

MUISTIO No      CFD/TERMO-28-98      pvm 23. kesäkuuta, 1998

## OTSIKKO

Painekorjausyhtälön reunaehtojen testaus tapauksessa ”sylinteri vapaassa virtauksessa”

LAATIJA(T)  
Ari Miettinen

## TIIVISTELMÄ

Työssä tutkittiin painekorjausyhtälön reunaehtojen valintaa O-hilan liimausreunalla, joka vastaa monilohkoisen hilan lohkokoreunaa. Liimausreunalla painekorjausyhtälölle tulisi käyttää Dirichlet'n ehtoa  $p'_{ghost} = 0$  (*ghost* on laskenta-alueen viereinen haamukoppi). Neumannin ehtoa  $\frac{\partial p'}{\partial n}\Big|_{face} = 0$  käytettäessä laskenta alkaa helposti oskilloida (*face* on laskenta-alueen reuna). Neumannin ehtoa käytettäessä oskilloinnilta vältytään, jos *haamukoppien nopeudet* päivitetään fysikaalisesti liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen. Toimenpide kuitenkin hidastaa rinnakkaislaskentaa.

## SIVUJA

10

## AVAINSANAT

SIMPLE, pressure correction, boundary conditions

## TARKASTANUT

Timo Siikonen      June 22nd, 1998

# 1 Johdanto

Tässä paperissa kuvataan havaintoja, joita on tehty tapauksen ”sylinteri vapaassa virtauksessa” testiajoissa. Testit on laskettu Siikosen 2D Navier-Stokes ratkaisijan ja Pensalan 2D monihila-Poisson-ratkaisijan yhdistelmällä. Siikosen ratkaisijassa on käytetty konvektiolle eksplisiittisessä vaiheessa toisen kertaluvun upwindiä ja implisiittisessä vaiheessa ensimmäisen kertaluvun upwindiä. Lisäksi implisiittisessä vaiheessa matriisien diagonaalia on painotettu pseudoaika-askeleella ja massavirheellä. Implisiittisessä vaiheessa reunat on käsitelty yhden haamukopin avulla pitäen nopeuden muutos reunapinnalla nollana.

Paine kenttä ja nopeudet on linkitetty SIMPLE-algoritmin avulla. Paine korjausyhtälön kertoimissa tarvittavat liikemääräyhtälön diagonaalien kertoimet sisälsivät edellä kuvattut painotukset. Poisson-tyyppisen paine korjausyhtälön reunaehdot annettiin haamukoppien pelkistetyillä yhtälöillä. Dirichlet’n ja Neumann’in ehtojen käsittely on esitetty liitteessä 1. Monihilan harvempien tasojen reunaehdot konstruointiin tiheimmän hilan haamukoppien paine korjausyhtälöiden kertoimista (Pensala 1997), mitä on niinkään kuvattu liitteessä 1.

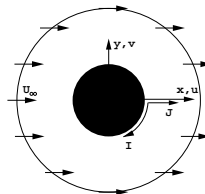
Tässä työselostuksessa on tarkasteltu testitapauksen avulla lähinnä monihila-algoritmiin perustuvan paine korjausyhtälön reunojen kuvausta. Lisäksi on selvitetty nopeuksien reunaehtojen fysikaalisen päivityksen tarvetta liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen sekä optimaalisia monihilaratkaisijan ajoparametreja.

## 2 Testitapaus

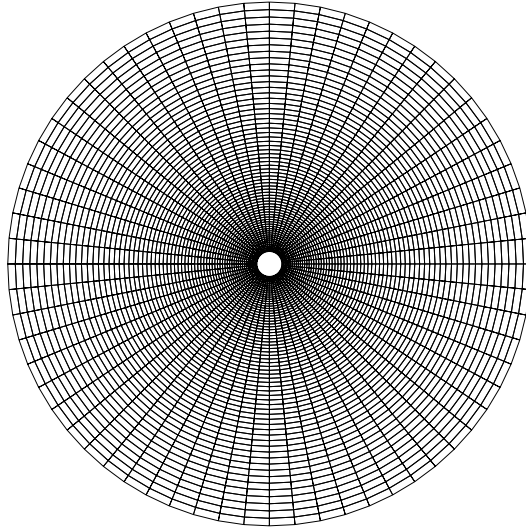
Testitapauksena käytettiin ”sylinteriä vapaassa virtauksessa”. Sylinterin halkaisijaan  $D$  kiinnitetty Reynoldsin luku

