ohjelmat eri osa-alueille voidaan valita vapaasti ja niiden ei edes tarvitse olla kaupallisia ohjel- mia, vaan käyttöön voidaan ottaa myös tutkimuslaitosten ja yliopistojen kehittämiä ja ylläpitämiä koodeja. Lähestymistavan heikkoutena on ohjelmistokokonaisuuden heikko ylläpidettävyyden ja vai- kea käytettävyyden. Mikäli tavoitteena on teollisuuden itse soveltama ja käyttämää suunnittelujärjes- telmä, on tärkeää tukeutua näennäisesti yhteen ohjelmistoon, kuten ANSYSin ja PAM-SYSTEMin paketit. Vaikka fysikaalinen ongelma ei sinänsä edellyttäisi eri osa-alueiden yhtäaikaista simuloin- tia, on laskentatyön suorittaminen yhden 'sateenvarjon' alla huomattava yksinkertaistus. Käyttäjä- organisaation on silloin myös tarpeen ostaa vain 'yksi ohjelma', jolloin jopa rahoituksen peruste- leminen on yksinkertaisempaa kuin jos olisi hankittava kolme erillistä simulointipakettia.

Edellä on todettu erityisesti virtauslaskentaan liittyvän turbulenssin muodostavan suurimman epä- varmuustekijän simuloinnissa. Tällöin tukeutumalla ohjelmistoon, jonka virtauslaskentapuoli ei ole saavuttanut vastaavaa asemaa kuin esimerkiksi CFX-TASCflow, otetaan jonkinasteinen ris- ki. Toisaalta on todettava, että elektroniikkakomponenttien jäähdytysanalyysistä saatujen koke- musten mukaan itse komponenttien lämpötilat tulevat usein hämmästyttävällä tarkkuudella oikein, vaikka lämmönsiirron laskenta perustuu selvästi varsin karkeisiin malleihin ja geometrisiin yksin- kertaistuksiin. On siis täysin mahdollista, että tarkasteltaessa sähkömoottoreiden lämpöjakaumia, virtauslaskennan merkitys ei ole ratkaiseva ja karkeammallakin mallilla saadaan halutut suuret riittävällä tarkkuudella. Tuntuu siis mahdolliselta seurata elektroniikkakomponenttien yhteydessä tapahtunutta historiaa näiltä osin jo nykyisellä ohjelmistojen ja tietokoneiden laskentakapasiteetin tasolla.

Tilanne on toinen tarkasteltaessa sähkömoottorin eri osiin vaikuttavia voimia ja tehohäviöitä. Voi- man laskenta koostuu oleellisesti paine- ja kitkakerroinjakaumien integroinnista kohteena olevan pinnan yli. Paineesta aiheutuva voima on sinänsä iso (esimerkiksi ilmanpaine aiheuttaa neliödesi- metrin alueelle 1000 N suuruisen voiman), mutta integroitaessa kappaleen pinnan yli nettovoima muodostuu yleensä pieneksi. Tällöin pieni suhteellinen virhe painejakaumassa voi aiheuttaa huo- mattavan ison virheen voiman suunnassa ja suuruudessa. Myös pintakitka on hankala laskea tar- kasti ja sähkökoneiden osalta siihen vaikuttaa vielä pinnan muoto ja karheus. Laskettaessa moot- toriin vaikuttavia voimia tai arvioitaessa jäähdyttämiseen käytettävää tehoa, virtaus on simuloi-