$$Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu} \quad (1)$$

oli 30, jolloin virtaus tiedetään olevan stationäärinen. Määritelmässä (1)  $U_\infty$  on vapaan virtauksen nopeus. Hila on esitetty kuvassa 2. Kuvassa 1 on esitetty hilan  $I$ - ja  $J$ -indeksien aloitusreunat.



**Kuva 1.** Laskenta-alueen topologia.



**Kuva 2.** Testiajoissa käytetty  $64 \times 64$  hila.

Kuvasta 1 nähdään, että sylinterin alavirran puolella hilan seinät  $I = IMIN$  ja  $I = IMAX$  liimataan toisiinsa. Liimaus on ratkaisijan kannalta ongelmallinen, kun haetaan monilohkoisille hiloille yleispätevää, yksinkertaista ja tehokasta ratkaisutapaa.

Liikemääräyhtälöissä käytettiin kaikissa testiajoissa samoja reunaehtoja. Reunalla  $JMIN$ , joka on sylinterin seinä, molemmat nopeuskomponentit olivat nollija ja paine ekstrapoloitiin laskenta-alueesta. Vapaan virtauksen reunalla  $JMAX$  haamukoppien arvot olivat  $u = U_\infty$ ,  $v = 0$  ja  $p = 0$ , joilloin arvot laskenta-alueen reunalla ”elävät” hieman. Alavirran liimauspinnolla  $IMIN$  ja  $IMAX$  geometrisesti toisiaan vastaavien koppien nopeuksien ja paineiden arvot ”vaihdettiin” keskenään.

$x$ - ja  $y$ -suuntien liikemääräyhtälöt ratkaistiin kolmella line-Gauss-Seidel-iteraatiolla. Tässä LGS-iteraatiolla tarkoitetaan iteraatioparia 1 LGS  $I$ -suunnassa ja 1  $J$ -suunnassa.

Laskennassa alirelaksoitiin vain painetta, ja vakiona pidetyt relaksointikertoimet olivat  $\alpha_P = 0.15$  ja  $\alpha_V = 1.0$ .

### 3 Testilaskenta

Kaikissa testeissä painekorjausyhtälön reunaehto vapaan virtauksen reunalla  $JMAX$  oli  $p'_{ghost} = 0$  ja sylinterin pinnalla  $JMIN$  käytettiin ehtoa  $\frac{\partial p'}{\partial n} = 0$ . Ehdoista edellinen sallii ”korjaavan massan” virtauksen laskenta-alueen reunan ylitse, mutta jälkimmäinen ei sitä salli, mikä onkin luonnollinen reunaehto seinällä. Liimattavien pintojen  $IMIN$  ja  $IMAX$  painekorjauksen reunaehtoja varioitiin.

Laskenta ajettiin kaikissa tapauksissa samaan tarkkuuskriteeriin, joka oli jatkuvuusyhtälön massavirheen  $L_2$ -normin arvo  $10^{-9}$ .

### 3.1 Neumannin ehto $\frac{\partial p'}{\partial n}|_{face} = 0$ liimausreunalla

Tässä ensimmäisessä testisarjassa käytetään painekorjausyhtälössä liimausreunalla  $IMIN - IMAX$  Neumann'in ehtoa  $\frac{\partial p'}{\partial n}|_{face} = 0$ , eli korjaava massavuo on nolla liimausreunalla. Jaetaan testisarja kahteen osaan. Ensimmäisessä osassa jätetään liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeinen nopeuksien reunaehtojen (siis haamukoppien) päivitys varsinaisella reunaehtojen käsittelyn aliohjelmalla tekemättä. Tällöin laskenta-alueen reunan viereiset nopeuksien haamukoppiarvot päivittyvät automaattisesti aiemmin kuvatun liikemääräyhtälöiden ”yksi-yli-reunan” implisiittisen vaiheen takia (muutos laskenta-alueen reunalla on nolla). Tämä päivittyminen pätee fysikaalisesti vain kiinteillä pinnoilla, ja muun tyyppisillä reunoilla päivittyminen ei ole luonnollisestikaan yhtäpitävä varsinaisen reunaehtojen käsittelyn aliohjelman kanssa. Testisarjan toisessa osassa päivitetään nopeuksien haamukoppiarvot liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen fysikaalisessa mielessä korrektisti reunaehto-aliohjelman avulla. Liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeinen nopeuksien fysikaalinen reunaehtojen päivitys tai sen tekemättä jättäminen vaikuttaa liimausreunan  $IMIN - IMAX$  pintanopeuksien arvoihin ja siten edelleen solujen massavirheisiin. Molemmista testisarjoissa suoritetaan luonnollisesti nopeuksien reunaehtojen fysikaalinen päivitys painekorjausyhtälön ratkaisemisen jälkeen ennen uuden Navier-Stokes-iteraatiokierroksen alkua.

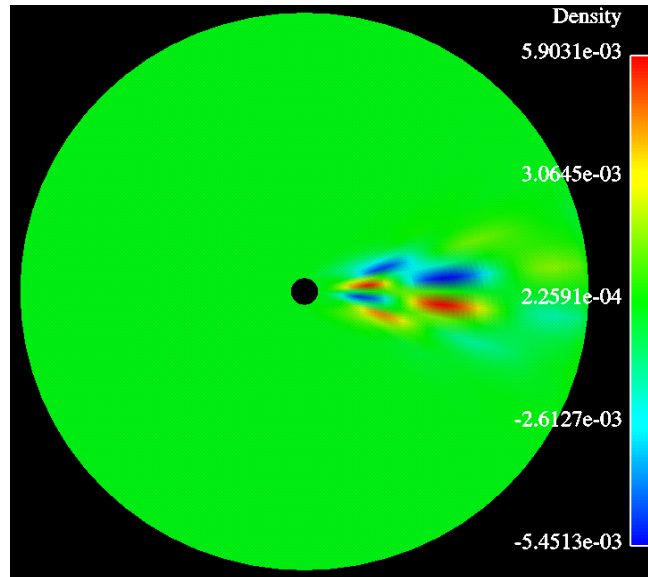
Selvitetään lisäksi painekorjausyhtälön ratkaisutavan, LGS ja MG, vaikutusta konvergoitumiseen. Molemmilla Poisson-ratkaisijalla ajetaan testit muutamalla iteraatiolla ja hyvin suurella iteraatiokierrosten määrällä sekä haetaan CPU-ajan suhteen optimi. Monihilan tapauksessa käytetään aina viittä hilatasoa ja V-sykli on 1-1-1-1-10-0-0-0-0, missä siis hiloja karkeistaessa lasketaan 1 LGS-iteraatio paitsi karkeimmalla hilalla 10 LGS-iteraatiota, ja tultaessa V-sykliä ylöspäin hienoimmille hilatasoille korjataan vain tuloksia (ilman jälkisweepejä). Joissakin tapauksissa on testattu jälkisweepeiden vaikutusta lähinnä laskenta-aikaan.