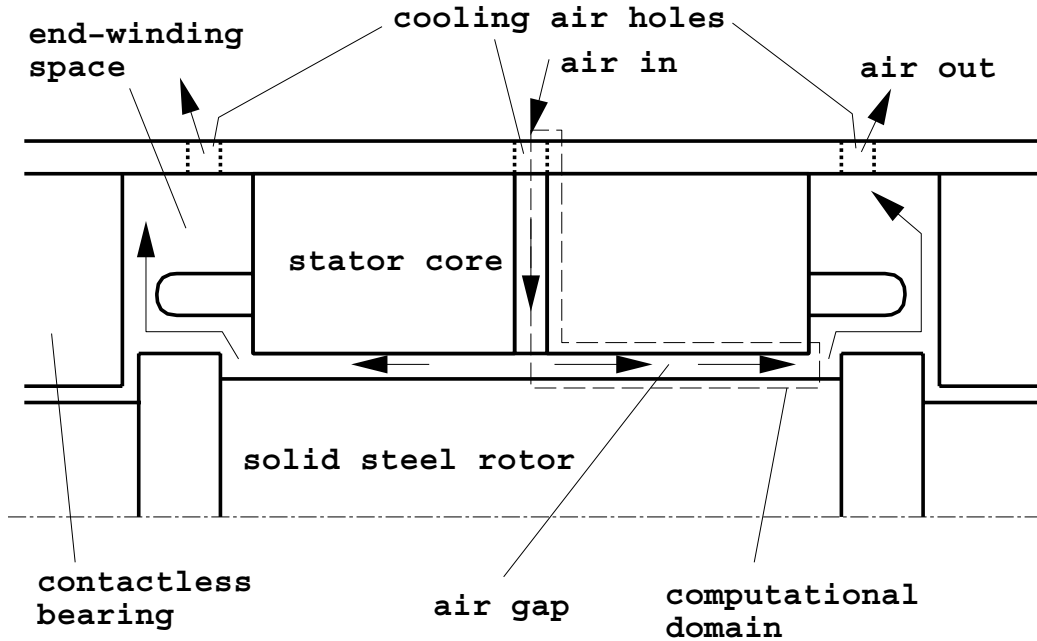


Fig. 5: Suurnopeussähkömoottori. Laskenta-alue on hahmoteltu katkoviivoin.

tava tarkasti. Tämä tekee laskennasta raskaan vielä nykyisillä tietokoneiden teholla. Vaadittavaa tarkkuutta ei välttämättä aina saavuteta, mikä aiheutuu jälleen kerran turbulenssin mallinnuksen epätarkkuudesta.

5 Laskentaesimerkki

Tarkastellaan esimerkkitapauksena sähkömoottorin ilmvälkyksen virtausjakauman mallintamista. Esimerkkitalaus liittyy Lappeenrannan TKK:ssa käynnissä olevaan suurnopeustekniikan tutkimusprojektiin [13]. Moottorin rakenne ilmenee kuvasta 5. Jäähdytysilma tuodaan sisään moottorin keskivaiheilta ja se poistuu päädyistä. Symmetrian avulla on mahdollista mallintaa vain laskenta-alueen puolikas, joka on hahmoteltu kuvaan 5. Reunaehtoina annetaan symmetriatason lisäksi sisääntulossa massavirta ja jäähdytysilman lämpötila sekä ulostulossa paine. Pinnolla asetetaan nopeus joko nolaksi (staattori) tai annetaan pinnan nopeus (roottori). Laskenta on suoritettu Teknillisessä korkeakoulussa kehitetyllä FINFLO-ohjelmalla [14], jossa käytetään karteesisia nopeuskomponentteja. Tällöin kiinteiden pintojen ja reunaehtonopeuksien asettaminen on yksinkertaista. Pyöriville pinoille asetetaan reunaehdoksi $\vec{u}_{rot} = \vec{\Omega} \times \vec{R}$, missä \vec{R} on pinnan säde.

Tapaukselle laadittu laskentaverkko on kuvassa 3, johon on selkeyden vuoksi piirretty joka neljäs hilaviiva. Ensimmäisellä eli tarkimmalla tasolla hilapisteitä on siis kaikissa suunnissa nelinkertainen määrä kuvaan nähden. Kokonaisuudessaan laskentatilavuuksien määrä on 3,6 miljoonaa. Suuri määrä selittyy osittain siitä, että käytössä on turbulenssimalli, jossa laskenta ulotetaan pinnalle asti. Rajakerroksen tarkkaan kuvaukseen kuluu tällöin runsaasti laskentatilavuuksia. Näistä voidaan jättää karkeasti ottaen puolet pois mikäli tyydytään ns. suuren Reynoldsin luvun turbulenssimalleihin. Tinkimällä vielä hivenen tarkkuudesta päädyttäisiin noin miljoonaan hilapisteeseen. Ratkaisutavien suureiden lukumäärä olisi tällöinkin 5-12 miljoonaa riippuen käytetystä turbulenssimallista. Esimerkki osoittaa, että huolimatta suhteellisen yksinkertaisesta geometriasta, kolmidimensiainen

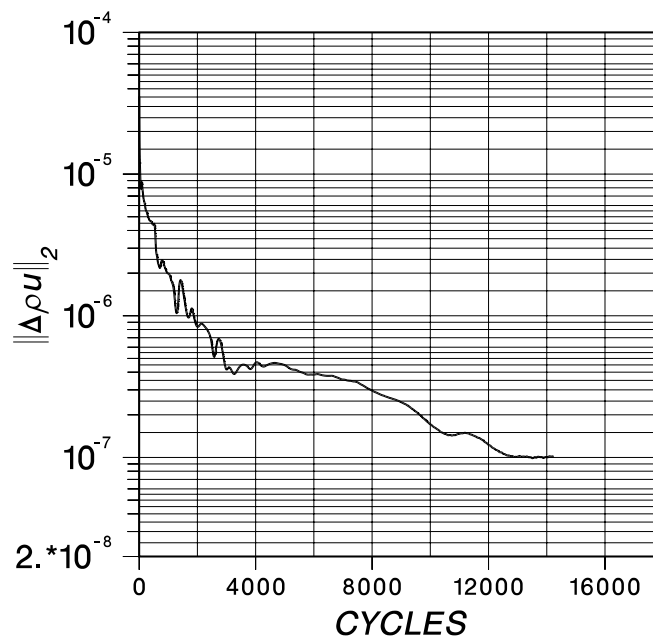


Fig. 6: u -nopeuskomponentin konvergenssihistoria.

virtaustehtävä on melko raskas, mikäli virtausjakauma halutaan ratkaista tarkasti. Lisäksi konvergenssi saattaa olla hidasta. Tässä tapauksessa laskentaa on suoritettu 12 000 iteraatiokierrosta. Nopeuden konvergenssihistoria on esitetty kuvassa 6.

Tutkimuksen tässä vaiheessa läheskään kaikkia ilmiöitä ei ole otettu huomioon, esimerkiksi lämmönjohtavuutta rakenteissa ei ole mukana. Tässä tapauksessa myös säteilyllä roottorista kapean ilmavälin läpi staattoriin saattaa olla merkitystä. Myös virtaustilanne on monimutkainen yksittäisten virtaviivojen kiertyessä roottorin mukana ja edetessä suoraan staattorin pinnan tuntumassa. Virtaus on tässä tilanteessa turbulenttia ja se on mallinnettu yksinkertaisella algebrallisella Baldwin-Lomax -mallilla. Esimerkkinä lasketuista tuloksista on kuvan 7 nopeusvektorit ilmavälissä sivultapäin katsottuna.

Edellä esitetty laskentaesimerkki on geometrisesti yksinkertainen, mutta sisältää useita ilmiöitä, jotka tekevät tilanteesta itse asiassa monimutkaisen. Laskenta on hankala validoida, koska virtausjakauman moottorin sisällä on vaikea mitata. Käytännössä voidaan mitata helposti rakenteiden lämpötiloja ja jossain määrin paineita. Vaikka simulointitulokset tulevat jäämään nyt esillä olevassa tapauksessa monilta osin epävarmaksi, on huomattava, että jo kvalitatiiviset tulokset virtauksesta, painehäviöstä ja eri lämmönsiirtotapojen merkityksestä antavat paljon uutta tietoa moottorin käyttäytymisestä.