#### 3.1.1 Ilman nopeuden reunaehtojen fysikaalista päivitystä liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen

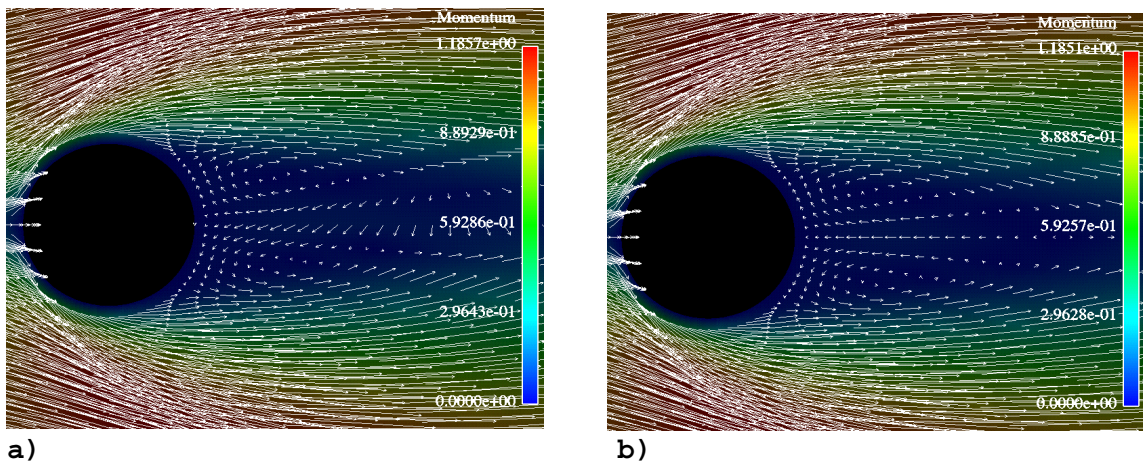
Tässä Neumannin reunan versiossa siis vain ensimmäinen haamukoppi päivitetään implisiittisen vaiheen reunojen käsittelyyn perustuen. Tällöin  $\Delta u$ :n ja  $\Delta v$ :n muutokset pidetään laskenta-alueen reunoilla muuttomattomina, mikä ei ole yhtäpitävä varsinaisten reunaehtojen kanssa muualla kuin kiinteillä pinnoilla.

Käytettäessä 1-3 LGS-iteraatiota painekorjausyhtälölle, laskenta konvergoitui ongelmitta ja tulos oli ”oikea”,  $C_D = 1.624$ . Käytettäessä neljää tai useampaa LGS-iteraatiota, laskenta jäi oskilloimaan. Sylinterin alavirran puolella oli havaittavissa epäsymmetrisyyttä. Parhaiten se näkyy painekorjauksissa (kuva 3.) ja alavirran nopeusvektoreissa

(kuva 4.a.). Optimaalinen valinta CPU-ajan suhteen oli 3 LGS-iteraatiota, jolloin CPU-aika oli 103.8 s. Vastaava aika 1 ja 2 LGS-iteraatiolla oli 135.4 s ja 109.3 s.



**Kuva 3.** Esimerkki oskilloimaan jääneen laskennan painekorjauskentästä. Skaalan otsikosta huolimatta kyseessä on painekorjaus eikä tiheys.



**Kuva 4.** Nopeusvektorit sylinterin alavirrassa: a) esimerkki oskilloimaan jääneen laskennan tuloksesta, joka on selvästi epäsymmetrinen b) esimerkki loppuun saakka konvergoituneen laskennan lopputuloksesta, virtaus on symmetrinen, kuten Reynoldsin luvulla  $Re_D = 30$  pitää olla.

Käytettäessä yhtä 5:n hilatason MG:n V-sykliä 1-1-1-1-10 ilman jälkisweepejä laskenta konvergoitui. CPU-aika oli hieman alhaisempi kuin optimaalisella LGS:llä, 99.7 s (noin 96% LGS:n ajasta). Jos samoja V-syklejä laskettiin useampia (2 →) tai yhden V-syklin tapauksessa käytettiin jälkisweepejä, laskenta jäi oskilloimaan. Tässä tapauksessa optimaalinen painekorjausyhtälön ratkaisutapa oli MG 1V(1-1-1-1-10) ilma jälkisweepejä.

### 3.1.2 Nopeuden reunaehtojen fysikaalinen päivitys liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen

Tässä Neumannin reunan versiossa nopeuksien reunaehdot päivitetään liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen molemmissa haamukopeissa reunojen käsittelyn aliohjelmalla fysikaalisiin perusteisiin.