6 Johtopäätöksiä ja ajatuksia tutkimuksen kohdentamisesta

Edellä on lyhyesti kuvattu virtaukseen ja lämmönsiirtoon liittyviä kysymyksiä sähkömoottoreiden yhteydessä. On ilmeistä, että juuri virtaus ja siihen kiinteästi liittyvä lämmönjohtuminen rakenteissa, muodostaa suunnittelujärjestelmän hankalimman osan. Useassa tapauksessa riittävällä tarkkuudella tehty laskenta on vielä tulevaisuudessakin raskas laskentatehtävä ja sen käyttö joka-

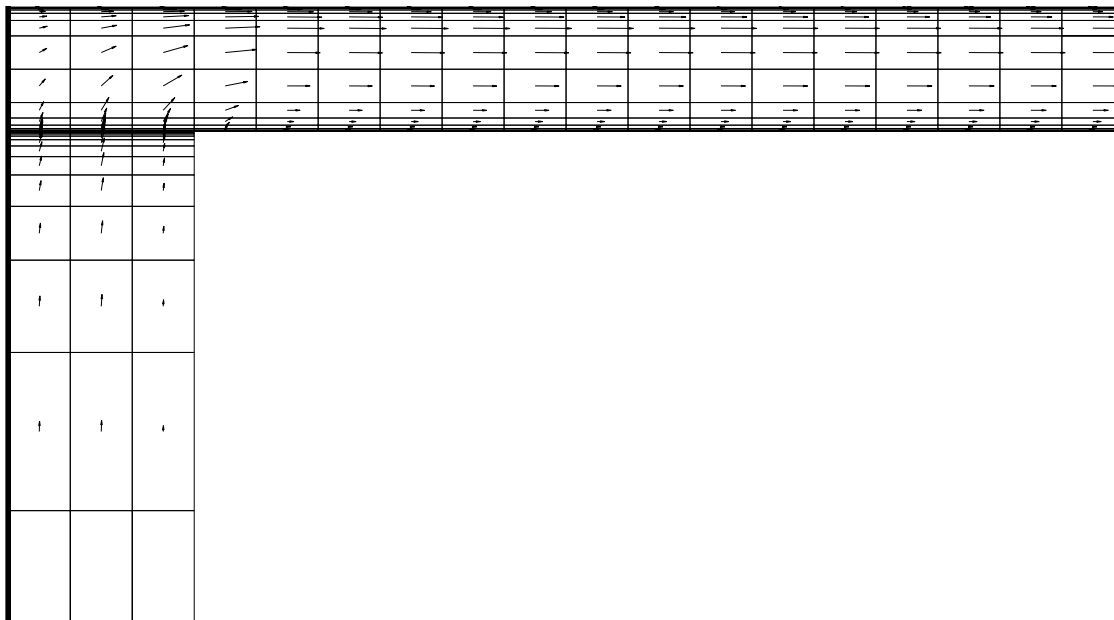


Fig. 7: Nopeusvektorit suurnopeussähkömoottorin ilmavälissä.

päiväisessä suunnittelutyössä liian työlästä. Toisaalta elektroniikkakomponenttien jäähdytystä on simuloitu huomattavan karkeilla malleilla ja hyödyllisin tuloksin jo pitkään. Karkeasti voidaan arvioida, että sähkömoottoreiden simulointia on jo nyt mahdollista hyödyntää joissakin tehtävissä, kun taas on olemassa tapauksia, joissa tarvitaan supertietokoneen laskentatehoa. Ääriesimerkin viimeksimainitusta muodostavat ajasta riippuvat tapaukset.