Käytettäessä painekorjausyhtälölle 1-30 LGS-iteraatiota laskenta konvergoitui ongelmitta. Optimaalisin valinta oli 3 LGS-iteraatiota, jolloin CPU-aika oli 105.6 s. CPU-aikojen erot valintojen 2-5 LGS-iteraatiota välillä oli 10% sisällä. Kun LGS-iteraatioiden määrä oli 35 tai suurempi, laskenta oskilloi.

Käytettäessä 5:n hilatason V-sykliä (1-1-1-1-10) ilman jälkisweepejä laskenta konvergoitui, kun V-syklien määrä oli 1-6. Seitsemällä V-syklillä laskenta oskilloi. Optimaalisin valinta oli 1 V-sykli, jolloin CPU-aika oli 100.4 s. V-syklien määrän lisääminen kasvatti CPU-aikaa  $\sim$  lineaarisesti: 2V 107.1 s, 3V 116.8 s, ..., 6V 145.8 s.

Nopeuden reunaehtojen fysikaalinen päivitys liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen laajentaa aluetta, jossa konvergoitunut tulos saavutetaan käytettäessä Neumannin reunaehto O-hilan liimausreunalla. Eli painekorjausyhtälö voidaan ratkaista tarkemmin, jos siihen on aihetta. Sen sijaan tarvittavan CPU-ajan tarve aleni vain 5 %.

## 3.2 Dirichlet ehto $p'_{ghost} = 0$ liimausreunalla

Käytetään toisessa testisarjassa painekorjausyhtälölle liimausreunalla *IMIN* – *IMAX* Dirichlet'n ehtoa  $p'_{ghost} = 0$ . Tarkastellaan tapausta kuten Neumannin reunaehdon tapauksessa ilman nopeuden fysikaalista päivitystä ja nopeudet fysikaalisesti päivitettyinä molemmissa haamukopeissa liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen.

Kuten edellisessä testisarjassa selvitetään painekorjausyhtälön ratkaisutavan, LGS ja MG, vaikutusta konvergoitumiseen. Molemmilla Poisson-ratkaisijalla ajetaan testit muutamalla iteraatiolla ja hyvin suurella iteraatiokierrosten määrällä sekä haetaan CPU-ajan suhteen optimi. Monihilan ajoparametrit on kuvattu Neumannin reunaehto käsittelyn testisarjan yhteydessä.

### 3.2.1 Ilman nopeuden reunaehtojen fysikaalista päivitystä liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen

Sekä LGS-ratkaisijalla että MG:llä laskenta konvergoitui aina. LGS:llä testejä ajettiin 1-100 LGS-iteraatiolla ja MG:llä 1-20 V-syklillä (1-1-1-1-10) ilman jälkisweepejä. Muutamassa tapauksessa kokeiltiin jälkisweeppien käyttöä, joka ei vaikuttanut tulokseen tai mainittavasti laskenta-aikaan.

LGS-iteraatioilla optimaalisin valinta oli 4 iteraatiota, jolloin laskenta-aika oli 93.2 s.

MG:llä optimaalisin valinta oli 1V(1-1-1-1-10), jolloin laskenta-aika oli 85.2 s. Monihilan käytöllä laskenta-aika aleni noin 10%.

### 3.2.2 Nopeuden reunaehtojen fysikaalinen päivitys liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen

Sekä LGS-ratkaisijalla että MG:llä laskenta pysyi aina pystyssä johtaen konvergoituneeseen tulokseen. LGS:llä testejä ajettiin 1-100 LGS-iteraatiolla. MG:llä 1-20 V-syklillä (1-1-1-1-10) ilman jälkisweepejä. Muutamassa tapauksessa kokeiltiin jälkisweeppien käyttöä, joka ei vaikuttanut tulokseen tai mainittavasti laskenta-aikaan.

LGS-iteraatioilla optimaalisin valinta oli 4 iteraatiota, jolloin laskenta-aika oli 93.9 s ja MG:llä optimaalisin valinta oli 1V(1-1-1-1-10), jolloin laskenta-aika oli 83.1 s. Monihilan käytöllä laskenta-aika aleni tässä tapauksessa noin  $\sim 10\%$ .

Nopeuden reunaehtojen fysikaalinen päivitys liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen ei nopeuta laskentaa, eikä ole konvergoitumisen kannalta välttämätöntä, kun painekorjausyhtälössä käytetään Dirichlet'n ehtoa  $p'_{ghost} = 0$ .

## 4 Päätelmät

Käytettäessä liimausreunalla, joka vastaa monilohkoisen laskentatapauksen lohkoruunaa, Neumannin ehtoa  $\frac{\partial p'}{\partial n} \Big|_{face} = 0$  tuloksen konvergoituminen varmistuu, kun nopeudet päivitetään molemmissa haamukopeissa liikemääräyhtälöiden ratkaisemisen jälkeen. Jos liimausreunalla käytetään Dirichlet'n ehtoa  $p'_{ghost} = 0$  nopeuksien reunaehtojen päivitys ei ole välttämätöntä, eikä se edes alenna laskenta-aikaa. Reunaehtojen päivityksen välttämistä on hyötyä varsinkin rinnakkaislaskennassa. Tässä esimerkissä monihilan käytöllä saavutettiin 10% parannus laskenta-ajassa. Ero voi olla suurempikin, jos monihilalle etsittäisiin optimaaliset ajoparametrit.

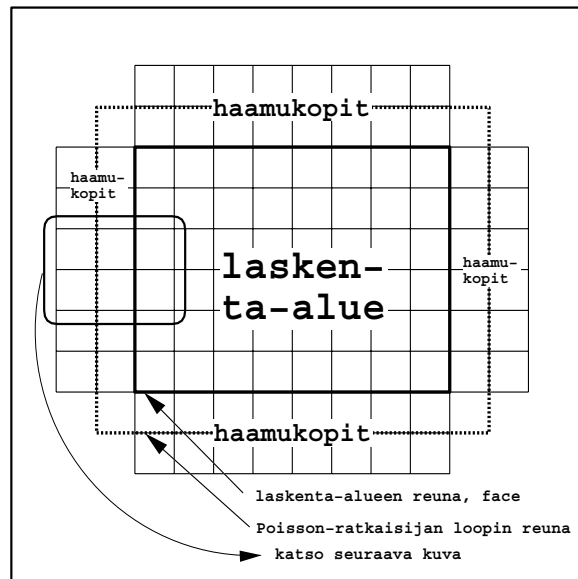
**LIITE 1.** Monihila-Poisson-ratkaisijan reunaehdot tiheimmällä ja harvemmillä hilatasoilla

Painekorjausyhtälö on ns. Poisson-yhtälö, jossa lähdeterminä on massavirhe. Ratkaistaessa painekorjausyhtälöä

$$\begin{aligned}
 AE_{i,j}p'_{i+1,j} + AN_{i,j}p'_{i,j+1} + AW_{i,j}p'_{i-1,j} + AS_{i,j}p'_{i,j-1}AP_{i,j}p'_{i,j} + ANE_{i,j}p'_{i+1,j+1} \\
 + ANW_{i,j}p'_{i-1,j+1} + ASE_{i,j}p'_{i+1,j-1} + ASW_{i,j}p'_{i-1,j-1} = DM_{i,j}
 \end{aligned} \quad (2)$$