Tässä yhteydessä ei oteta kantaa siihen tarvitaanko sähkö- ja magneettikenttien, virtauksen ja mekaanisen käyttäytymisen simulointia toisiinsa kytkettyinä. Vaikka laskenta suoritettaisiin erillisinä, on suunnittelijalle usein tärkeää työskennellä saman ohjelmistotyökalun ääressä. Tällöin on tarve linkittää eri osa-alueita kuvaavat ohjelmistot yhteen. Tapoja on kaksi: joko liitetään täysin erilliset ratkaisut toisiinsa ja mahdollinen iterointi suoritetaan ohjelmien välillä. Toisessa tavassa pyritään laajentamaan jonkin osa-alueen ohjelmisto myös toiselle alueelle. Periaatteessa näin on jo tehty magneto-hydrodynaamisissa simuloinneissa ja vastaava voitaisiin tehdä TKK:n FINFLO-ohjelmaan melko pienellä työpanoksella. Virtauspuolelta on helppo ajatella juuri virtauksen monitori erityisilmiöineen muodostavan ratkaisun hankalimman osan ja periaatteessa sähkö- ja magneettikenttien ratkaisu voidaan tehdä samoilla menetelmillä kuin virtausratkaisu. Suurempi hankaluus tulee rakennepuolelta, jossa on vakiintuneen ja kypsytetyn tason saavuttaneita ohjelmistoja. Todennäköisesti paras monifysikaalinen lähestymistapa on liittää sopivilla linkeillä eri osa-alueiden hyväksi tiedettyjä ohjelmia yhteen saman valikon alle.

Tällä hetkellä näyttäisi siltä, että sähkömoottoreihin liittyvien eri ilmiöiden numeerinen simulointi on nopeasti yleistymässä. Tähän viittaa esimerkiksi CFX-TASCflow -ohjelman uusimpien esitteiden sisältö. Varsinaisia kaupallisia monifysikaalisia ohjelmistotuotteita löytyi tämän selvityksen yhteydessä kaksi: ANSYS ja PAM-SYSTEMS. Vaikka näiden tämänhetkinen taso ei ole todennäköisesti vielä riittävä käytännön suunnittelutyöhön on selvää, että lähitulevaisuudessa on saatavilla kaupallisesti tälle alueelle sopivia ohjelmistoja. Toisena, ja ainakin aluksi tasoltaan parempana vaihtoehtona olisi koota ohjelmisto jo olemassa olevista tutkimuslaitosten laskentakoodista.

Vaikka tällä tavoin olisi mahdollista tulevaisuudessakin saada korkeatasoisempi ohjelmistotuote, ainakin ilmiöiden kuvauksen osalta, tämä tapa olisi varsin kallis ja sille tuskin Suomen oloissa löytyisi rahoitusta. Tämän tyyppisen ohjelmiston käytettävyys tuskin koskaan nousisi esi- ja tulosten jälkikäsitteilyn osalta varsinaisten kaupallisten tuotteiden tasolle.

Ottamalla huomioon tämänhetkinen tilanne, järkevä toimintasuunta suunnittelujärjestelmän osalta olisi seuraavankaltainen: Toimintaa käynnistettäisiin sekä kaupallisten ohjelmien avulla että tutkimuslaitosten ohjelmiin tukeutuen. Kaupallisista ohjelmista voidaan valita joku, esimerkiksi AN-SYSin paketti, jota aluksi testataan laskemalla eri osa-alueiden sopivia esimerkkitapauksia erikseen. Näiden tuloksia voidaan verrata joko mittaustietoihin tai muiden ohjelmien tuloksiin. Myös laskenta-aika ja ohjelman käytettävyys ansaitsevat tässä yhteydessä huomiota. Lopuksi ohjelmistoa voidaan käyttää myös kokonaisuutena 'monifysikaalisesti'. Projektin kesto olisi 2-3 vuotta ja se vaatisi täysipäiväistä työskentelyä, joka ehkä voitaisiin aloittaa diplomityönä. Lopputuloksena olisi valmius ainakin jonkintasoisiiin simuloiteihin ja selkeä käsitys sen hetkisestä tasosta maailmalla. Työ saattaisi luonteensa puolesta parhaiten soveltua VTT:ssä tehtäväksi.