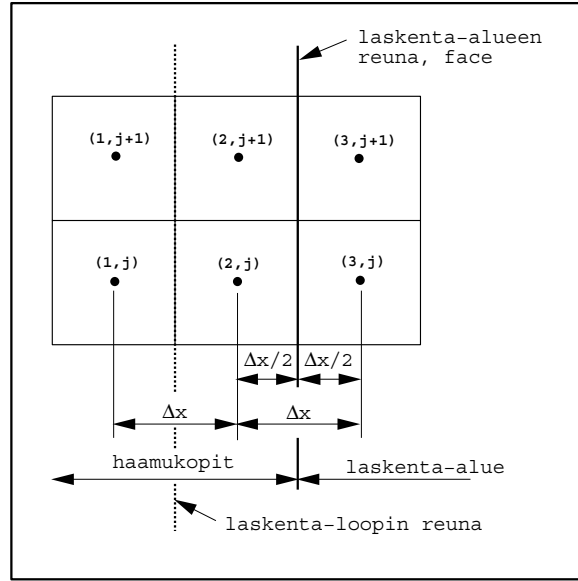
selvästi yleisimmin esiintyvät reunaehdot ovat Dirichlet'n ehdot  $p'|_{ghost} = 0$  ja  $p'|_{face} = 0$  sekä Neumann'in ehto  $\frac{\partial p'}{\partial n}|_{face} = 0$ . Näiden reunaehtojen lisäksi monilohkoisessa tapauksessa voidaan joutua antamaan Dirichlet'n ehto  $p'|_{ghost} = b$ , missä  $b \neq 0$ .

Kehitettävässä Poisson-ratkaisijassa reunaehdot annetaan haamukoppien avulla. Laskenta-loopit ulottuvat ensimmäiseen laskenta-alueen ulkopuoliseen haamukoppi-riviin saakka, eli ne ovat tyypiltään ”yksi-yli-reunan” looppeja. Edellä mainittuja seikkoja on havainnollistettu kuvissa L1.1 ja L1.2.



**Kuva L1.1.** Laskenta-alue ja sitä ympäröivät haamukopit.





**Kuva L1.2.** Haamukoppeihin liittyviä yksityiskohtia.

Dirichlet'n ehto  $p'|_{face} = 0$  toteutetaan siten, että vierekkäisistä soluarvoista, nyt siis solut  $(2, j)$  ja  $(3, j)$ , interpoloitu painekorjauksen  $p'$  arvo pinnalla on nolla. Ehto kirjoitetaan solulle  $(2, j)$  yhtälöä (2) pelkistäen

$$AP_{2,j}p'_{2,j} + AE_{2,j}p'_{3,j} = 0 \quad (3)$$

missä lähde-termi on nolla, eli  $DM_{2,j} = 0$ , ja yhtälön kertoimille saadaan arvot

$$\begin{aligned} AE_{2,j} &= AP_{2,j} = AP_{3,j} \\ AW_{2,j} &= AS_{2,j} = AN_{2,j} = 0 \\ ANE_{2,j} &= ANW_{2,j} = ASE_{2,j} = ASW_{2,j} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Jotta vältetään suuret erot vierekkäisten koppien diagonaalikertoimien välillä, luetaan kertoimen  $AP_{2,j}$  arvoksi viereisen kopin diagonaalikerroin,  $AP_{2,j} = AP_{3,j}$ .

Jos Dirichlet'n ehto on muotoa  $p'|_{face} = b$ , voidaan edellä kuvattua periaatetta noudattaen johtaa solun  $(2, j)$  kertoimille ja lähde-termille arvot

$$\begin{aligned} AE_{2,j} &= AP_{2,j} = AP_{3,j} \\ AW_{2,j} &= AS_{2,j} = AN_{2,j} = 0 \\ ANE_{2,j} &= ANW_{2,j} = ASE_{2,j} = ASW_{2,j} = 0 \\ DM_{2,j} &= 2 AP_{2,j} b \end{aligned} \quad (5)$$

missä jälleen viereisen kopin diagonaalikerroin on luettu haamukopin diagonaalille, mikä näkyy luonnollisesti myös lähdetermissä.