Edellä esitetty projekti ei tule johtamaan kovin hyvään lopputulokseen ilman selkeää ohjausta eikä myöskään valitun ohjelmiston ominaisuuksista saada oikeaa kuvaa ellei rinnalla käytetä muita ohjelmia kouliintuneiden asiantuntijoiden voimin. Tässä yhteydessä voisi korkeakouluilla, joissa tällä hetkellä on olemassa korkealaatuisia tietokoneohjelmistoja, olla jonkinlainen rooli. Korkeakouluisa voitaisiin osittain laskea samoja tapauksia kuin käyttöön otetulla monifysikaalisella ohjelmistolla. Näin saadaan käsitys sekä tarkkuudesta että käytettävyydestä ja voidaan suorittaa myös uuteen ohjelmistoon perehtyvän henkilön ohjausta. Korkeakouluilla on tutkimukseen käytettävissään supertietokoneresursseja. Näitä voidaan tutkimusmielessä hyödyntää sellaisiin tapauksiin, joiden laskeminen muilla keinoin olisi mahdotonta. Tutkimuksen avulla alan yleinen tietous lisääntyy ja voidaan myös suorittaa koulutusta. Tämän hankkeen kokonaispituus voisi olla kolme vuotta tai pidempikin, mikäli löytyy sopivia selvitettäviä ilmiöitä. Sopiva osapuolten lukumäärä olisi 3-5. Työ ei edellyttäisi osapuolilta kokopäiväistä sitoutumista edellyttäen että se voidaan mielekkäästi kytkeä muihin menneillä oleviin projekteihin. Hankkeessa voitaisiin myös tehdä monifysikaalinen simulointi siirtämällä tietoa ohjelmien välillä kuvan 1 osoittamalla tavalla. Tämä ei välttämättä edellyttäisi edes kovin standardoitua tiedonsiirtotapaa, mutta vaatii silti kohtalaisen työpanoksen. TKK:ssa on tällä alueella kokemusta FINFLO-ohjelman painejakauman siirrosta rakenneanalyysiohjelmaan.

Edellä esitetty kokonaisuus kokoaisi alalle Suomessa uudentyyppisen tutkimusyhteisön, jolla olisi kuitenkin vahvat linkitykset jo olemassaoleville osa-alueille. Virtauslaskennan osalta voidaan todeta, että on jo olemassa jonkin verran pyöriviin virtauslaitteisiin ja jopa sähkömoottoreihin kohdistunutta tutkimustyötä, joka saisi lisäresursseja ehdotetusta hankkeesta. Kytkemällä korkeakoulut mukaan saadaan eri alueiden paras asiantuntemus hyödynnetyksi ja alalle saataisiin myös syntymään koulutusta.

Viitteet

[1] <http://www.lerc.nasa.gov/WWW/RT1997/2000/2900lawrence.htm>.

- [2] [http://www.md.chalmers.se/Centres/Phi/Project/ITM AFEM/index.html](http://www.md.chalmers.se/Centres/Phi/Project/ITM_AFEM/index.html).
- [3] White, F. M., *Viscous Fluid Flow*. New York: McGraw–Hill Book Co., 2nd ed., 1991. ISBN 0–07–069712–4.
- [4] Siikonen, T. and Pan, H., “Application of Roe’s Method for the Simulation of Viscous Flow in Turbomachinery,” in *Proceedings of the First European Computational Fluid Dynamics Conference*, (Brussels), pp. 635–641, Elsevier Science Publishers B.V., Sept. 1992.
- [5] Wilcox, D., *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada: DCW Industries, Inc., 1993. ISBN 0–9636051–0–0.
- [6] Majander, P., *Developments in Large Eddy Simulation*. Licentiate’s thesis, Helsinki University of Technology, 1999.
- [7] Hirsch, C., *Fundamentals of Numerical Discretization*, Vol. 1 of *Numerical Computation of Internal and External Flows*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1988. ISBN 0–471–91762–1.
- [8] Fluent Inc., *FLUENT 4.4 Users Guide Volume 1-4*, second ed., May 1997.
- [9] <http://www.aeat.com/cfx>.
- [10] <http://www.fluent.com/software/software.htm>.
- [11] <http://www.ansys.com/>.
- [12] <http://www.esi.fr/>.
- [13] Keskustelut LTKK:n tutkija Maunu Kuosan kanssa.
- [14] *FINFLO User Manual version 3.2*, December 1999.