Jos Dirichlet'n ehto  $p'|_{ghost} = 0$  annetaan laskenta-alueen viereisessä haamukopissa, ainoastaan diagonaalialkio on nolasta poikkeava ja muut kertoimet sekä lähdetermi ovat nollia. Tässäkin tapauksessa luetaan varmuuden vuoksi diagonaalialkiolle viereisen solun diagonaalikerroin. Kertoimet ja lähdetermi ovat siis

$$\begin{aligned}
 AP_{2,j} &= AP_{3,j} \\
 AW_{2,j} &= AS_{2,j} = AN_{2,j} = AE_{2,j} = 0 \\
 ANE_{2,j} &= ANW_{2,j} = ASE_{2,j} = ASW_{2,j} = 0 \\
 DM_{2,j} &= 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

Jos Dirichlet'n ehto on muotoa  $p'|_{ghost} = b$ , saadaan solun  $(2, j)$  kertoimille ja lähdetermille arvot

$$\begin{aligned}
 AP_{2,j} &= AP_{3,j} \\
 AE_{2,j} &= AW_{2,j} = AS_{2,j} = AN_{2,j} = 0 \\
 ANE_{2,j} &= ANW_{2,j} = ASE_{2,j} = ASW_{2,j} = 0 \\
 DM_{2,j} &= AP_{2,j} b
 \end{aligned} \tag{7}$$

Yleinen Neumann'in ehto  $\frac{\partial p'}{\partial n}|_{face} = b$  laskenta-alueen reunalla annetaan valinnoilla

$$\begin{aligned}
 -AE_{2,j} &= AP_{2,j} = AP_{3,j} \\
 AW_{2,j} &= AS_{2,j} = AN_{2,j} = 0 \\
 ANE_{2,j} &= ANW_{2,j} = ASE_{2,j} = ASW_{2,j} = 0 \\
 DM_{2,j} &= -AP_{2,j} \Delta x b
 \end{aligned} \tag{8}$$

Jos Neumann'in ehto on  $\frac{\partial p'}{\partial n}|_{face} = 0$ , kertoimet ovat kuten edellä, mutta lähdetermi on nolla, eli  $DM_{2,j} = 0$ . Painekorjausyhtälön yhteydessä vain lähteetön vaihtoehto tulee kysymykseen. Jos liikemääräyhtälöiden reunaehdot annetaan laskenta-alueen reunalla  $face$ , ei painekorjauksen Neumannin reunaehto voida antaa luontevasti haamusolussa.

Kun kyseessä on ehto  $\frac{\partial p'}{\partial n}|_{face} = 0$ ,  $p'|_{face} = 0$  tai  $p'|_{ghost} = 0$ , voidaan monihilaratkaisijan harvemmillä hilatasoilla käyttää suoraan edellä esitettyjä tiheimmän hilan kertoimien ja lähdetermin laskentakaavoja. Kun reunaehtona on nolasta poikkeava Dirichlet'n ehto  $p'|_{face} = b$  tai  $p'|_{ghost} = b$ , ei laskentakaavoja voida lähdetermin osalta käyttää sellaisenaan harvemmillä hiloilla. Koska kullakin harvemmillä hilatasolla

lasketaan seuraavaksi tiheämmän hilatason korjausta  $\epsilon$ , ovat tiheimmän hilan reunaehdot  $p'|_{face} = b$  ja  $p'|_{ghost} = b$  vastaavat harvempien hilojen Dirichlet'n reunaehdot aina  $\epsilon|_{face} = 0$  ja  $\epsilon|_{ghost} = 0$ . Tämä pätee MG:lle, muttei FAS:lle. *Siten Dirichlet'n reunaehdoilla harvempien hilojen haamukoppien lähdetermi on aina nolla.* Käytännössä nolasta poikkeava painekorjauksen arvo reunalla hoituu MG:llä onnekaasti itsestään.

MG-Poisson-ratkaisijan harvemmillä hilatasoilla voidaan kolmea ehtoa käyttäen ohjelmoida varsinaisen probleeman reunaehdot  $\frac{\partial p'}{\partial n}|_{face} = 0$ ,  $p'|_{face} = 0$ ,  $p'|_{face} = b$ ,  $p'|_{ghost} = 0$  ja  $p'|_{ghost} = b$ . Reunaehdon tyyppi luetaan tiheimmän hilan kertoimista. Kertoimien laskentakaavat saadaan suoraan tiheimmän hilan kaavoista. Harvemmillä hiloilla haamukopin lähdetermi on aina nolla.